Concours professeur des écoles

ADMISSIBILITÉ

CRPE 2022

MATHS

Le manuel complet pour réussir l'écrit

- Tous les savoirs disciplinaires
- 150 questions d'autoévaluation
- Méthodologie et conseils pour l'épreuve
- 300 exercices corrigés et commentés
- Sujets corrigés

OFFERT
150 QCM interactifs

M. Loison (dir.)
F. Bianco (coord.)
V. Bouquillon-Sadaune
J.-R. Delplace

N°1 Vuibert DES CONCOURS

Concours professeur des écoles

ADMISSIBILITÉ

CRPE 2022

MATHS

Le manuel complet pour réussir l'écrit

Ouvrage dirigé par Marc Loison
Docteur en histoire de l'éducation et sciences de l'éducation,
maître de conférences honoraire en histoire contemporaine de l'université d'Artois,
ancien conseiller pédagogique chargé de mission académique pour l'éducation prioritaire,
ancien président de jury CRPE

Ouvrage coordonné par Franky Bianco
Conseiller pédagogique EPS et généraliste en circonscription primaire,
membre du jury académique CRPE et membre du groupe départemental Maths 62

Valérie Bouquillon-Sadaune
Conseillère pédagogique départementale en maternelle, inspection académique
du Pas-de-Calais, et membre du jury académique CRPE

Jean-Robert Delplace
Professeur honoraire en INSPE, agrégé de mathématiques,
titulaire d'un master 2 en didactique des mathématiques

Vuibert
N°1 DES CONCOURS

Ressources numériques pour réussir le CRPE

Téléchargez :

- **150 QCM interactifs ;**
- **le sujet zéro officiel corrigé ;**
- **les repères de progression et les attendus de fin de cycle.**



ou www.vuibert.fr/site/210750

ISBN : 978-2-311-21075-0

Conception et réalisation de la couverture : Delphine d'Inguimbert et Valérie Goussot/Caroline Joubert (Atelier du livre) – Conception de l'intérieur : Bleu T/Caroline Joubert (Atelier du livre) – Composition : STDI

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article 40).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.
Le « photocopillage », c'est l'usage abusif et collectif de la photocopie sans autorisation des auteurs et des éditeurs. Largement répandu dans les établissements d'enseignement, le « photocopillage » menace l'avenir du livre, car il met en danger son équilibre économique. Il prive les auteurs d'une juste rémunération. En dehors de l'usage privé du copiste, toute reproduction totale ou partielle de cet ouvrage est interdite. Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur.
S'adresser au Centre français d'exploitation du droit de copie : 20, rue des Grands-Augustins, F-75006 Paris. Tél. : 01 44 07 47 70

© Vuibert – juin 2021 – 5, allée de la 2e DB – 75015 Paris
Site Internet : http://www.vuibert.fr

Sommaire

Avant-propos 7

Comment aborder le CRPE 8

Méthodologie de l'épreuve 12

Questions disciplinaires régulièrement posées lors du CRPE 17

QCM d'autoévaluation 18

PARTIE 1 / NOMBRES ET CALCULS

1 LES DIFFÉRENTS TYPES DE NOMBRES

Autoévaluation 28

Cours 30

1. Nombres entiers naturels 30
2. Nombres entiers relatifs 31
3. Nombres rationnels. 31
4. Nombres décimaux. 32
5. Nombres irrationnels 33
6. Représentations des ensembles de nombres 33
7. Une autre écriture des nombres 34
8. Écriture scientifique d'un nombre 36

Entrainement 39

2 NUMÉRATION DE POSITION

Autoévaluation 44

Cours 47

1. Généralités. 47
2. Systèmes de numérations à base 48

Entrainement 57

3 NOMBRES ET OPÉRATIONS

Autoévaluation 68

Cours 70

1. L'addition 70
2. La soustraction. 72
3. La multiplication. 72
4. La division 75
5. Opérations et calcul algébrique 78

Entrainement 82

4 ARITHMÉTIQUE

Autoévaluation 97

Cours 100

1. Multiples et diviseurs 100
2. Nombres premiers. 102
3. Division euclidienne 105

Entrainement 108

PARTIE 2 / ESPACE ET GÉOMÉTRIE

5 ÉLÉMENTS DE BASE DE LA GÉOMÉTRIE PLANE EUCLIDIENNE

Autoévaluation 124
Cours 126
1. Plan et droites du plan 126
2. Positions relatives de deux droites du plan 128
3. Notion de longueur et de distance 130
4. Repérage d'un point 133

Entrainement 140

6 ANGLES

Autoévaluation 147
Cours 149
1. Définition 149
2. Classification des angles 149
3. Mesure d'un angle 150
4. Positions possibles de deux angles 150
5. Droites sécantes, droites parallèles et angles 151
6. Angles et triangles 152
7. Notion de trigonométrie 153

Entrainement 157

7 POLYGONES

Autoévaluation 170
Cours 172
1. Polygones 172
2. Trapèzes 173
3. Parallélogrammes 174
4. Triangles 178

Entrainement 186

8 GRANDS THÉORÈMES

Autoévaluation 195
Cours 197
1. Théorème de Pythagore 197
2. Théorème de Thalès 198

Entrainement 200

9 TRANSFORMATIONS DU PLAN

Autoévaluation 205
Cours 207
1. Translation 207
2. Symétrie axiale 208
3. Symétrie centrale 208
4. Rotation 209
5. Homothétie 210

Entrainement 213

10 SOLIDES

Autoévaluation 226
Cours 228
1. Polyèdres 228
2. Polyèdres réguliers 230
3. Différents types de polyèdres 231
4. Solides non polyèdres 232
5. Patron d'un solide 233
6. Sections planes de solides 234
7. Droites et plans de l'espace 235
8. Repérage sur/dans un solide 236

Entrainement 241

PARTIE 3 / GRANDEURS ET MESURES

11 GRANDEURS, GRANDEURS DE LA GÉOMÉTRIE ET FORMULES DE MESURES

Autoévaluation 252
Cours 254
1. Définitions 254
2. Grandeurs usuelles 255
3. Formules usuelles 257

Entrainement 262

PARTIE 4 / ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS

12 PROPORTIONNALITÉ

Autoévaluation 274
Cours 276
1. Définitions 276
2. Propriétés des suites proportionnelles... 278

Entrainement 286

13 APPLICATIONS USUELLES DE LA PROPORTIONNALITÉ

Autoévaluation 295
Cours 298
1. Pourcentages 298
2. Échelles.....301
3. Vitesse, distance et temps 302

Entrainement 305

14 FONCTIONS

Autoévaluation 316
Cours 318
1. Définitions et notations 318
2. Fonctions usuelles.....318
3. Représentation graphique d'une fonction .319

Entrainement 323

15 STATISTIQUES

Autoévaluation 332
Cours 334
1. Vocabulaire 334
2. Éléments caractéristiques d'une série statistique 337

Entrainement 343

16 PROBABILITÉS

Autoévaluation 349
Cours 352
1. Langage des probabilités 352
2. Calcul des probabilités..... 355

Entrainement 360

PARTIE 5 / PROBLÈMES

17 PROBLÈMES RÉSOLUS PAR L'ARITHMÉTIQUE OU PAR L'ALGÈBRE

Autoévaluation 368
Cours 370
1. Résolution par la méthode algébrique ... 370
2. Résolution par une méthode arithmétique 372

Entrainement 376

PARTIE 6 / ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION

18 TABLEUR INFORMATIQUE ET LOGICIEL SCRATCH

Autoévaluation 390

Cours 393

1. Vocabulaire 393
2. Le logiciel Scratch 396

Entrainement 407

PARTIE 7 / SUJET BLANC CORRIGÉ

19 Sujet blanc corrigé

Énoncé 422

Corrigé 427

Les outils clés pour maitriser les connaissances indispensables le jour de l'épreuve :

- La trigonométrie dans un triangle rectangle 153
- Les quadrilatères particuliers 175
- Le théorème de Pythagore 197
- Le théorème de Thalès 198
- Les périmètres, aires et volumes 257
- La correspondance entre un volume et une capacité 256
- La propriété de linéarité, la règle de trois et le tableau de proportionnalité 278
- Les pourcentages 298
- Les échelles et les vitesses 301
- La lecture d'un graphique 319

Avant-propos

La maitrise des savoirs enseignés et une solide culture générale sont les conditions nécessaires de l'enseignement. Elles permettent aux professeurs des écoles d'exercer la polyvalence propre à leur métier et d'avoir une vision globale des apprentissages, en favorisant la cohérence, la convergence et la continuité des enseignements. C'est la raison pour laquelle on attend du futur professeur des écoles que vous souhaitez devenir qu'il maitrise parfaitement les savoirs disciplinaires et leur didactique ainsi que la langue française dans le cadre de son enseignement. Ce sont ces deux objectifs que le présent ouvrage s'est fixés. Vous le découvrirez par vous-même en le parcourant au fur et à mesure de vos apprentissages, révision ou réactivation de connaissances.

Dans la continuité de ces objectifs clairement affichés dans le référentiel de compétences des professeurs des écoles, je souhaiterais attirer votre attention sur quelques points majeurs à respecter dans le cadre de la préparation de l'épreuve écrite d'admissibilité de mathématiques du CRPE que ce manuel aborde en détail.

Insistons tout d'abord sur le fait que la maitrise des savoirs disciplinaires et leur didactique dans chacun des domaines mathématiques (nombres et calculs, espace et géométrie, grandeurs et mesures, organisation et gestion des données, algorithmique et programmation) est une compétence essentielle pour tout professeur. On enseigne bien ce que l'on connait bien !

L'épreuve écrite disciplinaire d'admissibilité de mathématiques est constituée d'un ensemble d'au moins trois exercices indépendants, permettant de vérifier les connaissances du candidat. Dans cette épreuve, il est tout d'abord attendu du candidat qu'il maitrise finement et avec du recul l'ensemble des connaissances, compétences et démarches intellectuelles du socle commun de connaissances, compétences et culture, et les programmes des cycles 1 à 4.

Cette épreuve est certes exigeante mais elle reste à la portée de tous les candidats quelle que soit leur formation antérieure. Il suffit de bien gérer ses acquis, de les réactualiser et, bien sûr, de s'astreindre à une préparation rigoureuse. Elle ne porte généralement que sur des connaissances de base et tout s'apprend. Même si on pense avoir les connaissances fondamentales nécessaires, il est important de vérifier qu'elles sont bien mémorisées. Pour ce faire, les nombreux exercices et corrigés proposés dans cet ouvrage devraient être utiles aux candidats qui n'ont pas eu l'occasion de faire des mathématiques depuis plusieurs années.

Avec la réforme du CRPE, une nouvelle épreuve d'admission intitulée « leçon » a fait son apparition. Elle a pour objet la conception et l'animation d'une séance d'enseignement des mathématiques à l'école primaire, permettant d'apprécier la maitrise disciplinaire et la maitrise des compétences pédagogiques du candidat. Le présent ouvrage n'a certes pas vocation à répondre précisément à cet objet, un manuel CRPE spécifique lui étant consacré par ailleurs, il nous parait néanmoins essentiel d'inviter le futur professeur des écoles à réfléchir à l'articulation discipline/didactique et à la traduction du savoir disciplinaire en savoir enseigner. C'est la raison pour laquelle, en complément des savoirs disciplinaires abordés, figurent systématiquement, dans la partie « Vers l'oral », une analyse didactique et une exploitation pédagogique d'extraits de manuels scolaires.

Marc Loison
maitre de conférences honoraire, docteur en histoire de l'éducation
et sciences de l'éducation, directeur de l'ouvrage

Comment aborder le CRPE

Cet ouvrage a pour objectif essentiel d'assurer la préparation théorique de **l'épreuve écrite d'admissibilité de mathématiques** du concours de recrutement de professeurs des écoles (CRPE). Rappelons que cette épreuve vise à apprécier les connaissances disciplinaires du candidat indispensables pour un enseignement maitrisé des programmes de l'école primaire.

Avant d'aborder la préparation théorique de cette épreuve écrite, il parait essentiel d'indiquer les textes officiels qui régissent désormais le CRPE et que tout candidat se doit de connaitre. Il est par ailleurs indispensable de connaitre l'ensemble des épreuves écrites et orales d'admissibilité et d'admission et les objectifs qui leur sont assignés.

1 Les textes officiels

L'arrêté du 25 janvier 2021 paru au *Journal officiel* du 29 janvier 2021 fixe les modalités d'organisation du concours externe de recrutement de professeurs des écoles. Deux grandes séries d'épreuves constituées respectivement de trois épreuves écrites d'admissibilité et de deux épreuves orales d'admission sont définies par référence aux programmes de l'école primaire (*Bulletin officiel* n° 31 du 30 juillet 2020), au socle commun de connaissances, de compétences et de culture (*Bulletin officiel* n° 17 du 23 avril 2015) mais aussi par référence aux compétences professionnelles des maitres (annexe de l'arrêté du 1er juillet 2013 paru au *Journal officiel* du 18 juillet 2013). Ces compétences sont intégralement réaffirmées dans le référentiel de formation publié dans le *Journal officiel* du 7 juillet 2019. Ce référentiel mis en œuvre depuis la rentrée scolaire 2019 précise, par ailleurs, les objectifs, les axes de formation et le niveau de maitrise des attendus en fin de master MEEF.

Enfin, sur le site du ministère de l'Éducation nationale, on veillera à consulter les sujets zéro et les programmes des épreuves écrites de français, de mathématiques et d'application.

→

2 Les épreuves du CRPE

<table>
<tr><th colspan="3">Trois épreuves écrites d'admissibilité</th></tr>
<tr><td colspan="3">Cadre de référence : Programmes de l'école primaire
Niveau attendu : Les connaissances attendues des candidats sont celles que nécessite un enseignement maitrisé de ces programmes. Il est attendu du candidat qu'il maitrise finement et avec du recul l'ensemble des connaissances, compétences et démarches intellectuelles du socle commun de connaissances, compétences et culture, et les programmes des cycles 1 à 4. Des connaissances et compétences en didactique du français et des mathématiques ainsi que des autres disciplines pour enseigner au niveau primaire sont nécessaires. Les épreuves écrites prennent appui sur un programme publié sur le site Internet du ministère chargé de l'Éducation nationale.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Épreuve écrite disciplinaire de français
Notée sur 20. Coefficient 1. Durée : 3 heures</th></tr>
<tr><td colspan="3">L'épreuve prend appui sur un texte (extrait de roman, de nouvelle, de littérature d'idées, d'essai…) d'environ 400 à 600 mots. Elle comporte trois parties :</td></tr>
<tr><td colspan="2">une partie consacrée à l'étude de la langue, permettant de vérifier les connaissances syntaxiques, grammaticales et orthographiques du candidat ;</td><td rowspan="3">Une note globale égale ou inférieure à 5 est éliminatoire.</td></tr>
<tr><td colspan="2">une partie consacrée au lexique et à la compréhension lexicale ;</td></tr>
<tr><td colspan="2">une partie consacrée à une réflexion suscitée par le texte à partir d'une question posée sur celui-ci et dont la réponse prend la forme d'un développement présentant un raisonnement rédigé et structuré.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Épreuve écrite disciplinaire de mathématiques
Notée sur 20. Coefficient 1. Durée : 3 heures</th></tr>
<tr><td colspan="2">L'épreuve est constituée d'un ensemble d'au moins trois exercices indépendants, permettant de vérifier les connaissances du candidat.</td><td>Une note globale égale ou inférieure à 5 est éliminatoire</td></tr>
<tr><th colspan="3">Épreuve écrite d'application
Notée sur 20. Coefficient 1. Durée : 3 heures</th></tr>
<tr><td colspan="3">L'épreuve a pour objectif d'apprécier la capacité du candidat à proposer une démarche d'apprentissage progressive et cohérente. Le candidat a le choix au début de l'épreuve entre trois sujets portant respectivement sur l'un des domaines suivants : sciences et technologie ; histoire, géographie, enseignement moral et civique ; arts. Le candidat dispose d'un dossier comportant notamment des travaux issus de la recherche et des documents pédagogiques. Il est amené à montrer dans le domaine choisi une maitrise disciplinaire en lien avec les contenus à enseigner et à appliquer cette maitrise à la construction ou à l'analyse de démarches d'apprentissage.</td></tr>
<tr><td>Sciences et technologie</td><td>L'épreuve consiste en la conception et/ou l'analyse d'une ou plusieurs séquences ou séances d'enseignement à l'école primaire (cycles 1 à 3), y compris dans sa dimension expérimentale.</td><td rowspan="3">Chaque épreuve peut comporter des questions visant à la vérification des connaissances disciplinaires du candidat.

Quand l'épreuve comporte 2 composantes, chacune d'entre elles est notée sur 10 points.

Une note globale égale ou inférieure à 5 est éliminatoire.</td></tr>
<tr><td>Histoire, géographie, enseignement moral et civique</td><td>Au titre d'une session, la Commission nationale compétente mentionnée à l'article 12 détermine deux composantes parmi les trois enseignements suivants : histoire, géographie, enseignement moral et civique. L'épreuve consiste en la conception et/ou l'analyse d'une ou plusieurs séquences ou séances d'enseignement à l'école primaire (cycles 1 à 3).</td></tr>
<tr><td>Arts</td><td>Au titre d'une session, la Commission nationale compétente mentionnée à l'article 12 détermine deux composantes parmi les trois enseignements suivants : éducation musicale, arts plastiques, histoire des arts. L'épreuve consiste en la conception et/ou l'analyse d'une ou plusieurs séquences ou séances d'enseignement à l'école primaire (cycles 1 à 3).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Deux épreuves orales d'admission</th></tr>
<tr><td colspan="2">Épreuve de leçon
Notée sur 20. Coefficient 4. Durée : 1 heure. Préparation : 2 heures</td></tr>
<tr><td colspan="2">L'épreuve porte successivement sur le français et les mathématiques. Elle a pour objet la conception et l'animation d'une séance d'enseignement à l'école primaire dans chacune de ces matières, permettant d'apprécier la maitrise disciplinaire et la maitrise des compétences pédagogiques du candidat. Le jury soumet au candidat deux sujets de leçon, l'un dans l'un des domaines de l'enseignement du français, l'autre dans celui des mathématiques, chacun explicitement situé dans l'année scolaire et dans le cursus de l'élève.</td></tr>
<tr><td>Préparation : Afin de construire le déroulé de ces séances d'enseignement, le candidat dispose en appui de chaque sujet d'un dossier fourni par le jury et comportant au plus quatre documents de nature variée : supports pédagogiques, extraits de manuels scolaires, traces écrites d'élèves, extraits des programmes…</td><td rowspan="2">Durée de l'épreuve :
Français : 30 minutes dont un exposé de 10 à 15 minutes et un entretien pour la durée restante impartie à cette partie.

Mathématiques : idem

La note 0 est éliminatoire</td></tr>
<tr><td>Présentation et entretien : Le candidat présente successivement au jury les composantes pédagogiques et didactiques de chaque leçon et de son déroulement. Chaque exposé est suivi d'un entretien avec le jury lui permettant de faire préciser ou d'approfondir les points qu'il juge utiles, tant sur les connaissances disciplinaires que didactiques.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Épreuve d'entretien composée de 2 parties
Notée sur 20. Coefficient 2. Durée totale : 1 heure 5 minutes</td></tr>
<tr><td colspan="2">Première partie : Éducation physique et sportive. Connaissance scientifique du développement et la psychologie de l'enfant
Notée sur 10. Durée : 30 minutes. Préparation : 30 minutes</td></tr>
<tr><td>Préparation : À partir d'un sujet fourni par le jury, proposant un contexte d'enseignement et un objectif d'acquisition pour la séance, il revient au candidat de choisir le champ d'apprentissage et l'activité physique support avant d'élaborer une proposition de situation(s) d'apprentissage qu'il présente au jury.</td><td rowspan="2">Exposé : ne doit pas excéder 15 minutes
Entretien : pour la durée restante impartie à cette première partie.

La note 0 obtenue à cette partie est éliminatoire.</td></tr>
<tr><td>Exposé et entretien : L'entretien permet d'apprécier d'une part les connaissances scientifiques du candidat en matière de développement et de psychologie de l'enfant, d'autre part sa capacité à intégrer la sécurité des élèves, à justifier ses choix, à inscrire ses propositions dans une programmation annuelle et, plus largement, dans les enjeux de l'EPS à l'école.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Seconde partie : Se projeter dans le métier de professeur au sein du service public de l'éducation
Notée sur 10. Durée : 35 minutes</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objectifs : cette seconde partie porte sur la motivation du candidat et son aptitude à se projeter dans le métier de professeur au sein du service public de l'éducation.</td></tr>
<tr><td>Entretien : le premier temps de l'échange débute par une présentation par le candidat des éléments de son parcours et des expériences qui l'ont conduit à se présenter au concours en valorisant ses travaux de recherche, les enseignements suivis, les stages, l'engagement associatif ou les périodes de formation à l'étranger.
La suite de l'échange doit permettre au jury, au travers de deux mises en situation professionnelle, l'une d'enseignement, la seconde en lien avec la vie scolaire, d'apprécier l'aptitude du candidat à :
• s'approprier les valeurs de la République, dont la laïcité, et les exigences du service public (droits et obligations du fonctionnaire dont la neutralité, lutte contre les discriminations et stéréotypes, promotion de l'égalité, notamment entre les filles et les garçons, etc.) ;
• faire connaitre et faire partager ces valeurs et exigences.</td><td>Premier temps de l'échange :
• Présentation du parcours et des expériences : 5 minutes maximum
• Échange avec le jury : 10 minutes
Second temps de l'échange (mises en situation professionnelle) : 20 minutes

La note 0 obtenue à cette partie est éliminatoire.</td></tr>
</table>

Épreuve orale facultative de langue vivante étrangère Notée sur 20. Durée : 30 minutes. Préparation : 30 minutes	
Le candidat peut demander au moment de l'inscription au concours à subir une épreuve orale facultative portant sur l'une des langues vivantes étrangères suivantes : allemand, anglais, espagnol, italien.	
Contenu et modalités : L'épreuve débute par un échange dans la langue choisie permettant au candidat de se présenter rapidement et de présenter un document didactique ou pédagogique, de deux pages maximum, qui peut être de nature variée : une séance ou un déroulé de séquence d'enseignement, un document d'évaluation, une production d'élève, un extrait de manuel ou de programme, un article de recherche en didactique des langues, etc., fourni par le jury (durée : dix minutes). Puis, le candidat expose la manière dont il pourrait inclure et exploiter le document fourni par le jury dans une séance ou une séquence pédagogique. Le candidat explicite les objectifs poursuivis et les modalités d'exploitation du support (exposé : dix minutes en français suivi d'un échange de dix minutes dans la langue vivante étrangère choisie).	**Exposé** : 10 minutes **Échange** : 20 minutes L'usage du dictionnaire monolingue ou bilingue est autorisé. Le niveau minimum de maitrise attendu de la langue correspond au niveau B2 du cadre européen de référence pour les langues. Seuls les points obtenus au-dessus de 10 sont pris en compte pour l'admission des candidats à l'issue des épreuves.

Le présent manuel, par le biais de points disciplinaires articulés avec de nombreux exercices, vous permettra de vous préparer efficacement à l'épreuve écrite de mathématiques mais aussi d'anticiper l'épreuve dite de leçon.

C'est le souhait que les auteurs de cet ouvrage et moi-même formulons. Par ailleurs, sa mise en œuvre éditoriale n'aurait pas été possible sans l'aide précieuse de Sophie Bravard et Stéphanie Herbaut, éditrices, que je tiens ici personnellement à remercier.

Marc Loison
Maitre de conférences honoraire
Docteur en histoire de l'éducation et sciences de l'éducation
Directeur de l'ouvrage

Méthodologie de l'épreuve

Les problèmes de mathématiques couvrent différents domaines (nombres, géométrie plane, solides, probabilités, statistique, etc.) et se présentent sous des formes différentes (textes, tableaux, figures de géométrie, documents divers, etc.). Il y a cependant une manière de chercher commune à beaucoup de problèmes.

1 Recommandations générales

◗ D'abord, il faut **prendre le temps de bien lire l'énoncé**, pour éviter de répondre à des questions qui ne sont pas posées, comme cela arrive régulièrement dans des copies de concours.

À la fin de la lecture, il faut avoir une bonne représentation du problème posé et être capable de le redire sans soutien de l'énoncé. Autrement dit, il faut être capable de répondre à ce type de questions : « De quoi s'agit-il ? », « Quelles sont les données du problème ? », « Que dois-je chercher ? ».

◗ Ensuite, il ne faut jamais chercher « dans sa tête » plus d'une minute environ ; si l'on n'a pas d'idée, il faut toujours **se forcer à écrire** (uniquement si aucune idée ne vient).

Que peut-on écrire ?

1. Écrire l'hypothèse, c'est-à-dire ce que l'on sait. Cette hypothèse est en général écrite dans l'énoncé, mais il peut aussi s'agir de renseignements pris sur une figure de géométrie codée ou sur un schéma accompagnant un problème d'arithmétique.

2. Transformer cette hypothèse, c'est-à-dire l'écrire autrement.

> **EXEMPLE**
> Si l'hypothèse met en jeu un triangle ABC isocèle en A, on peut écrire AB = AC ou $\widehat{B} = \widehat{C}$.

3. Écrire la conclusion ; de la même façon, on peut éventuellement l'écrire autrement.

4. Pour écrire « autrement », quelques pistes sont possibles :

- utiliser des résultats du cours (définitions, théorèmes, propriétés, etc.) ;
- utiliser des techniques de transformations vues dans d'autres exercices ;
- utiliser des renseignements donnés dans l'énoncé, ce qui revient souvent à utiliser un ou plusieurs résultats de la (ou des) question(s) précédente(s). En effet, il arrive que la méthode à utiliser soit sous-entendue dans l'énoncé.

> **EXEMPLE**
> « Déduire que… » signifie qu'il faut utiliser le résultat établi dans la question précédente.

5. Dans les problèmes de géométrie, il est souvent demandé de réaliser une figure correcte à l'aide des instruments usuels (règle graduée ou non, compas, équerre…). Il est alors souvent très utile de réaliser cette même figure à main levée sur une feuille de brouillon, ce qui prend peu de temps, et de coder cette figure à l'aide des données de l'énoncé puis des résultats successifs des différentes questions, ce qui permet d'avoir un regard global sur le problème.

◗ **En résumé**

Dans un problème, il y a plusieurs possibilités :

- soit on voit directement la connaissance à utiliser, et on l'utilise. Par exemple, utiliser le théorème de Pythagore pour calculer le 3e côté d'un triangle rectangle quand on connait la longueur des 2 autres ;
- soit on fait appel à une technique que l'on a appliquée dans un problème du même genre, et on l'applique. Par exemple, mettre un problème en équation ;
- soit on n'a pas trop d'idées, et on cherche des renseignements dans le problème lui-même.

CONSEIL DU FORMATEUR

La connaissance parfaite des résultats du cours est indispensable pour « faire des mathématiques », c'est-à-dire pour chercher à résoudre des problèmes de mathématiques.

Pour les mêmes raisons, il faut faire de nombreux exercices, afin d'acquérir et de retenir des techniques.

Le jour du concours, il n'est plus temps de réfléchir à des méthodes ou d'inventer de nouvelles techniques ! Il faut être capable de rédiger une partie des questions « au fil de la plume », réservant davantage de temps de recherche pour des questions plus délicates ou plus résistantes.

2 Conjectures et théorèmes

◗ Une **conjecture** est une propriété que l'on pense être vraie et qui n'a encore été ni démontrée, ni réfutée.

EXEMPLE

À partir des trois égalités : $3 + 7 = 10$; $9 + 13 = 22$ et $1 + 17 = 18$, on peut énoncer que la somme de deux nombres impairs est un nombre pair. Cette assertion est une conjecture, car le fait de l'avoir vérifiée sur trois exemples ne prouve pas qu'elle soit toujours vraie.

◗ Un **théorème** est une propriété qui a été démontrée.

EXEMPLE

Dans l'exemple précédent, pour tout entier n et pour tout entier p, on a : $(2n + 1) + (2p + 1) = 2n + 2p + 2 = 2(n + p + 1)$. Cette égalité démontre que la somme de deux nombres impairs est un nombre pair. Cet énoncé est alors un théorème, et la propriété précédente est toujours vraie.

3 Propriétés vraies ou fausses

- Quand une propriété est **vraie**, on la **démontre** en raisonnant sur le cas général (voir exemple précédent).
- Quand une propriété est **fausse**, on la **réfute** en donnant un unique contre-exemple.

> **EXEMPLE**
> Soit la propriété : « Si un nombre est divisible par 4 et par 6, alors il est divisible par 24. » Cette propriété est fausse. Ainsi, 12 est divisible par 4 et par 6, mais pas par 24. Ce contre-exemple suffit pour justifier que la propriété est fausse.

4 Quelques conseils de rédaction

La meilleure rédaction consiste souvent à reprendre les termes de l'énoncé.

En géométrie, il faut utiliser les notations de l'énoncé et les appliquer.

À la lecture d'une copie, on ne doit jamais se poser de questions du type : « Comment le candidat a-t-il trouvé ce résultat ? » ou « Pourquoi le candidat applique-t-il ce théorème ? », par exemple. Autrement dit, il faut justifier soigneusement chacune de ses réponses, sauf si l'énoncé précise le contraire.

5 Exemples de résolution de problèmes

Les conseils précédents sont surlignés en rouge dans les corrigés ci-après : ils ne font pas partie de la rédaction. On utilise dans ces exemples, entre autres, des résultats de cours, des techniques comme le tableau de proportionnalité, et le report de données sur une figure permettant une vue d'ensemble instantanée du problème.

Problème ①
Je me rends de la ville A à la ville B, distantes de 60 km, à la vitesse moyenne de 80 km/h, puis je reviens à la ville A par la même route, à la vitesse moyenne de 100 km/h.
Déterminer ma vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours.

Problème ②
Vrai ou faux : Il existe au moins un nombre entier compris entre 11 000 et 12 000, dont le plus grand diviseur commun avec 2 180 est 545.

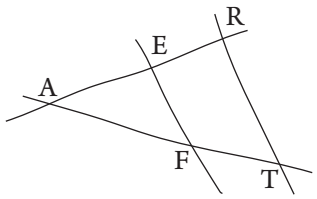
Problème ③

On considère la figure ci-contre, réalisée à main levée et qui n'est pas à l'échelle.

On donne les informations suivantes :

Les droites (ER) et (FT) sont sécantes en A

AE = 8 cm, AF = 10 cm, EF = 6 cm, AR = 12 cm, AT = 14 cm



❶ Démontrer que le triangle AEF est rectangle en E.

❷ Les droites (EF) et (RT) sont-elles parallèles ?

CORRIGÉS

Problème ①

La définition d'une vitesse moyenne est $V = \dfrac{\text{Distance totale parcourue}}{\text{Temps total de parcours}}$.

Il faut donc déterminer la distance totale parcourue, ainsi que le temps total de parcours.

• Distance totale parcourue : 60 + 60 = 120 km.

• Temps total de parcours : utilisation d'un tableau de proportionnalité et de la règle des produits en croix

$T_1 = \dfrac{60 \times 60}{80} = 45$ min.

Distance, en km	80	60
Temps, en min	60	T_1

$T_2 = \dfrac{60 \times 60}{100} = 36$ min.

Distance, en km	100	60
Temps, en min	60	T_2

Temps total de parcours : 45 min + 36 min = 81 min

• Calcul de la vitesse moyenne : attention aux unités, la vitesse est exprimée en km/h, d'où la nécessité de multiplier le résultat par 60 (60 min = 1 h), sinon on obtient la vitesse en km/min.

$V = \dfrac{120}{81} \times 60 \approx 88{,}9$ km/h.

Problème ②

• Utilisation une à une des différentes données de l'énoncé et écriture mathématique de ces différentes données

D'après l'énoncé, le nombre n cherché est multiple de 545, c'est-à-dire :

$n = 545 \times a$.

D'après l'énoncé, 2 180 est aussi multiple de 545. On trouve que $2\,180 = 4 \times 545$.

Comme 545 est le plus grand diviseur commun à n et 2 180, il ne faut pas que 4 soit diviseur de n, puisque 4 divise 2 180. On cherche donc un multiple de 545 qui n'est pas multiple de 4 et qui soit compris entre 11 000 et 12 000.

• Recherche d'un ordre de grandeur

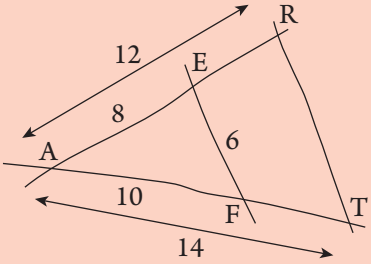
Or, 11 000 ÷ 545 ≈ 20,2.

• Une solution du problème

Puisque 21 n'est pas multiple de 4, le nombre 545 × 21 = 11 445 convient, et la propriété est vraie.

Problème ③

• Report les données du problème sur un dessin à main levée permettant une vision globale instantanée du problème :



❶ Association mentale triangle rectangle-Pythagore

Dans le triangle AEF :

$AF^2 = 100$; $AE^2 + EF^2 = 64 + 36 = 100$. Donc : $AF^2 = AE^2 + EF^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle AEF est rectangle en E.

❷ Association mentale parallélisme-Thalès induite par la question et le dessin

$\frac{AE}{AR} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$; $\frac{AF}{AT} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$ or $\frac{2}{3} \neq \frac{5}{7}$: on ne peut pas appliquer la réciproque du théorème de Thalès dans le triangle ART, par conséquent (RT) et (EF) ne sont pas parallèles.

Questions disciplinaires régulièrement posées lors du CRPE

Nombres et calcul

- Caractériser un nombre décimal, connaitre la partie décimale d'un nombre
- Valeur approchée d'un nombre, notion d'arrondi
- Notion de multiple, de diviseur
- Division euclidienne
- Résoudre une équation du 1er degré ou du 2nd degré simple, ou une inéquation
- Développer le carré d'une somme $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Géométrie

- Construction de figures géométriques
- Caractériser des triangles ou des quadrilatères particuliers
- Théorème de Pythagore, réciproque, théorème de Thalès, réciproque
- Trigonométrie dans un triangle rectangle
- Parallélisme
- Montrer que des points sont alignés par le cas particulier de l'inégalité triangulaire :

$$C \in [AB] \Leftrightarrow AB = AC + CB$$

- Construire un patron d'un solide

Grandeurs et mesures

- Formules de périmètres, d'aires et de volumes, associer volume et capacité ($1\ dm^3 = 1\ L$)
- Notion de vitesse, de vitesse moyenne
- Notion d'angle, somme des angles d'un triangle
- Calculer avec des durées (soustraire deux données en h, min et s)

Organisation et gestion de données

- Lire et extraire des données d'une feuille de calcul
- Établir ou utiliser une formule utilisant une ou plusieurs variables (feuille de calcul ou tableur)
- Utiliser une formule donnée
- Lire ou modifier un programme Scratch
- Notion de fonction, fonction affine
- Construire ou reconnaitre la droite correspondant à une fonction affine donnée
- Lire un graphique, donner du sens à l'abscisse ou l'ordonnée ou les coordonnées d'un point
- Utilisation d'un diagramme
- Proportionnalité, tableau de proportionnalité, notion d'échelle, pourcentages
- Réaliser un tableau de statistiques à partir d'un graphique
- Réaliser un diagramme circulaire
- Notion de médiane, de fréquence
- Calcul de probabilités (équiprobabilité)

Dans tous les domaines

- Savoir démontrer ou réfuter une affirmation

QCM d'autoévaluation

Dans ce QCM, chaque question peut n'avoir aucune réponse correcte, ou une, ou deux, ou trois.

❶ Combien de zéros y a-t-il dans l'écriture du nombre dix milliards dix millions dix ?

☐ **a.** 5 ☐ **b.** 8 ☐ **c.** 9 ☐ **d.** 11

❷ Le nombre 101 202 033 :

☐ **a.** ne possède aucun diviseur
☐ **b.** a un seul diviseur
☐ **c.** a exactement deux diviseurs
☐ **d.** a au moins trois diviseurs

❸ On considère la fraction $\frac{291}{438}$.

☐ **a.** 291 est un nombre premier.
☐ **b.** La fraction est irréductible.
☐ **c.** La fraction est l'écriture fractionnaire d'un nombre décimal.
☐ **d.** La fraction est l'écriture d'un nombre irrationnel.

❹ La fraction irréductible égale à $\frac{882}{1\,134}$ est :

☐ **a.** $\frac{7}{9}$ ☐ **b.** $\frac{14}{9}$ ☐ **c.** $\frac{63}{81}$ ☐ **d.** $\frac{441}{567}$

❺ L'écriture en notation scientifique du nombre 2 310 000 000 est :

☐ **a.** 231×10^7 ☐ **b.** $2{,}31 \times 10^9$ ☐ **c.** $0{,}231 \times 10^{10}$ ☐ **d.** $2\,310 \times 10^6$

❻ Le carré du nombre $13 + \frac{4}{10}$ a pour partie décimale :

☐ **a.** $\frac{5}{10}$ ☐ **b.** $\frac{16}{100}$ ☐ **c.** $\frac{56}{100}$ ☐ **d.** 179,5

❼ La somme des carrés de deux impairs consécutifs :

☐ **a.** est un nombre impair
☐ **b.** est un nombre pair
☐ **c.** peut se terminer par 4
☐ **d.** est divisible par 8

❽ On donne n, nombre entier, et on considère les propositions suivantes :

P1 : $2n$ peut être un nombre premier.

P2 : $n + 1$ est toujours un nombre premier.

P3 : n^2 n'est jamais un nombre premier.

P4 : $(n + 1)^2 - (n - 1)^2$ n'est jamais un nombre premier.

P5 : $(2n + 1)^2$ peut être un nombre premier.

Combien y a-t-il de propositions vraies ?

☐ **a.** 0 ☐ **b.** 2 ☐ **c.** 3 ☐ **d.** 4

❾ On considère les expressions suivantes :

$A = x^2 - 64$; $B = 9x^2 + 16$; $C = 5x^2 - 9$; $D = -25x^2 + 169$; $E = 4x^4 - 49$; $F = 2x^2 - 7$

Combien d'expressions peut-on factoriser ?

☐ **a.** 2 ☐ **b.** 3 ☐ **c.** 4 ☐ **d.** 5

⑩ Dans une boisson A, il y a quatre parts de chocolat pour sept parts de lait. Dans une boisson B, il y a six parts de chocolat pour neuf parts de lait.

☐ **a.** A est plus chocolatée que B.
☐ **b.** B est plus chocolatée que A.
☐ **c.** A et B sont autant chocolatées.
☐ **d.** Il faut rajouter une part et demie de lait à la boisson B pour qu'elle soit aussi chocolatée que la boisson A.

⑪ Léa et Lou sont deux commerçantes. Sur un certain article, Léa applique une hausse de 10 % du prix, puis une baisse de 10 % sur le prix obtenu. Sur le même article vendu le même prix de départ, Lou applique une baisse de 10 % du prix, puis une hausse de 10 % sur le prix obtenu.

☐ **a.** L'article coûte moins cher chez Léa.
☐ **b.** L'article coûte moins cher chez Lou.
☐ **c.** L'article est au même prix chez les deux commerçantes.
☐ **d.** Au final, l'article n'a pas changé de prix.

⑫ Une hausse de 25 % revient à appliquer :

☐ **a.** la fonction $x \mapsto 0{,}25x$
☐ **b.** la fonction $x \mapsto 1{,}25x$
☐ **c.** la fonction $x \mapsto 1 + 0{,}25x$
☐ **d.** la fonction $x \mapsto \dfrac{125}{100}x$

⑬ La fonction f est définie par $x \mapsto -\dfrac{1}{3}x + 5$.

☐ **a.** f est une fonction affine.
☐ **b.** f est une fonction linéaire.
☐ **c.** f est une droite.
☐ **d.** $\sqrt{2}$ n'a pas d'antécédent par f.

⑭ Le rayon du Soleil vaut environ 100 fois le rayon de la Terre. Alors, le volume du Soleil vaut environ :

☐ **a.** 1 000 fois le volume de la Terre.
☐ **b.** 300 fois le volume de la Terre.
☐ **c.** 1 000 000 le volume de la Terre.
☐ **d.** 10^9 fois le volume de la Terre.

⑮ Lors du tirage au sort de 3 cartes, on sait que la carte A a 2 fois plus de chances d'être tirée que la carte B, et que la carte B a 3 fois plus de chances d'être tirée que la carte C. Quelle est la probabilité pour chacune des cartes d'être tirée ?

☐ **a.** 0,6 ; 0,3 ; 0,1
☐ **b.** $1 ; \dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{3}$
☐ **c.** On ne pourra jamais tirer C.
☐ **d.** Il manque une donnée pour résoudre le problème.

⑯ En mathématiques, Louis a 12 pour note médiane. Cela signifie que :

☐ **a.** au moins la moitié de ses notes sont inférieures ou égales à 12.
☐ **b.** il a autant de notes inférieures ou égales à 12 que de notes supérieures ou égales à 12.
☐ **c.** une note sur deux est égale à 12.
☐ **d.** s'il avait toujours eu les mêmes notes, celles-ci auraient toutes été égales à 12.

⑰ Charlie a obtenu 15 à son dernier devoir, sa moyenne passe alors de 11 à 12. Quelle note doit-il obtenir à son prochain devoir pour que sa moyenne passe de 12 à 13 ?

☐ **a.** 20
☐ **b.** 19
☐ **c.** 17
☐ **d.** Ce problème n'a pas de solution, car on ne connait pas le nombre de notes de Charlie.

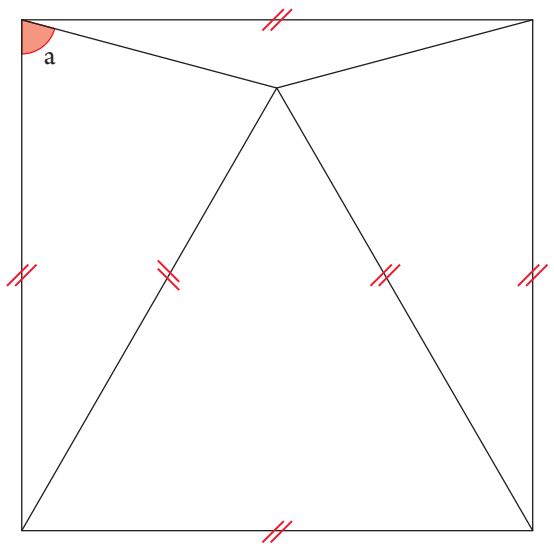
18 Pour aller de la ville A à la ville B, un automobiliste roule à une vitesse moyenne de 80 km/h, et au retour, par la même route, il roule à une vitesse moyenne de 120 km/h. Quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours ?
☐ **a.** 96 km/h
☐ **b.** 100 km/h
☐ **c.** Environ 97,9 km/h
☐ **d.** Il faut connaitre la distance entre les deux villes pour calculer cette vitesse moyenne.

19 On quadruple la circonférence d'un disque. L'aire de ce disque est multipliée par :
☐ **a.** 4 ☐ **b.** 8 ☐ **c.** 16 ☐ **d.** 4π

20 Le volume exact d'une balle de tennis de 3,3 cm de rayon est, en cm^3 :
☐ **a.** $47{,}916\pi$ ☐ **b.** $13{,}2\pi$ ☐ **c.** 47π ☐ **d.** 150,53255

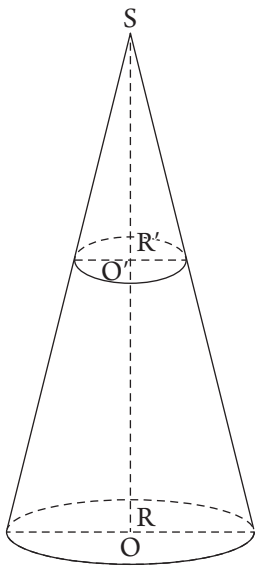
21 Un rectangle et un carré ont le même périmètre.
☐ **a.** L'aire du carré est inférieure à l'aire du rectangle.
☐ **b.** L'aire du carré est supérieure à l'aire du rectangle.
☐ **c.** L'aire du carré est égale à l'aire du rectangle.
☐ **d.** L'aire du carré est parfois inférieure à l'aire du rectangle, et parfois supérieure à l'aire du rectangle.

22



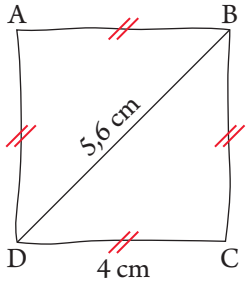
Dans ce carré, l'angle $\widehat{a}$ mesure :
☐ **a.** 72° ☐ **b.** 75° ☐ **c.** 70° ☐ **d.** 80°

23 Dans le dessin ci-dessous, les bases des deux cônes sont parallèles. On donne : SO′ = 18 cm, SO = 27 cm.



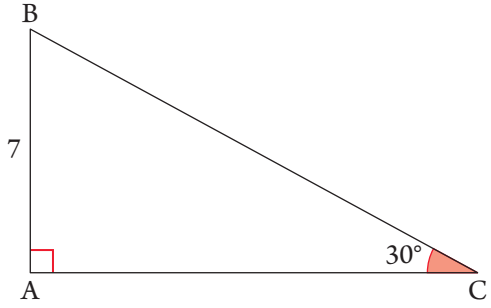
☐ **a.** Le coefficient d'agrandissement pour passer du petit cône au grand cône est 1,5.
☐ **b.** Le volume du grand cône vaut 3,375 fois le volume du petit cône.
☐ **c.** Le volume du grand cône vaut 1,125 fois le volume du petit cône.
☐ **d.** $R = R' + 9$

24 On considère le quadrilatère représenté à main levée ci-dessous :



☐ **a.** ABCD est un losange.
☐ **b.** ABCD est un parallélogramme.
☐ **c.** (AC) ⊥ (BD)
☐ **d.** ABCD est un carré.

25



☐ **a.** BC = 7 sin 30°

☐ **b.** BC = $\dfrac{\tan 30°}{7}$

☐ **c.** $\dfrac{7}{\sin 30°}$

☐ **d.** BC = 7 tan 30°

26 On veut construire des rectangles dont les diagonales mesurent 4 cm.

☐ **a.** Tous les rectangles obtenus sont homothétiques.

☐ **b.** Un des rectangles obtenu peut être un carré.

☐ **c.** Un des rectangles obtenu peut être un losange.

☐ **d.** Tous les rectangles ont la même aire.

27 La section d'un cylindre de révolution de 4 cm de diamètre et de 10 cm de hauteur par un plan parallèle à son axe peut être :

☐ **a.** un rectangle de 10 cm sur 3 cm.

☐ **b.** un rectangle de 9 cm sur 5 cm.

☐ **c.** un rectangle de 10 cm sur 4 cm.

☐ **d.** un rectangle de 8 cm sur 2 cm.

28 Parmi les propositions suivantes concernant le repérage sur la Terre, combien y en a-t-il de vraies ?

P1 : Tous les parallèles ont la même longueur.

P2 : Tous les méridiens ont la même longueur.

P3 : Un parallèle est un cercle.

P4 : Un méridien est un cercle.

☐ **a.** 1 ☐ **b.** 2 ☐ **c.** 3 ☐ **d.** 4

29 Aux États-Unis, la température se mesure en degrés Fahrenheit (en °F). En France, elle se mesure en degrés Celsius (en °C). Pour faire les conversions d'une unité à l'autre, on a utilisé un tableur. Voici une copie de l'écran obtenu ci-dessous :

	A	B
1	**Conversions**	
	Températures	Températures
2	en °C	en °F
3	– 5	23
4	0	32
5	5	41
6	10	50
7	15	59
8	20	68
9	25	77

Pour convertir la température de °C en °F, il faut multiplier la température en °C par 1,8 puis ajouter 32. On a écrit une formule en B3 puis on l'a recopiée vers le bas.

Quelle formule a-t-on pu saisir dans la cellule B3 ?

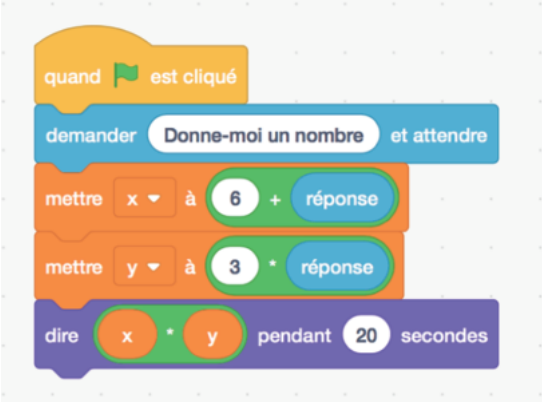
☐ **a.** 1,8*A3+32

☐ **b.** =1,8*5+32

☐ **c.** =1,8*B3+32

☐ **d.** =1,8*A3+32

30 Le programme ci-dessous a été écrit avec le logiciel Scratch :



☐ **a.** Si on rentre le nombre 5, le lutin va dire 175 pendant 20 s.

☐ **b.** Si on rentre le nombre $2 + \frac{7}{10}$, le lutin va dire $70 + \frac{47}{100}$ pendant 20 s.

☐ **c.** Si le lutin dit 28, c'est que l'on a rentré le nombre 1.

☐ **d.** Il existe trois nombres distincts que l'on peut rentrer pour lesquels le lutin va dire 0 pendant 20 s.

CORRIGÉS

1 **b.** Le nombre s'écrit 10 010 000 010. →Chapitre 1 p. 30

2 **d.** La somme des chiffres du nombre est 12, donc ce nombre est divisible par 3. Comme tout nombre différent de 0 est divisible par 1 et par lui-même, ce nombre a au moins 3 diviseurs. →Chapitre 4 p. 100

3 **Aucune bonne réponse.** 291 est divisible par 3, donc il n'est pas premier. La fraction se réduit à $\frac{97}{146}$. 146 n'est pas le produit d'une puissance de 2 par une puissance 5, donc la fraction n'est pas l'écriture fractionnaire d'un nombre décimal. De plus, par définition, toute fraction est l'écriture d'un nombre rationnel. →Chapitre 4 p. 100

4 **a.** $\frac{882}{1\,134} = \frac{2 \times 3^2 \times 7^2}{2 \times 3^4 \times 7} = \frac{7}{9}$ →Chapitre 4 p. 100

5 **b.** Par définition. →Chapitre 1 p. 30

6 **c.** $13 + \frac{4}{10} = 13{,}4$; $13{,}4^2 = 179{,}56 = 179 + \frac{56}{100}$ →Chapitre 3 p. 70

7 **b.** et **c.** Cette somme s'écrit $(2n - 1)^2 + (2n + 1)^2 = 8n^2 + 2$, donc ce nombre est pair. Il peut se terminer par 4, par exemple $3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$. →Chapitre 3 p. 70

8 **c.** Pour $n = 1$, $2n = 2$ qui est un nombre premier. Pour $n = 3$, $n + 1 = 4$, qui n'est pas un nombre premier. Pour $n \neq 1$, $n^2 = n \times n$ ne peut pas être premier. $(n + 1)^2 - (n - 1)^2 = 4n$ qui ne peut pas être un nombre premier. $(2n + 1)^2 = (2n + 1)(2n + 1)$ qui ne peut pas être un nombre premier. →Chapitre 4 p. 100

9 **d.** Seule, l'expression B est non factorisable. Pour les autres expressions, par exemple, on a :
D = (13 – 5x) (13 + 5x) ; F = $(x\sqrt{2} - \sqrt{7})(x\sqrt{2} + \sqrt{7})$ →Chapitre 3 p. 70

10 **b.** et **d.** La proportion de chocolat dans la boisson A est $\frac{4}{7}$ (environ 0,57), et elle est de $\frac{6}{9}$ (environ 0,66) dans la boisson B. Soit x la quantité de lait que l'on ajoute à la boisson B pour qu'elle soit aussi chocolatée que la boisson A. Alors :
$\frac{4}{7} = \frac{6}{9+x}$ soit $36 + 4x = 42$, d'où $4x = 6$ et $x = 1{,}5$. →Chapitre 12 p. 274

11 **c.** Dans les deux cas, le prix final vaut $1{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}99$ fois le prix initial. →Chapitre 13 p. 298

12 **b.** et **d.** Augmenter une quantité de 25 % revient à la multiplier par 1 + 25 % = 1,25 = $\frac{125}{100}$.
→Chapitre 13 p. 298

13 **a.** f est affine par définition d'une fonction affine qui est du type : $f \longrightarrow ax + b$.
Les autres réponses sont fausses. Pour b, f n'est pas linéaire car une fonction linéaire est du type $x \longrightarrow ax$. On peut remarquer que toute fonction linéaire est affine (avec $b = 0$), mais la réciproque est fausse. Pour c, c'est la représentation graphique de f qui est une droite, et non pas f qui, elle, est une fonction. Enfin pour d, chercher l'antécédent de $\sqrt{2}$ par f, c'est résoudre l'équation $-\frac{1}{3}x + 5 = \sqrt{2}$, soit : $\frac{1}{3}x = 5 - \sqrt{2}$, c'est-à-dire $x = 15 - 3\sqrt{2}$.
→Chapitre 14 p. 318

14 **c.** R(Soleil) = 100 R(Terre), donc V(Soleil) = $\frac{4}{3}\pi\,(100R)^3 = \frac{4}{3}\pi \times 1\,000\,000\,R^3$. →Chapitre 12 p. 276

15 **a.** D'après l'énoncé, p(A) = 2 p(B) et p(B) = 3 p(C). Donc p(A) = 6 p(C). On sait que p(A) + p(B) + p(C) = 1, soit 10 p(C) = 1, d'où $p(C) = \frac{1}{10}$, $p(B) = \frac{3}{10}$ et $p(A) = \frac{6}{10}$. →Chapitre 12 p. 276

16 **a.** et **b.** Par définition. →Chapitre 15 p. 334

17 **c.** Au départ, la moyenne de Charlie est 11. On appelle S la somme des notes de Charlie et N le nombre de ces notes. Alors $\frac{S}{N} = 11$, soit $S = 11\,N$. En obtenant 15, la moyenne devient $\frac{S+15}{N+1} = 12$, soit $S + 15 = 12\,N + 12$, c'est-à-dire : $11\,N + 15 = 12\,N + 12$. Finalement, $N = 3$ et $N + 1 = 4$ et $S + 15 = 48$. Soit n la note que Charlie doit obtenir pour que sa moyenne devienne 13, alors $\frac{48+n}{5} = 13$, soit $48 + n = 65$ et $n = 17$. →Chapitre 15 p. 334

18 **a.** $\frac{AB}{t_1} = 80$ et $\frac{AB}{t_2} = 120$, soit $t_1 = \frac{AB}{80}$ et $t_2 = \frac{AB}{120}$
La vitesse moyenne V sur l'ensemble du parcours est $V = \frac{2AB}{t_1 + t_2} = \frac{2AB}{\frac{AB}{80} + \frac{AB}{120}}$
$V = \frac{2AB}{\frac{5AB}{240}}$. Finalement, $V = \frac{2AB \times 240}{5AB} = 96$. →Chapitre 13 p. 298

19 **c.** La circonférence d'un disque de rayon R est $C_1 = 2\pi R$. La nouvelle circonférence est $C_2 = 4 \times 2\pi R = 2 \times \pi \times 4R$, c'est-à-dire que le rayon a été multiplié par 4. L'aire initiale, égale à $A_1 = \pi R^2$ devient : $A_2 = \pi \times (4R)^2 = 16 \times \pi R^2 = 16\,A_1$. →Chapitre 12 p. 276

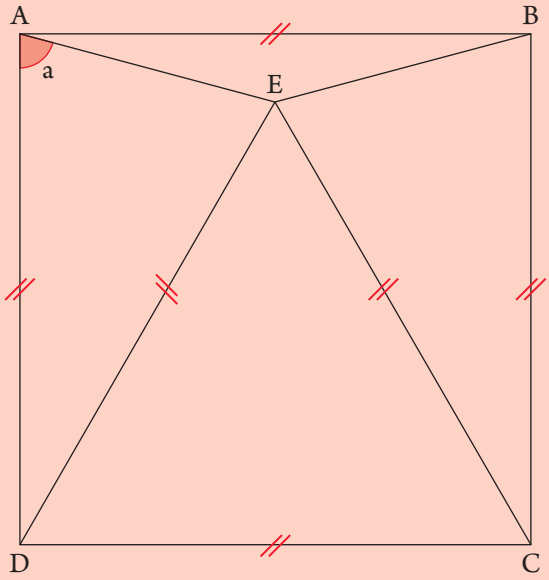
20 a. $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 3{,}3^3 = 4 \times \pi \times 1{,}1 \times 3{,}3^2 = 47{,}916\,\pi$ cm^3 →Chapitre 11 p. 254

21 b. Une recherche sur un cas particulier, par exemple un périmètre de 32, donne la réponse :

L	8	9	10	11	12	13
l	8	7	6	5	4	3
Aire	64	63	60	55	48	39

→Chapitre 11 p. 254

22 b. On a :



DEC est un triangle équilatéral, donc $\widehat{EDC} = 60°$.

Par conséquent, $\widehat{ADE} = 90° - 60° = 30°$.

Le triangle ADE est isocèle en A, donc $\widehat{a} = \frac{1}{2}(180° - 30°) = 75°$. →Chapitre 6 p. 149

23 a. et **b.** Le coefficient d'agrandissement est $\frac{27}{18} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

Donc V(grand cône) $= 1{,}5^3 \times V$(petit cône) $= 3{,}375\ V$(petit cône)

$\frac{R}{R'} = \frac{SO}{SO'} = 1{,}5$, donc $R = 1{,}5\,R'$.

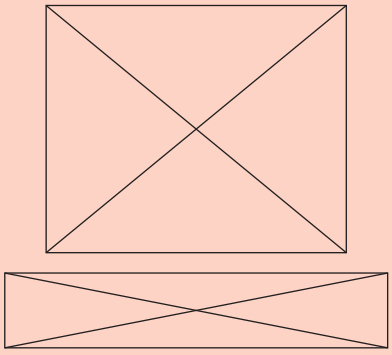
Si on avait $R = R' + 9$, alors on aurait $R' + 9 = 1{,}5\,R'$, soit $8{,}5\,R' = -9$, ce qui est impossible. →Chapitre 11 p. 254

24 a., **b.** et **c.** AB = BC = CD = AB, donc ABCD est un losange. Tout losange est un parallélogramme. Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires, donc (AC) ⊥ (BD). $4^2 + 4^2 = 32$ et $5{,}6^2 = 31{,}36$, donc on ne peut pas appliquer le théorème de Pythagore, $\widehat{DCB}$ n'est pas un angle droit, et ABCD n'est pas un carré. →Chapitre 7 p. 172

25 c. $\sin 30° = \frac{7}{BC}$, donc $BC = \frac{7}{\sin 30°}$.

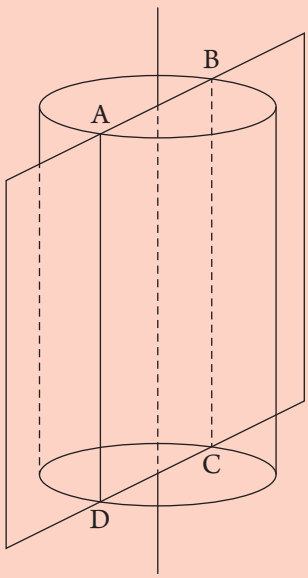
$\tan 30° = \frac{7}{AC}$ donc c. est fausse. →Chapitre 6 p. 149

26 **b.** et **c.** Par exemple, ces deux rectangles ont des diagonales de 4 cm et ne sont pas homothétiques :



De plus, ces deux rectangles n'ont pas la même aire. →Chapitre 7 p. 172

27 **a.** et **c.** La hauteur du rectangle est 10 cm, sa plus grande largeur est 4 cm :



→Chapitre 10 p. 228

28 **b.** Les propositions P2 et P3 sont vraies par définition. →Chapitre 10 p. 228

29 **d.** La formule d est correcte. →Chapitre 18 p. 393

30 **b.** Pour 5, le programme calcule $(6 + 5) \times 3 \times 5 = 11 \times 15$, le lutin dit 165.

Pour le nombre $2 + \frac{7}{10} = 2{,}7$ le programme calcule $(6 + 2{,}7) \times 3 \times 2{,}7 = 8{,}7 \times 8{,}1$, le lutin dit $70 + \frac{47}{100}$.

Si l'on entre le nombre 1, le programme calcule : $7 \times 3 = 21$

La formule du calcul du programme est : $(6 + n) \times 3n$. L'équation $(6 + n) \times 3n = 0$ n'admet que 2 solutions, qui sont -6 et 0. →Chapitre 18 p. 393

PARTIE 1
Nombres et calculs

1 **Les différents types de nombres** **28**
2 **Numération de position** **44**
3 **Nombres et opérations** **68**
4 **Arithmétique** **97**

1 Les différents types de nombres

AUTOÉVALUATION

Pour chaque question, il peut y avoir plusieurs bonnes réponses.

❶ $\frac{5}{7}$ est un nombre :

☐ **a.** entier
☐ **b.** décimal
☐ **c.** rationnel non décimal
☐ **d.** irrationnel

❷ 273 est un nombre :

☐ **a.** décimal
☐ **b.** rationnel
☐ **c.** irrationnel
☐ **d.** réel

❸ Parmi les nombres suivants :

$0{,}33 ; \frac{1}{4} ; 3 ; 3{,}14 ; \frac{22}{7} ; \frac{427}{10} ; -4 ; \frac{40}{10} ; \frac{3}{5} ; \sqrt{2} ; \frac{1}{3} ; \pi ; \frac{117}{125} ; \frac{117}{3} ; \frac{145}{7}$

Il y a :

☐ **a.** 3 nombres décimaux
☐ **b.** 8 nombres décimaux
☐ **c.** 10 nombres décimaux
☐ **d.** 11 nombres décimaux

❹ Voici 5 égalités : $\frac{1}{20} = 0{,}50 ; \frac{1}{5} = 0{,}2 ; \frac{1}{3} = 0{,}333 ; \sqrt{2} = 1{,}414 ; \pi = 3{,}14$.

Parmi ces égalités :

☐ **a.** une seule est vraie
☐ **b.** deux sont vraies
☐ **c.** quatre sont vraies
☐ **d.** cinq sont vraies

❺ Combien y a-t-il de nombres décimaux avec 1 chiffre après la virgule et supérieurs à 2,263 ?

☐ **a.** 9
☐ **b.** 10
☐ **c.** une infinité
☐ **d.** 8

❻ Combien y a-t-il de nombres décimaux compris entre 1,2 et 1,3 ?

☐ **a.** aucun
☐ **b.** 9
☐ **c.** 10
☐ **d.** une infinité

❼ Je suis un nombre entier. Mon nombre de milliers est 45 et mon chiffre des dizaines est 4. Qui suis-je ?

☐ **a.** 4 534
☐ **b.** 45 041
☐ **c.** 4 544
☐ **d.** 454 454

❽ Quelle est la notation scientifique du nombre 475,02 ?

☐ **a.** $0{,}47502 \times 10^{3}$
☐ **b.** $47{,}502 \times 10^{-2}$
☐ **c.** $4{,}7502 \times 10^{2}$
☐ **d.** $47\,502 \times 10^{-2}$

CONSEILS

Certaines questions exigent une bonne connaissance des relations entre les différents ensembles de nombres, ainsi que des propriétés des nombres décimaux.
Tous les éléments correspondants figurent dans le cours.

En vue du concours, les différentes définitions d'un nombre décimal exigent d'être bien connues. Rappelons qu'un nombre décimal n'est pas défini comme un nombre écrit avec une virgule (voir le point 7 du cours).

CORRIGÉS

❶ **c.** Reportez-vous à la définition dans le cours point 3.

❷ **a.**, **b.** et **d.** Reportez-vous aux propriétés dans le cours, notamment la représentation des nombres sur un diagramme de Venn. Ainsi, tout nombre entier est aussi décimal, rationnel et réel.

❸ **c.** $\frac{22}{7}$; $\sqrt{2}$; $\frac{1}{3}$; π et $\frac{145}{7}$ ne sont pas décimaux.

Le dénominateur des trois fractions n'est pas le produit d'une puissance de 2 par une puissance de 5, donc le nombre est rationnel non décimal. $\sqrt{2}$ et π sont irrationnels, on ne peut pas les écrire sous la forme d'une fraction à termes entiers.

❹ **a.** Les trois dernières égalités sont fausses car il s'agit de valeurs approchées des nombres. Et la première est fausse aussi.

❺ **c.** Par exemple : 2,3 ; 2,4 ; ... ; 3,2 ; 15,1 ; ...

❻ **d.** Entre deux nombres décimaux, on peut toujours placer une infinité de nombres décimaux.

❼ **b.**

❽ **c.**

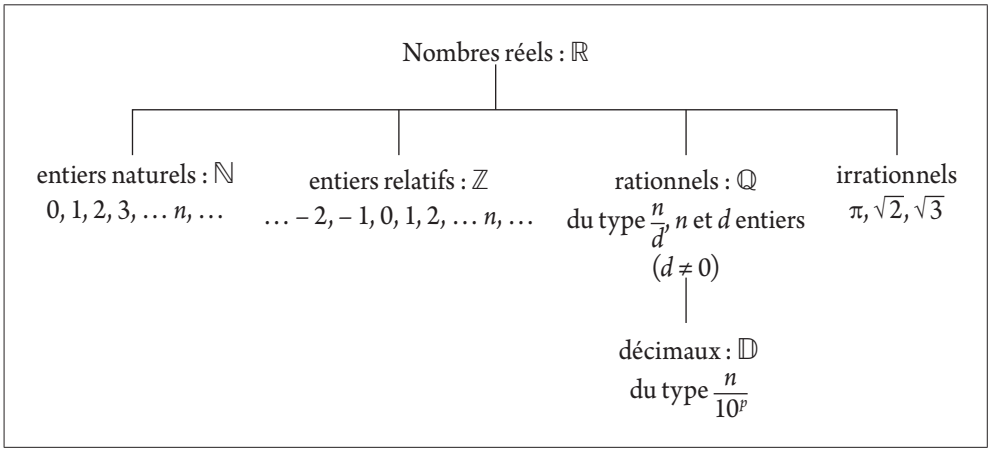
COURS

Compétence à maitriser pour le concours :
- **Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes** (nombres entiers, relatifs, décimaux et rationnels positifs et négatifs, irrationnels…).

Parmi les nombres et ensembles de nombres, quatre sont fondamentaux :
- les nombres **entiers naturels**, dont l'ensemble est noté **N** ou $\mathbb{N}$;
- les nombres **entiers relatifs,** dont l'ensemble est noté **Z** ou $\mathbb{Z}$;
- les nombres **rationnels**, dont l'ensemble est noté **Q** ou $\mathbb{Q}$ (et parmi ceux-ci, les nombres **décimaux,** dont l'ensemble est noté **D** ou $\mathbb{D}$, qui sont donc des nombres rationnels particuliers) ;
- les nombres **irrationnels**, dont l'ensemble n'a pas de notation particulière.

Tous ces nombres forment une grande « famille » appelée famille ou ensemble des nombres **réels**, noté **R** ou $\mathbb{R}$.

Famille des nombres réels



1 Nombres entiers naturels

A. Définition ordinale (liée à l'ordre)

L'ensemble des nombres entiers naturels se construit par les axiomes de G. Peano :
- 0 est un nombre entier naturel.
- Tout entier naturel a un successeur.
- 0 n'est le successeur d'aucun entier naturel.
- Deux nombres entiers naturels qui ont le même successeur sont égaux.
- Si une partie de $\mathbb{N}$ contient 0 ainsi que le successeur de chacun de ses éléments, alors cette partie est égale à $\mathbb{N}$.

B. Définition cardinale (liée à la quantité)

Pour B. Russell, un nombre entier est le nombre d'éléments d'une collection d'objets non fractionnables.

EXEMPLES

- 0, 1, 2, 3, … 47, … 158 … sont des nombres entiers naturels.
- Si l'on considère le nombre entier 3, on dit « le troisième » dans la définition de Peano, et « trois » dans la définition de Russel.

Pour désigner un nombre entier quelconque, on utilise généralement la lettre n.
L'entier qui précède n (pour n différent de 0) est $n - 1$, et le successeur du nombre n est le nombre $n + 1$.

2 Nombres entiers relatifs

Il suffit de savoir qu'un nombre entier relatif est un nombre entier dont l'écriture est précédée du signe « – » et le nombre est appelé **nombre négatif** ou du signe « + » et le nombre est appelé **nombre positif**.

EXEMPLES

- 6 ; + 15 ; + 568 ; – 219 sont des nombres entiers relatifs.
- Le signe « – » a un aspect concret : – 5 peut par exemple signifier « 5 degrés au-dessous de 0 » ou « 5 à gauche de 0 sur un axe horizontal ».
- Le signe « – » signifie aussi « opposé de ». Par exemple, – 5 est l'opposé du nombre 5.
- En tenant compte de la remarque précédente, $-n$ signifie « opposé de n », et ainsi $-n$ peut être un nombre positif. Ainsi, si $n = -5$, alors $-n = 5$ qui est un nombre positif.

◗ **Propriété** : Tout nombre entier naturel est un nombre entier relatif. Ainsi, si a est un nombre entier naturel, on peut écrire $a = +a$.

EXEMPLE

On peut écrire + 4 ou 4 ; + 68 ou 68…

3 Nombres rationnels

Un nombre rationnel est un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une **fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers** (cet entier étant non nul pour le dénominateur).

EXEMPLES

$\frac{3}{4}$, $\frac{47}{3}$ et $\frac{3\,658}{44\,259}$ sont des nombres rationnels.

◗ **Propriété** : Tout nombre entier est un nombre rationnel : ainsi, si a est un nombre entier, on peut écrire $a = \frac{a}{1}$.

EXEMPLE

$5 = \frac{5}{1}$

Parmi les nombres rationnels, on distingue certains nombres appelés **nombres décimaux**.

4 Nombres décimaux

A. Définition

- Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'**une fraction à termes entiers dont le dénominateur est une puissance de 10**.
- Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible à termes entiers dont **le dénominateur est le produit d'une puissance de 2 par une puissance de 5**.

Les deux définitions précédentes sont équivalentes, et par conséquent, un nombre est décimal, si et seulement si, il peut s'écrire sous l'une des formes suivantes :

$$\frac{a}{10^n} \text{ ou } \frac{a}{5^p} \text{ ou } \frac{a}{2^k} \text{ ou } \frac{a}{2^k \times 5^p}.$$

EXEMPLES

- $\frac{7}{10}, \frac{2\,847}{100}, \frac{31}{1\,000\,000}$ sont des nombres décimaux, leur dénominateur est une puissance de 10. ($10 = 10^1$, $100 = 10^2$ et $1\,000\,000 = 10^6$). Ces trois fractions sont irréductibles.
- $\frac{21}{75}$ est un nombre décimal. *A priori*, comme $75 = 3 \times 5^2$, on pourrait penser que le nombre est rationnel non décimal par la présence du facteur 3, mais on peut simplifier l'écriture de la fraction, on obtient : $\frac{21}{75} = \frac{7}{25}$, et $25 = 5^2$ est une puissance de 5.

B. Propriété

Tout nombre entier est un nombre décimal, ainsi si a est un nombre entier, on peut écrire : $a = \frac{10a}{10}$, par exemple $9 = \frac{90}{10}$.

APPLICATION 1

Démontrer que les nombres suivants sont décimaux.

$A = \frac{7}{64}$ $B = \frac{21}{625}$ $C = \frac{27}{250}$ $D = \frac{39}{6}$ $E = \frac{35}{7}$.

→Corrigé p. 37

APPLICATION 2

Donner deux nombres décimaux pouvant s'intercaler entre 1,102 et 1,103.

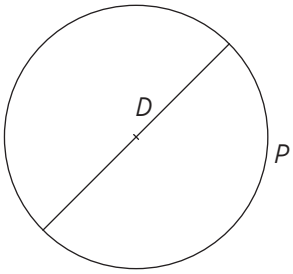
→Corrigé p. 37

5 Nombres irrationnels

Un nombre irrationnel est un nombre qui n'est pas rationnel, et que l'on ne peut donc pas écrire sous la forme d'une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers.
Il n'y a pas de notation pour l'ensemble des nombres irrationnels.

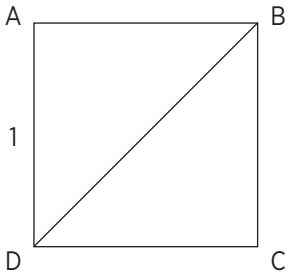
EXEMPLES

• π est un nombre irrationnel. Sa première définition est d'être le rapport entre le périmètre P d'un cercle et son diamètre : $\pi = \frac{P}{D}$ ou encore $\pi = \frac{P}{2R}$. (Attention, avec cette écriture, $\frac{P}{2R}$ est une fraction mais dont les deux termes ne peuvent être simultanément entiers.)



$\pi = \frac{P}{D}$

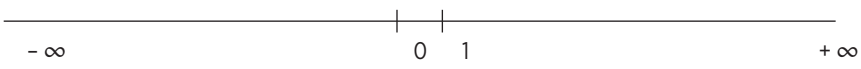
• $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Ce nombre est défini comme la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1.



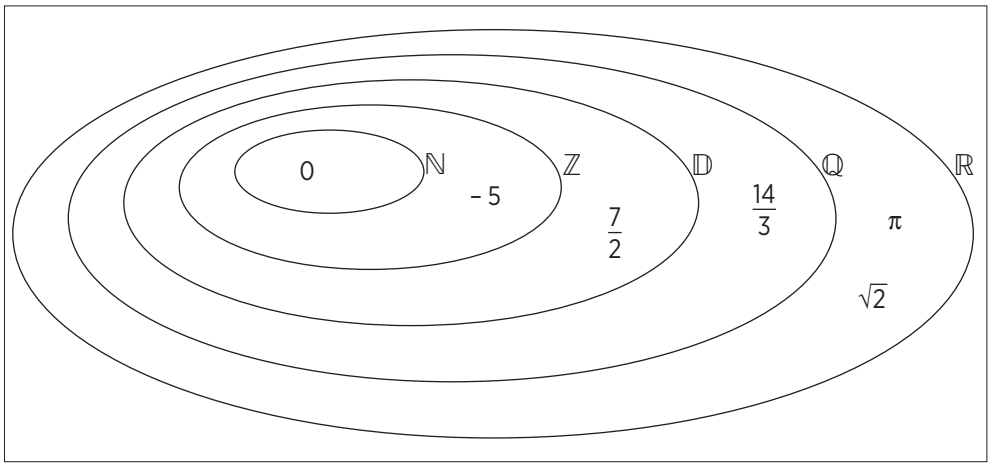
Si AB = 1, alors BD = $\sqrt{2}$.

6 Représentations des ensembles de nombres

Représentation 1 : Droite numérique



Représentation 2 : Diagramme de Venn



7 Une autre écriture des nombres

Il existe une autre façon d'écrire les différents types de nombres précédents : l'écriture utilisant un nombre écrit à l'aide d'une virgule.

Écriture des différentes familles de nombres

Nombres rationnels

Nombres rationnels non décimaux	**Nombres rationnels décimaux**
La partie décimale possède une infinité périodique de chiffres décimaux.	La partie décimale possède un nombre fini de chiffres décimaux.
13,542542542… 458,0235353535…	17,896 0,3521745

Nombres irrationnels

La partie décimale possède une infinité non périodique de chiffres décimaux.

0,12345678910111213…
31,010010001000010000001…

ZOOM

Infinité périodique signifie qu'il y a répétition infinie d'une série de chiffres. Ainsi, dans le nombre 13,542542542... la suite « 542 » se répète indéfiniment, et dans le nombre 458,0235353535..., la suite « 35 » se répète indéfiniment.

EXEMPLES

- $\frac{7}{25}$ est un nombre (rationnel) décimal que l'on peut écrire sous la forme 0,28.
- $\frac{7}{3}$ est un nombre rationnel non décimal que l'on peut écrire sous la forme 2,333333…
- $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, dont une valeur approchée est 1,4142135623. (Il est impossible de connaitre la valeur exacte de $\sqrt{2}$, et, plus généralement, il est impossible de connaitre la valeur exacte d'un nombre irrationnel. En revanche, il est théoriquement possible de « s'approcher » aussi près que l'on veut d'un nombre irrationnel à l'aide d'un nombre décimal.)

APPLICATION 3

Pourquoi l'écriture à l'aide d'une virgule d'un nombre rationnel non décimal comporte-t-elle une infinité périodique de chiffres ?

→Corrigé p. 37

ZOOM

Par ce qui précède, on comprend qu'un nombre décimal ne se définit pas simplement comme un « nombre écrit avec une virgule ». Ainsi, 5 n'est pas écrit à l'aide d'une virgule, or 5 est décimal (5 = 5,0). De même, 0,538461538461... est écrit à l'aide d'une virgule et, pourtant, ce n'est pas un nombre décimal.

La virgule dans l'écriture d'un nombre marque la place de l'unité.

Ainsi, dans le nombre 17,965 le chiffre des unités est 7. Ce qui permet alors de donner du sens à chacun des autres chiffres.

ZOOM

Il ne faut surtout pas dire que la virgule sépare la partie entière de la partie décimale : d'une part, parce que cela ne correspond pas du tout à la fonction de cette virgule, et, d'autre part, cela renforce la fausse idée des élèves qu'un nombre décimal consiste en deux nombres entiers séparés par une virgule.

APPLICATION 4

Tout nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'un nombre écrit à l'aide d'une virgule. Le problème qui se pose est de retrouver les deux termes de la fraction définissant ce nombre lorsque l'on connait uniquement son écriture à l'aide d'une virgule.
Résoudre ce problème pour les nombres suivants.

1. 52,44444444...
2. 2,548548548...
3. 13,52714141414...

→Corrigé p. 37

Il existe un **cas particulier important**. Les nombres écrits sous la forme a,99999999…, a nombre entier naturel, sont égaux à $a + 1$.

En effet :

Soit $n = a{,}99999999\ldots$

Donc $n = a + 0{,}99999999\ldots$

Alors $10n = 10a + 9{,}99999999\ldots$

Par conséquent $10n - n = 10a + 9{,}99999999\ldots - a - 0{,}99999999\ldots$

Soit $9n = 9a + 9 = 9(a + 1)$ et donc $n = a + 1$.

APPLICATION 5

Tout nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'un nombre écrit à l'aide d'une virgule. Le problème qui se pose est de retrouver les deux termes de la fraction définissant ce nombre lorsque l'on connait uniquement son écriture à l'aide d'une virgule.
Résoudre ce problème pour les nombres suivants.

1. Démontrer que 3,99999... est égal à 4.
2. Démontrer que 52,4799999... est égal à 52,48.

→Corrigé p. 37

8 Écriture scientifique d'un nombre

L'écriture scientifique (ou notation scientifique) d'un nombre est l'écriture de ce nombre sous la forme $a \times 10^n$, avec $1 \leqslant a < 10$ et n entier relatif. On rappelle que pour n entier positif, 10^n est un 1 suivi de n zéros et pour n entier négatif, 10^n est un 1 précédé de n zéros.

EXEMPLES

$10^7 = 10\,000\,000$ $\qquad$ $10^{-4} = 0{,}0001$

$195\,698 = 1{,}95698 \times 10^5$ $\qquad$ $0{,}000087 = 8{,}7 \times 10^{-5}$

APPLICATION 6

1. Écrire les nombres suivants en notation scientifique :

15 800 $\qquad$ 333,33
0,000000852 $\qquad$ 17,98
25 608 970 $\qquad$ 10,752
0,00025

2. Donner l'écriture décimale de chacun des nombres suivants :

$4{,}2 \times 10^8$ $\qquad$ $6{,}58 \times 10^{-5}$
$8{,}956\,847 \times 10^4$ $\qquad$ $1{,}002506 \times 10^{-4}$

→Corrigé p. 38

APPLICATION 7

Calculer et exprimer le résultat en écriture décimale, puis en notation scientifique :

$A = 13 \times 10^7 \times 5 \times 10^5$ $\qquad$ $C = \dfrac{4{,}2 \times 10^5}{12 \times 10^3}$

$B = 4{,}51 \times 10^3 \times 2{,}4 \times 10^5 \times 1{,}2 \times 10^{-4}$ $\qquad$ $D = \dfrac{14{,}02 \times 10^{-4}}{701 \times 10^{-3}}$

→Corrigé p. 38

CORRIGÉS

APPLICATION 1

64 = 2^6 donc A est décimal, d'après la définition cardinale.
625 = 5^4 donc B est décimal, d'après la définition cardinale.
250 = 2×5^3 donc C est décimal, d'après la définition cardinale.
$\frac{39}{6} = \frac{13}{2}$ donc D est décimal, d'après la définition cardinale.
$\frac{35}{7} = 5$ donc E est décimal, car tout nombre entier est décimal.

APPLICATION 2

1,1024 et 1,1026 conviennent, par exemple.

APPLICATION 3

Soit un nombre rationnel non décimal $\frac{a}{b}$. Dans la division euclidienne de a par b, le reste r est strictement inférieur au diviseur b. Ce reste ne peut donc prendre qu'un nombre fini de valeurs, à savoir $b - 1$ valeurs (les nombres entiers de 1 à $b - 1$). Ce qui fait que nécessairement, au bout de $b - 1$ calculs au plus, on retrouve un des restes déjà obtenus, ce qui définit la période.

Exemples :

En posant les divisions correspondantes, on peut vérifier que l'on a :

$\frac{17}{7}$ = 2,428571428571... (période à 6 chiffres) ; $\frac{17}{11}$ = 1,5454... (période à 2 chiffres)

APPLICATION 4

❶ Soit n = 52,44444444... Alors $10n$ = 524,44444444...
$10n - n = 472$, soit $9n = 472$ et donc $n = \frac{472}{9}$.

❷ Soit n = 2,548548548... Alors $1\,000n$ = 2 548,548548548...
$1\,000n - n = 2\,546$, soit $999n = 2\,546$ et $n = \frac{2\,546}{999}$.

❸ Soit n = 13,52714141414... Alors $100n$ = 1 352,714141414...
$100n - n = 1\,339{,}187$, soit $99n = 1\,339{,}187$ et $n = \frac{1\,339{,}187}{99} = \frac{1\,339\,187}{99\,000}$.

APPLICATION 5

❶ Soit n = 3,99999... Alors $10n$ = 39,99999...
$10n - n = 36$, soit $9n = 36$ et donc $n = 4$.

❷ Soit n = 52,4799999... Alors $100n$ = 5 247,99999...
$100n - n = 5\,195{,}52$, soit $99n = 5\,195{,}52$ et donc $n = \frac{5\,195{,}52}{99} = 52{,}48$.

APPLICATION 6

❶ $15\,800 = 1{,}58 \times 10^{4}$
$0{,}000000852 = 8{,}52 \times 10^{-7}$
$25\,608\,970 = 2{,}560\,897 \times 10^{7}$
$0{,}00025 = 2{,}5 \times 10^{-4}$
$333{,}33 = 3{,}3333 \times 10^{2}$
$17{,}98 = 1{,}798 \times 10^{1}$
$10{,}752 = 1{,}0752 \times 10^{1}$

❷ $4{,}2 \times 10^{8} = 420\,000\,000$
$8{,}956\,847 \times 10^{4} = 89\,568{,}47$
$6{,}58 \times 10^{-5} = 0{,}000\,065\,8$
$1{,}002506 \times 10^{-4} = 0{,}000\,100\,250\,6$

APPLICATION 7

Rappel : Pour tout entier relatif a, pour tout entier relatif b : $10^{a} \times 10^{b} = 10^{a+b}$

On obtient :

Nombre	Calcul	Écriture décimale	Notation scientifique
A	65×10^{12}	65 000 000 000 000	$6{,}5 \times 10^{13}$
B	$12{,}9888 \times 10^{4}$	129 888	$1{,}29888 \times 10^{5}$
C	$0{,}35 \times 10^{2}$	35	$3{,}5 \times 10^{1}$
D	$0{,}02 \times 10^{-1}$	0,002	2×10^{-3}

ENTRAINEMENT

EXERCICE 1

10 min.

Écrire un entier à la place du carré pour que l'écriture fractionnaire désigne :

Un entier naturel	Un décimal non entier	Un rationnel non décimal
$\frac{\blacksquare}{115}$	$\frac{\blacksquare}{115}$	$\frac{\blacksquare}{115}$
$\frac{115}{\blacksquare}$	$\frac{115}{\blacksquare}$	$\frac{115}{\blacksquare}$

EXERCICE 2

10 min.

1. Trouver un nombre décimal compris entre 3,0001 et 3,01.
2. Trouver un nombre non décimal compris entre 3,0001 et 3,01.
3. Trouver une fraction qui s'intercale entre $\frac{18}{31}$ et $\frac{19}{31}$.
4. Trouver une fraction qui s'intercale entre $\frac{5}{7}$ et $\frac{17}{11}$.

EXERCICE 3

25 min.

1. Parmi les 4 fractions suivantes, quelles sont celles qui représentent un nombre décimal ?

$$\frac{54}{1\,350} \ ; \ \frac{5}{100} \ ; \ \frac{17}{1\,024} \ ; \ \frac{50}{1\,275}$$

2. Quels sont tous les nombres entiers naturels n pour lesquels la fraction $\frac{n}{1\,050}$ représente :
a. un nombre entier ? Justifier la réponse.
b. un nombre décimal ? Justifier la réponse.
c. un nombre rationnel non décimal ? Justifier la réponse.

3. Montrer que l'on peut donner, sans calcul, l'écriture à virgule du nombre $\frac{41}{333}$ à partir de l'égalité : $41 = 333 \times 0{,}123 + 0{,}041$.

4. Les nombres représentés par les fractions $\frac{171}{13\,888\,750}$ et $\frac{41}{3\,330\,000}$ sont-ils égaux ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4

25 min.

Simplifier : $\frac{42}{78}$; $\frac{204}{136}$; $\frac{4\,095}{3\,465}$; $\frac{4\,716}{35\,370}$.

EXERCICE 5 — 10 min.

On considère les deux nombres $\frac{29}{55}$ et $\frac{39}{75}$.

1. Sont-ils des nombres décimaux ?

Pour chacune des questions suivantes, on n'utilisera pas l'écriture à l'aide d'une virgule de chacun de ces deux nombres.

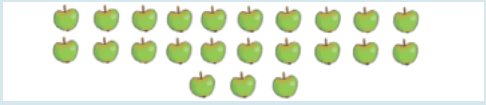
2. Comparer ces deux nombres.
3. Trouver un nombre décimal strictement compris entre ces deux nombres.
4. Trouver une fraction qui ne soit pas un nombre décimal, strictement comprise entre ces deux nombres.

VERS L'ORAL

EXERCICE 6

À partir de la page de manuel suivante, répondre aux questions ci-après.

1 Entoure par 10, puis complète.



Il y a ..... paquets de 10 pommes

et ..... pommes isolées.

..... + ... + ...

Cela fait ..... pommes en tout.

1. À quel cycle d'apprentissage pourrait-on proposer cette situation ?
2. Quel est l'objectif d'apprentissage ?
3. Quelle est la compétence visée ?
4. Quel est le prérequis à cette activité ?
5. Quel est l'attendu de fin de cycle qui correspond à cette situation d'apprentissage ?
6. Quelles seraient les stratégies possibles de résolution de ce problème ?
7. Quelle leçon peut être construite à partir de ce support ?
8. Quelle(s) remédiation(s) pourrait-on proposer à un élève qui aurait des difficultés à résoudre ce type de situation mathématique ?

CORRIGÉS

EXERCICE 1

Il faut penser à décomposer 115 en produits de facteurs premiers : $115 = 5 \times 23$.
Une solution possible est :

Un entier naturel	Un décimal non entier	Un rationnel non décimal
$\frac{115}{115}$	$\frac{23}{115}$	$\frac{5}{115}$
$\frac{115}{23}$	$\frac{115}{10}$	$\frac{115}{7}$

EXERCICE 2

❶ La question peut s'écrire : « Trouver un nombre décimal compris entre 3,0001 et 3,0100. »
Ainsi, 3,0025 est une solution au problème.

❷ D'après ce qui précède, 3,00258888... convient.

❸ $\frac{18}{31} = \frac{180}{310}$ et $\frac{19}{31} = \frac{190}{310}$, donc une fraction qui s'intercale entre $\frac{18}{31}$ et $\frac{19}{31}$ peut être $\frac{181}{310}$.

❹ $\frac{5}{7} = \frac{55}{77}$ et $\frac{17}{11} = \frac{119}{77}$, donc une fraction qui s'intercale entre $\frac{5}{7}$ et $\frac{17}{11}$ peut être $\frac{59}{77}$.

EXERCICE 3

❶ $\frac{54}{1\,350} = \frac{1}{25} = \frac{1}{5^2}$, donc ce nombre est décimal.

$\frac{5}{100} = \frac{5}{10^2}$ est décimal.

$\frac{17}{1\,024} = \frac{17}{2^{10}}$, donc ce nombre est décimal.

$\frac{50}{1\,275} = \frac{2}{3 \times 17}$, donc ce nombre n'est pas décimal.

CONSEIL
Utiliser les définitions de la partie disciplinaire du cours.

❷ **a.** $\frac{n}{1\,050}$ est un nombre entier si et seulement si n est multiple de 1 050, c'est-à-dire si et seulement si l'on peut écrire $n = 1\,050k$, avec $k \in \mathbb{N}$.
En effet, on a alors $\frac{n}{1\,050} = \frac{1\,050k}{1\,050} = k$.

b. $1\,050 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7$
Donc, $\frac{n}{1\,050}$ est décimal si et seulement si on peut simplifier cette fraction par 3 et 7, c'est-à-dire si et seulement si n est multiple de 21.

c. D'après ce qui précède, $\frac{n}{1\,050}$ est rationnel non décimal si et seulement si on ne peut pas simplifier cette fraction par 3 ou 7, donc si et seulement si n n'est pas multiple de 3 ou de 7.

❸ $41 = 333 \times 0{,}123 + 0{,}041$, donc $\frac{41}{333} = \frac{333 \times 0{,}123}{333} + \frac{0{,}041}{333}$, donc $\frac{41}{333} = 0{,}123 + \frac{0{,}041}{333}$.
On a alors $0{,}041 = 333 \times 0{,}000123 + 0{,}000\,041$, et on continue en substituant cette écriture de 0,041 dans $\frac{41}{333} = 0{,}123 + \frac{0{,}041}{333}$, ce qui donne $\frac{41}{333} = 0{,}123\,123 + \frac{0{,}000041}{333}$ et ainsi de suite.
On a alors $\frac{41}{333} = 0{,}123123123....$

❹ Si $\frac{171}{13\,888\,750} = \frac{41}{3\,330\,000}$ alors leurs produits en croix sont égaux.
Or $41 \times 13\,888\,750 = 569\,438\,750$ et $171 \times 3\,330\,000 = 569\,430\,000$
et donc les deux nombres proposés sont différents.

EXERCICE 4

Pour simplifier les fractions proposées, il n'est pas nécessaire de décomposer chacun de leurs termes en produit de facteurs premiers. Il suffit de trouver des facteurs communs, premiers ou non.

$\frac{42}{78} = \frac{6 \times 7}{6 \times 13} = \frac{7}{13}$

$\frac{204}{136} = \frac{3 \times 4 \times 17}{2 \times 4 \times 17} = \frac{3}{2}$

$\frac{4\,095}{3\,465} = \frac{5 \times 7 \times 9 \times 13}{5 \times 7 \times 9 \times 11} = \frac{13}{11}$

$\frac{4\,716}{35\,370} = \frac{2 \times 2 \times 9 \times 131}{2 \times 3 \times 5 \times 9 \times 131} = \frac{2}{15}$

EXERCICE 5

❶ $\frac{29}{55} = \frac{29}{5 \times 11}$ n'est pas un nombre décimal, puisque écrit sous la forme d'une fraction irréductible dont le dénominateur contient le facteur 11.
$\frac{39}{75} = \frac{13}{25} = \frac{13}{5^2}$ est un nombre décimal, puisque s'écrit sous la forme d'une fraction irréductible dont le dénominateur est une puissance de 5.

❷ $55 = 5 \times 11$ et $25 = 5^2$, donc le dénominateur commun aux deux fractions est $5^2 \times 11 = 275$
$\frac{29}{55} = \frac{29 \times 5}{55 \times 5} = \frac{145}{275}$ et $\frac{39}{75} = \frac{13}{25} = \frac{13 \times 11}{25 \times 11} = \frac{143}{275}$
On en conclut que $\frac{29}{55} > \frac{39}{75}$.

❸ $\frac{29}{55} = \frac{1\,450}{2\,750}$ et $\frac{39}{75} = \frac{143}{275} = \frac{1\,430}{2\,750}$
Puisque $2\,750 = 11 \times 250$, et que $1\,430 = 11 \times 130$, il faut faire apparaitre un multiple de 11 au dénominateur qui ne soit pas égal à 1 430, on choisit $1\,430 + 11 = 1\,441$.
Un nombre décimal compris entre les deux nombres est donc par exemple $\frac{1\,441}{2\,750}$.

❹ Un nombre rationnel non décimal compris entre les deux fractions est, par exemple, $\frac{144}{275}$.

CRPE 2022

MATHS

Le manuel complet pour réussir l'écrit

- Tous les **savoirs disciplinaires** au programme du cycle 4 et de la partie « Nombres et calculs » du programme de seconde
- **150 questions d'autoévaluation**
- La **méthodologie** de l'épreuve de mathématiques assortie de **conseils de formateurs**
- **300 exercices** corrigés et commentés pour être prêt le jour J
- **2 sujets** corrigés, dont le **sujet zéro officiel**

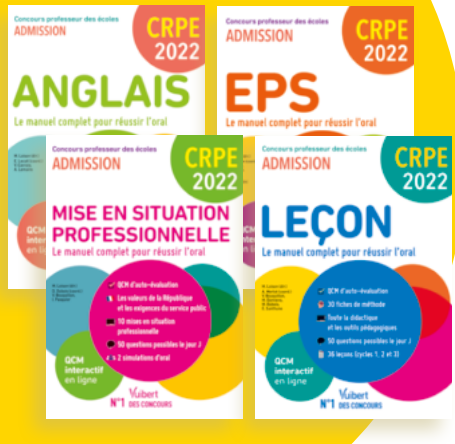
OFFERT
150 QCM interactifs

Dans la même collection

Admissibilité



Admission



Vuibert
N°1 DES CONCOURS

ISBN : 978-2-311-21075-0

9 782311 210750