

LA BIBLE DU BACS

Ont contribué à la réalisation de cet ouvrage :

Wendy Benoît (anglais)

Éric Fourcassier (philosophie)

Alain Larroche et Jean-Marc Ravier
(mathématiques)

Didier Giorgini et Cédric Oline (histoire-géographie)

Élisabeth Le Prettre et Marie Girardot
(physique-chimie)

Marie-Noël Morin-Ganet, Manon Corbin
et Hélène Schneider (SVT)

ISBN : 9782820805164

© rue des écoles, 2015.

Achevé d'imprimer en France par Dupli-Print, en décembre 2015.

Dépôt légal : décembre 2015.

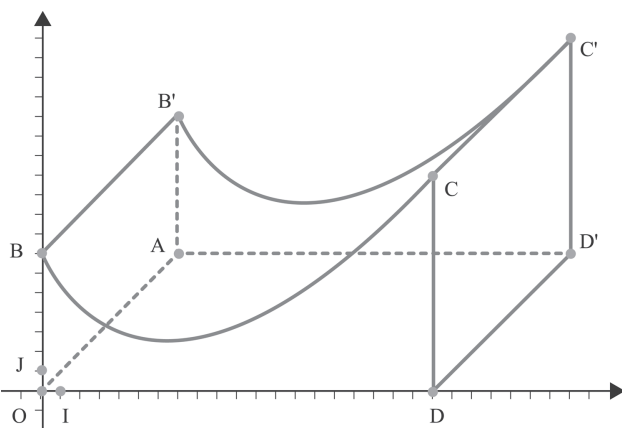


Mathématiques

Sujet national, juin 2015, exercice 5

Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.

Le dessin ci-dessous en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères $OAD'D$, $DD'C'C$ et $OAB'B$ sont des rectangles.



Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, $DD' = 10$, sa longueur OD est de 20 mètres.

Le but du problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.

Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 20]$ par : $f(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - 3x + 7$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f et C la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O, I, J) .

Partie 1

1. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; 20]$, on a $f'(x) = \ln(x + 1) - 2$.

▮ Appliquez la formule de la dérivée d'un produit.

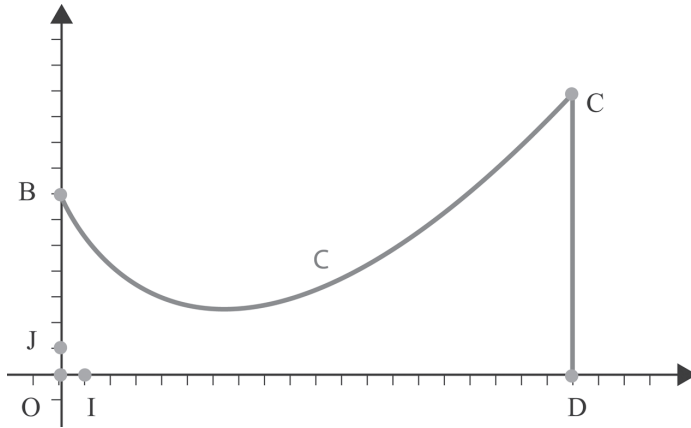
2. En déduire les variations de f sur l'intervalle $[0 ; 20]$ et dresser son tableau de variation.

▮ Étudiez le signe de la dérivée et dresser le tableau de variation.

3. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.

- Établissez le lien entre coefficient directeur et nombre dérivé.



4. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; 20]$ par $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$ a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle $[0 ; 20]$ par $g'(x) = (x+1) \ln(x+1)$.
Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 20]$.

- Déterminez d'abord une primitive de $(x+1) \ln(x+1)$.

Partie 2

Les trois questions de cette partie sont indépendantes.

1. Les propositions suivantes sont-elles exactes ? Justifier les réponses.

P1 : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres.

P2 : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C.

- Lisez et interprétez le graphique. Utilisez la définition de l'inclinaison et les résultats antérieurs.

2. On souhaite recouvrir les quatre faces latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m^2 par litre.

Déterminer, à 1 litre près, le nombre minimum de litres de peinture nécessaires.

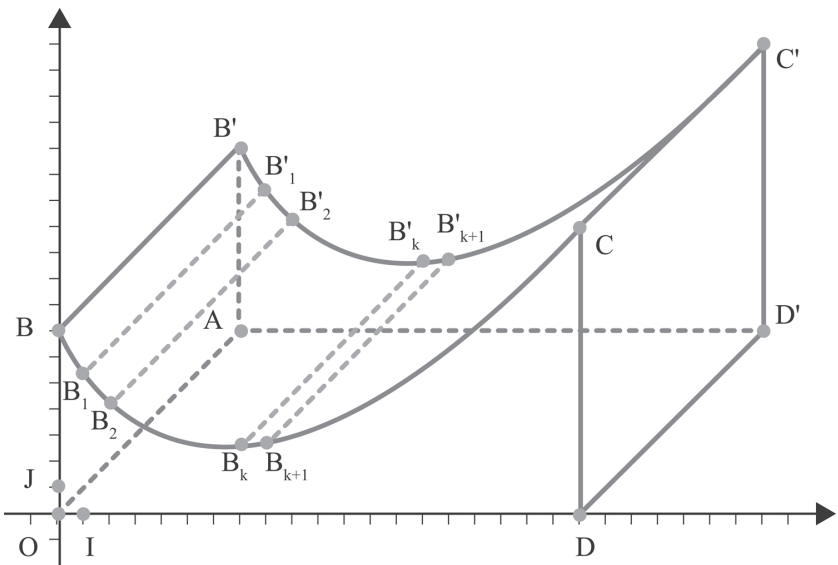
- Utilisez le lien entre aire et intégrale.

3. On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.

Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $B_k(k, f(k))$ pour k variant de 0 à 20.

Ainsi, $B_0 = B$.

On décide d'approcher l'arc de la courbe C allant de B_k à B_{k+1} par le segment $[B_k B_{k+1}]$. Ainsi, l'aire de la surface à peindre sera approchée par la somme des aires des rectangles du type $B_k B_{k+1} B'_{k+1} B'_k$ (voir figure).



a. Montrer que pour tout entier k variant de 0 à 19,

$$B_k B_{k+1} = \sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}$$

Utilisez la formule donnant la longueur d'un segment en fonction des coordonnées des points extrémités du segment.

b. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche une estimation de l'aire de la partie roulante.

Variables	S: réel K: entier
Fonction	f : définie par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x+7$
Traitement	S prend pour valeur 0 Pour K variant de à S prend pour valeur Fin Pour
Sortie	Afficher

Lisez attentivement l'énoncé du 3. pour interpréter les données et les insérer dans le programme.

Partie 1

1. f est dérivable sur $[0; 20]$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur $[0; 20]$.

En utilisant la formule de la dérivée du produit de deux fonctions, on en déduit que $f'(x) = 1 \times \ln(x+1) + (x+1) \frac{1}{x+1} - 3 = \ln(x+1) + 1 - 3$ et finalement $f'(x) = \ln(x+1) - 2$.

$f'(x) > 0$ si et seulement si $\ln(x+1) > 2$, soit $x > e^2 - 1$.

2. On en déduit le tableau de variation de f :

x	0	$e^2 - 1$	20
$f'(x)$	-	0	+
f	7	$f(e^2 - 1)$	$f(20)$

3. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe en 0 est le nombre dérivé en 0, or $f'(0) = 1 \ln(1) - 2 = -2$ donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe en 0 est égal à -2.

4. g est donc une primitive de la fonction qui à x associe $(x+1) \ln(x+1)$.

Une primitive F de f est donc définie par :

$$F(x) = g(x) - \frac{3x^2}{2} + 7x = \frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3x^2}{2} + 7x.$$

$$F(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \frac{7x^2}{4} + \frac{13}{2}x.$$

Partie 2

1. La différence entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est, d'après les résultats établis dans la partie 1 :

$f(20) - f(e^2 - 1) \approx 10,9 - 2,6 \approx 8,3 > 8$ donc P_1 est une proposition exacte.

L'inclinaison en B est égale à $|f'(0)| = 2$ et celle en 20 est

$f'(20) = \ln(21) - 2 \approx 1,04$, donc P_2 est également une proposition exacte.

2. f étant continue, pour calculer l'aire A_1 de la face avant on va donc calculer l'intégrale de $f(x)$ entre 0 et 20, ce qui donne, en unités d'aire (notées UA) :

$$A_1 = \int_0^{20} f(x) dx = F(20) - F(0).$$

$$\text{Or, } F(20) = \frac{21^2 \ln 21}{2} - 700 + 130 = \frac{441 \ln 21}{2} - 570 \approx 101 \text{ et } F(0) = 0.$$

D'où, finalement, $A_1 \approx 101$ UA.

L'aire latérale gauche, que nous notons A_2 , correspond à celle d'un rectangle de longueur 10 et de largeur 7, donc $A_2 = 70$ UA.

L'aire latérale droite, que nous notons A_3 , correspond à celle d'un rectangle de longueur $f(20)$ et de largeur 10, donc $A_3 = 10f(20) \approx 109$ UA.

L'aire à peindre en rouge que nous notons A est donc

$$A = 2A_1 + A_2 + A_3 \approx 381 \text{ UA.}$$

Le nombre de litres de peinture à prévoir est donc d'environ 77.

$$\mathbf{3. a.} \quad B_k B_{k+1} = \sqrt{1^2 + (f(k+1) - f(k))^2} = \sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}.$$

b. La partie de l'algorithme à compléter est :

S prend la valeur 0.

Pour K allant de 0 à 19

$$S \text{ prend la valeur } S + 10\sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}$$