



Probabilités et statistique

▷ Statistique

Soit X une série statistique.

La variance de X est le nombre :

$$V(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i x_i^2 - \bar{X}^2.$$

L'écart type de X est la racine carrée de la variance : $s(X) = \sqrt{V(X)}$.

Le premier quartile de X , noté Q_1 , est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25 % des données soient inférieures ou égales à Q_1 .

Le troisième quartile de X , noté Q_3 , est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75 % des données soient inférieures ou égales à Q_3 .

L'intervalle interquartile est l'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$.

▷ Probabilités et dénombrement

Définir une probabilité, c'est associer, à chacun des résultats x_i de l'expérience aléatoire, un nombre p_i positif tel que la somme des p_i soit égale à 1.

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A quelconque est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de résultats réalisant } A}{\text{nombre de résultats possibles}}.$$

Soit une urne contenant n jetons numérotés dont on extrait p jetons :

– si l'on remet le jeton tiré après chaque tirage, le nombre de résultats possibles est : $n \times n \times \dots \times n = n^p$;

– si l'on conserve le jeton après chaque tirage, le nombre de résultats possibles est :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

▷ Probabilités conditionnelles

Soit A et B deux événements de probabilités non nulles. La probabilité de l'événement A , sachant que l'événement B est réalisé, est appelée probabilité conditionnelle. Elle est définie par :

$$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}.$$

Les événements A et B sont indépendants lorsque la réalisation de l'un de ces événements n'influe pas sur la probabilité de l'autre. A et B sont donc indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) P(B).$$

À partir d'une partition, on peut utiliser la formule des probabilités totales.

▷ Variables aléatoires

Une variable aléatoire X est une application qui, à chaque événement élémentaire de l'univers, associe un nombre réel.

Définir une loi de probabilité de X , c'est associer à chaque résultat x_i un nombre p_i positif tel que la somme des p_i soit égale à 1.

L'espérance de X est : $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$.

La variance de X est : $V(X) = \sum_{i=1}^p (x_i - E(X))^2 p_i$

L'écart type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Une expérience qui ne comporte que deux résultats, appelés succès et échec, est appelée épreuve de Bernoulli.

Lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, on s'intéresse au nombre de succès. La loi de probabilité sur cet ensemble est nommée loi binomiale de paramètres n et p , où p est la probabilité de succès.

Analyse : opérations, limites, dérivation

▷ Opérations sur les fonctions

$f + g$ est la fonction qui, à x , associe $f(x) + g(x)$. On définit de la même façon les fonctions produit, quotient et valeur absolue.

La fonction composée $g \circ f$ est la fonction qui, à x , associe $g \circ f(x) = g[f(x)]$; l'ensemble de définition de $g \circ f$ est caractérisé par :