

JULES FILLETTE • JULIEN FROUSTEY • HUGO ROUSSILLE

Physique pour l'agrégation

NOUVEAU CONCOURS

Mécanique classique et relativiste
Physique quantique et nucléaire
Thermodynamique • Physique statistique

AGRÉGATION INTERNE ET EXTERNE PHYSIQUE

- Synthèses de cours et approfondissements
- Nombreux exemples et applications
- Préparation de l'écrit et de l'oral

+ EN LIGNE

OFFERT

Ressources pour l'oral : toutes les figures disponibles en téléchargement

deboeck SUPÉRIEUR



JULES FILLETTE • JULIEN FROUSTEY • HUGO ROUSSILLE

Physique pour l'agrégation

Mécanique classique et relativiste
Physique quantique et nucléaire
Thermodynamique • Physique statistique

deboeck SUPÉRIEUR

Chez le même éditeur (extrait du catalogue)

Aslangul C., *La théorie quantique. Initiation et premières applications*
Aslangul C., *Mécanique quantique. 1. Fondements et premières applications*. 2e éd.
Aslangul C., *Mécanique quantique. 2. Développements et applications à basse énergie*. 3e éd.
Aslangul C., *Mécanique quantique. 3. Corrigés détaillés et commentés des exercices et problèmes*. 2e éd.
Basdevant J.-L., *Introduction à la physique quantique*. 2e éd.
Basdevant J.-L., *La physique quantique et ses applications*
Basdevant J.-L., *15 leçons de mécanique quantique*
Basdevant J.-L., *Les principes variationnels de la physique*. 4e éd.
Bécherrawy T., *Optique géométrique*
Biemont É., *Spectroscopie atomique. Instrumentation et structures atomiques*
Biemont É., *Spectroscopie moléculaire. Structures moléculaires et analyse spectrale*
Braquart D., Dhont G., Pennacino É., *Physique-chimie Capes & agrégation. Plans d'exposés et de montages*
Champeau R.-J., Carpentier R., Lorgeré I., *Ondes lumineuses. Propagation, optique de Fourier, cohérence*
Daniel J.-Y., Peter P., *Cosmologie. La science de l'Univers*
Dumas J.-P., *Thermodynamique*
Fruchart M., Lidon P., Thibierge E., Champion M., Le Diffon A., *Physique expérimentale. Optique, mécanique des fluides, ondes et thermodynamique*
Galtier S., *Magnétohydrodynamique. Des plasmas de laboratoire à l'astrophysique*
Godet-Lartigaud J.-L., *Introduction à la thermodynamique*
Hewitt P., *Physique conceptuelle*
Krivine H., Treiner J., *Exercices et problèmes de physique statistique*
Langlois D., *Relativité générale. Concepts élémentaires et applications astrophysiques*
Mayet F., *Physique nucléaire appliquée*. 2e éd.
Rax J.-M., *Électromagnétisme. Milieux, structures, énergie*
Rieutord M., *Une introduction à la dynamique des fluides*
Sator N., Pavloff N., *Physique statistique*. 2e éd.
Taillet R., *Optique physique. Propagation de la lumière*. 2e éd.
Watzky A., T*hermodynamique macroscopique*

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web :
www.deboecksuperieur.com

En couverture : Énergie physique © Patrice6000 © Adobe Stock
Maquette et mise en page des auteurs
Maquette de couverture : Primo&Primo
Couverture : SCM, Toulouse

Dépôt légal :
Bibliothèque royale de Belgique : 2023/13647/075
Bibliothèque nationale, Paris : juin 2023
ISBN : 978-2-8073-3642-1

Tous droits réservés pour tous pays.
Il est interdit, sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, de reproduire (notamment par photocopie) partiellement ou totalement le présent ouvrage, de le stocker dans une banque de données ou de le communiquer au public, sous quelque forme ou de quelque manière que ce soit.

© De Boeck Supérieur SA, 2023 - Rue du Bosquet 7, B1348 Louvain-la-Neuve
De Boeck Supérieur - 5 allée de la 2e DB, 75015 Paris

Table des matières

Avant-propos VII

I Mécanique 1

1 Théorèmes généraux de la mécanique 3
Fiche synthèse . . . 4
1.1 Développements variés sur la mécanique newtonienne . . . 8
1.2 Théorème des travaux virtuels . . . 12

2 Oscillateurs 13
Fiche synthèse . . . 14
2.1 Universalité des oscillateurs harmoniques . . . 19
2.2 Oscillateurs non-linéaires . . . 21
2.3 Oscillateurs paramétriques . . . 28
2.4 Couplage d'oscillateurs non amortis . . . 28

3 Frottements solides 33
Fiche synthèse . . . 34
3.1 Analyse des frottements solides à l'échelle microscopique . . . 36
3.2 Mouvements possibles entre deux solides en contact . . . 38
3.3 Oscillateur amorti par frottements solides . . . 41

4 Forces centrales 45
Fiche synthèse . . . 46
4.1 Calcul des trajectoires . . . 49
4.2 Problème à deux corps . . . 57
4.3 Étude générale des potentiels centraux. Trajectoires fermées . . . 60

5 Mouvement de particules chargées 65
Fiche synthèse . . . 66
5.1 Quelques situations plus complexes . . . 69
5.2 Piégeage de particules chargées . . . 73
5.3 Limites de la description newtonienne : accélérateurs de particules . . . 78

6 Changements de référentiels 85
Fiche synthèse . . . 86
6.1 Quelques référentiels usuels . . . 90
6.2 Mouvement orbital de la Terre — forces de marées . . . 92
6.3 Rotation propre de la Terre et conséquences . . . 101

7 Mécanique des solides 107
Fiche synthèse . . . 108
7.1 Le référentiel barycentrique . . . 113
7.2 Description générale du mouvement d'un solide . . . 116
7.3 Mouvement de rotation autour d'un point fixe . . . 122
7.4 Notions élémentaires d'élasticité . . . 127

8 Mécanique relativiste 133
8.1 Les insuffisances de la mécanique classique . . . 134
8.2 Changement de référentiel en relativité restreinte . . . 139
8.3 Conséquences de la transformation de Lorentz . . . 144

8.4 Dynamique relativiste . . . 151
8.5 Quelques mots de relativité générale . . . 161

9 Mécanique analytique 167
9.1 Optimisation d'une fonctionnelle . . . 168
9.2 Principe de moindre action et lagrangien . . . 173
9.3 Hamiltonien et espace des phases . . . 176
9.4 Lois de conservation : théorème de Noether . . . 179

II Physique quantique et nucléaire 183

10 Dualité onde-corpuscule 185
Fiche synthèse . . . 186
10.1 Quelques modèles de l'atome . . . 188
10.2 De l'hypothèse de calcul au statut de particule, brève histoire du photon . . . 191
10.3 Propriétés corpusculaires du photon . . . 196
10.4 Aspects ondulatoires de la matière . . . 199

11 Fonction d'onde et équation de Schrödinger 205
Fiche synthèse . . . 206
11.1 Développements sur l'équation de Schrödinger . . . 210
11.2 Effet tunnel . . . 216
11.3 Confinement et quantification . . . 223

12 Formalisme de la mécanique quantique 229
12.1 Notion d'état quantique . . . 230
12.2 Évolution d'un état quantique . . . 237
12.3 Application au système à deux niveaux . . . 242
12.4 Oscillateur harmonique quantique . . . 246
12.5 États à plusieurs particules . . . 251

13 Moment cinétique 257
Fiche synthèse . . . 258
13.1 Quantification du moment cinétique . . . 262
13.2 Implications pour les atomes . . . 265
13.3 Résonance magnétique nucléaire (RMN) . . . 276

14 Physique subatomique. Énergie nucléaire 291
14.1 Particules élémentaires et interactions fondamentales . . . 292
14.2 Structure et stabilité du noyau . . . 296
14.3 Fission nucléaire et applications . . . 304
14.4 Fusion nucléaire et applications . . . 310

III Thermodynamique 315

15 Description des systèmes thermodynamiques à l'équilibre 317
Fiche synthèse . . . 318
15.1 Théorie cinétique du gaz parfait . . . 320
15.2 Variables et fonctions en thermodynamique . . . 323

16 Transformations d'un système thermodynamique 329
Fiche synthèse . . . 330
16.1 Principes et fonctions thermodynamiques . . . 334
16.2 Lois et détentes de Joule . . . 338
16.3 Transformations thermodynamiques d'un gaz parfait . . . 342
16.4 Évolution et condition d'équilibre d'un système fermé. Notion de potentiel thermodynamique . . . 345

17 Du fluide parfait à la transition de phase 351
Fiche synthèse . . . 352
17.1 Du gaz parfait au gaz réel . . . 355
17.2 Propriétés d'un gaz de van der Waals . . . 357
17.3 Transitions de phase du corps pur . . . 362
17.4 Description générale des transitions de phase . . . 366

18 Les principes de la physique appliqués à des systèmes ouverts 371
18.1 Principes de la thermodynamique en écoulement . . . 372
18.2 Théorème du transport de Reynolds . . . 375
18.3 Deux exemples mécaniques . . . 377
18.4 Contact avec un réservoir de particules : le travail chimique . . . 380

19 Machines thermiques 383
Fiche synthèse . . . 384
19.1 Diagrammes décrivant les machines thermiques . . . 387
19.2 Cycles moteurs : l'importance de la puissance fournie . . . 389
19.3 Utilisation d'un fluide réel : diagramme des frigoristes . . . 393

20 Phénomènes de transport 399
Fiche synthèse . . . 400
20.1 Équilibre thermodynamique local . . . 405
20.2 Transferts thermiques aux parois . . . 406
20.3 Origine microscopique de la diffusion . . . 410
20.4 Comparaison des différents phénomènes de conduction et des différents phénomènes de transport . . . 413

IV Physique statistique 417

21 Fondements théoriques. Ensemble microcanonique 419
21.1 Objets de la physique statistique . . . 420
21.2 Mécanique statistique d'un système isolé à l'équilibre. Ensemble microcanonique . . . 423
21.3 Calcul de densité d'états : particule libre . . . 427

22 Ensemble canonique 433
22.1 Probabilité dans l'ensemble canonique . . . 434
22.2 Étude détaillée d'un système à deux niveaux d'énergie . . . 437
22.3 De la physique statistique à la thermodynamique . . . 440
22.4 Résultats relatifs à un système possédant un continuum de niveaux d'énergie accessibles . . . 441
22.5 Capacités thermiques des gaz parfaits . . . 444

23 Ensemble grand-canonique. Statistiques quantiques 447
23.1 Distribution grand-canonique . . . 448
23.2 Fermions – Statistique de Fermi-Dirac . . . 452
23.3 Bosons – Statistique de Bose-Einstein . . . 457
23.4 Gaz parfait quantique, gaz parfait classique . . . 460

24 Rayonnement thermique 463
24.1 Description macroscopique du rayonnement . . . 464
24.2 Conséquences de l'équilibre thermique . . . 467
24.3 Applications concrètes . . . 472

A Outils transverses 477
A.1 Unités du Système International . . . 478
A.2 Adimensionnement et théorème Π . . . 483
A.3 Systèmes de coordonnées usuels . . . 485
A.4 Fonctions de plusieurs variables . . . 488
A.5 Analyse de Fourier . . . 492

Index 497

Avant-propos

Réussir un concours de l'agrégation de physique, qu'il s'agisse du concours interne, externe ou externe spécial, demande une préparation théorique, didactique et expérimentale exigeante. Les connaissances disciplinaires requises sont vastes et couvrent l'intégralité de la physique dite « classique » ainsi que certains éléments de physique « moderne » à un niveau attendu frôlant parfois la première année de Master. Pour leur préparation, les candidats naviguent aujourd'hui entre les manuels de CPGE — qui ne couvrent pas tous les sujets abordés à l'agrégation — et des ouvrages spécialisés au contenu souvent plus technique que ce qui est attendu au concours et usant parfois d'un formalisme mathématique qui n'est pas dans l'esprit de l'enseignement de la physique au lycée ou en CPGE. La diversité des sujets à maitriser et le besoin d'accumuler une culture scientifique la plus vaste possible requièrent, enfin, de passer un temps conséquent à s'approprier de nombreuses références bibliographiques.

L'objectif de ce manuel est de présenter des notions parfois difficiles en se concentrant sur la rigueur et la construction des concepts introduits. Les outils utilisés sont au niveau Licence ce qui permet, par exemple sur les chapitres de relativité, physique quantique ou statistique, d'introduire « ce qui est nécessaire » sans noyer le candidat sous des détails certes importants mais non prioritaires. Nous avons fait le travail bibliographique d'ampleur nécessaire à comprendre chaque sujet en profondeur afin de faire gagner ce temps précieux aux candidats et leur permettre de se concentrer sur le contenu scientifique plutôt que sur la recherche de l'ouvrage idéal. Toutes les références que nous avons utilisées sont ainsi scrupuleusement citées — mais il n'est pas essentiel de les avoir sous la main pour comprendre le propos présenté. Nous avons distingué les références spécifiques à un chapitre, que l'on trouvera numérotées ([1]), des références utilisées de manière récurrente, dites « Références usuelles », auxquelles un sigle a été attribué (comme [Sext]). Parmi ces références, les entrées [CPGE1] et [CPGE2] renvoient à tout manuel de CPGE de 1ère ou 2ème année ; nous laissons le candidat choisir son édition préférée.

Ce manuel veut aussi répondre aux évolutions récentes des concours. D'une part, la possibilité d'accéder à internet pendant les oraux nous permet de proposer en ligne deux types de contenu. On trouvera sur le site de l'éditeur, à la page https://www.deboecksuperieur.com/site/336421, l'ensemble des figures présentes dans le livre. Les candidats sont libres d'utiliser ces figures pour leur préparation personnelle et leur présentation le jour de l'oral, en prenant soin de citer leur source. De plus, certains développements ou calculs plus difficiles, ou qui nous semblaient nuire à la fluidité de la lecture, ont aussi été déposés en ligne et sont accessibles via un QR code et un lien à l'endroit où ils doivent être lus.

D'autre part, la structure de ce manuel en compléments indépendants les uns des autres le rend particulièrement adapté à la préparation des oraux dont les listes de titres ont été supprimées. Chaque chapitre [1] commence par une courte introduction et la présentation du plan, suivies de quelques pages marquées d'un liseré orange — une « fiche synthèse » — qui proposent un résumé du cours de CPGE. Ces fiches permettront notamment de vérifier un résultat connu ou de contrôler ses acquis avant d'aborder les approfondissements. Ces approfondissements, qui constituent le cœur du manuel, sont divisés en un certain nombre de « compléments ». Ils présentent des notions qui sont traitées de manière simplifiée en CPGE, voire pas abordées du tout, et qui doivent être maîtrisées pour les concours. Ils pourront aussi constituer tout ou partie d'un plan de leçon ou d'exposé le cas échéant. Enfin, cinq encarts structurent la lecture.

1. À l'exception de quelques-uns, pas ou peu abordés au programme de CPGE, pour lesquels nous avons choisi de reprendre la présentation sans supposer aucun prérequis.

Théorème

L'encart « Théorème » signale un résultat majeur : théorème, principe, postulat, loi importante, etc.

Remarque

L'encart « Remarque » signale un contenu plus subtil que l'on peut éluder en première lecture.

Exemple

L'encart « Exemple » propose une application directe des notions présentées à un cas concret, souvent accompagné d'une application numérique.

Conseil didactique

L'encart « Conseil didactique » propose une réflexion sur la manière d'aborder une notion au concours.

Aux concours ...

L'encart « Aux concours ... » permet de repérer à quelles occasions les notions ont pu apparaître à l'écrit ou à l'oral d'un des concours. Dans ce dernier encart comme dans le reste de ce manuel les différents concours sont repérés par les acronymes suivants :

AEPC pour l'*Agrégation Externe de Physique-Chimie* (sous-entendu *option physique*) ;

AIPC pour l'*Agrégation Interne de Physique-Chimie* ;

Doct pour l'*Agrégation Spéciale Docteurs de Physique-Chimie* (sous-entendu *option physique*).

On fait alors référence aux épreuves écrites par les acronymes suivants : AIPC2019 réfère à l'épreuve écrite de physique de l'agrégation interne en 2019. Les sigles A2019 et C2019 renvoient aux épreuves A et C (respectivement la composition et le problème de physique) de l'agrégation externe en 2019. Doct2019 est l'épreuve écrite de l'agrégation externe spéciale en 2019. Les références aux épreuves orales (leçons, montages et exposés) sont effectuées de manière explicites.

Rappelons que les conditions d'évaluation sont susceptibles d'évoluer à chaque session du concours et qu'il est impératif que les candidats consultent le rapport de jury de la session précédente sur le site du concours qu'ils comptent présenter.

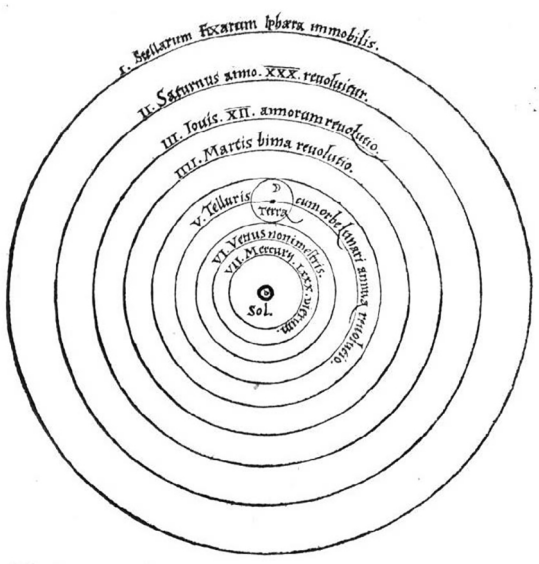
Enfin, nous souhaitons remercier très chaleureusement toutes les personnes qui ont participé à l'élaboration de ce manuel, au premier rang desquelles celles qui ont consacré du temps à relire, corriger et améliorer un chapitre ou une partie entière du manuscrit. Par ordre de lecture du manuel : Stéphane Komilikis, David Langlois, Erwan Allys, Clément Sayrin, Elias Khan, Arnaud Raoux et Lionel Djadaojee. Nous remercions aussi Alain Luguet, éditeur sciences chez deBoeck Supérieur, qui nous a laissé toute liberté pour imaginer et concevoir ce manuel et qui l'a enrichi de ses conseils professionnels. La parution de ce manuel n'aurait enfin pas été possible sans le soutien de nos proches et celui des structures qui nous ont hébergé pendant sa rédaction : l'École Normale Supérieure de Paris, en particulier la plateforme de préparation à l'agrégation de Montrouge, l'École Normale Supérieure de Lyon, l'Institut d'Astrophysique de Paris (IAP) de Sorbonne Université et les laboratoires de l'UFR de physique de l'Université Paris Cité : Astroparticules & Cosmologie (APC) et Matière et Systèmes Complexes (MSC).

Nous invitons les lecteurs à nous faire part de leurs remarques ou signaler les erreurs qui nous auraient échappé à l'adresse `physiquepourlagregation@gmail.com`.

Bonne lecture et bonne réussite !

Partie I

Mécanique



Système héliocentrique de Copernic, représenté dans De Revolutionibus Orbium Coelestium *(1543)*

Chapitre 1

Théorèmes généraux de la mécanique

Dans ce premier chapitre nous rappelons les théorèmes généraux de la mécanique du point, c'est-à-dire les briques élémentaires qui nous permettront de mener les études des chapitres suivants. Les lois de Newton, les aspects énergétiques ainsi que les notions de moment d'une force et de moment cinétique sont révisés en fiche synthèse. Inutile de préciser que cette fiche synthèse, qui porte essentiellement sur des notions de première année de CPGE ou de cycle universitaire, doit être parfaitement maîtrisée. On portera une attention particulière aux hypothèses des différents théorèmes et aux définitions proposées, qui doivent pouvoir être restituées sans ambiguïté au concours, à l'écrit comme à l'oral.

Le premier complément approfondit plusieurs notions de mécanique du point : l'équilibre mécanique, la stabilité des positions d'équilibre, la notion d'état lié ou d'état de diffusion. Ces concepts sont très importants pour comprendre les études de systèmes mécaniques qui seront effectuées dans les chapitres suivants ; il ne faudra pas hésiter, lors de la lecture de toute cette partie, à y revenir régulièrement. Le second complément, proposé en version numérique, détaille le théorème des travaux virtuels, utile pour l'étude de systèmes complexes avec de nombreuses contraintes internes.

Aux concours ...

Les généralités de mécanique exposées ici sont incontournables aux concours de l'agrégation, tant à l'écrit qu'à l'oral. Par exemple, elles font l'objet d'un titre de leçon à l'agrégation spéciale : « Lois de conservation en dynamique » et du sujet d'exposé de l'AIPC « Dynamique newtonienne ».

Sommaire

Fiche synthèse **4**

1.1 Développements variés sur la mécanique newtonienne **8**

1.1.1 Positions d'équilibre et stabilité 8

1.1.2 Mouvement unidimensionnel dans un profil d'énergie potentielle 11

1.2 Théorème des travaux virtuels **12**

Fiche synthèse

▷ Modèle du point matériel

Une grande partie de la mécanique repose sur l'étude d'un **point matériel** : le système réel (généralement un ou plusieurs solides), de masse m, est considéré d'extension spatiale nulle pour simplifier l'étude. On parle alors de **mécanique du point**.
À certaines occasions il n'est cependant pas possible de faire cette simplification et il est alors nécessaire de considérer l'extension spatiale du système et de décrire son mouvement de rotation propre ou, plus rarement, ses déformations. On parle alors de *mécanique des solides*. Cette branche de la mécanique sera décrite au chapitre 7 : dans ce chapitre, on considère toujours un système composé d'un unique point matériel.

▷ Cinématique et Dynamique

L'étude d'un mouvement se fait toujours en deux étapes.

1. On commence par chercher la façon optimale de *décrire* le mouvement : cela implique de définir le système étudié et de choisir un référentiel [1], ainsi qu'un repère associé à un système de coordonnées. Il s'agit de l'étude **cinématique**.
2. On cherche ensuite à décrire les actions s'exerçant sur le système considéré pour prévoir sa trajectoire. Celle-ci, bien sûr, s'exprime différemment selon le référentiel et le système de coordonnées choisis. Cette partie constitue l'étude **dynamique**.

Dans cette fiche synthèse, nous rappelons les théorèmes importants de la *dynamique*. Les différents systèmes de coordonnées et leur propriétés sont rappelés dans l'appendice et le lecteur souhaitant réviser plus en détail la description cinématique d'un mouvement peut se référer à des ouvrages de première année de CPGE [CPGE1, BFRM1].

▷ Lois de Newton

Les trois lois de Newton sont les trois postulats à la base de la mécanique dite « classique » ou « newtonienne » par opposition à la mécanique relativiste que nous étudierons au chapitre 8. Elles ont été énoncées pour la première fois par Isaac Newton en 1687 [1].

1ère loi de Newton (Principe d'inertie)

Un point matériel est dit **isolé** s'il n'est soumis à aucune action mécanique, et **pseudo-isolé** si les actions qui s'exercent sur lui se compensent.
Il existe une classe de référentiels, dits **galiléens**, dans lesquels le mouvement d'un point matériel isolé ou pseudo-isolé est rectiligne uniforme.

Attention :
L'application des lois de la mécanique que nous présentons dans ce chapitre nécessite de disposer d'un référentiel galiléen. Cette 1ère loi de Newton, qui est un *postulat d'existence* d'un tel référentiel, nous permet de repousser au chapitre 6 les considérations plus avancées sur le caractère galiléen ou non des référentiels qui nous entourent.

Pour toute la suite de cette fiche synthèse, nous travaillons dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ dont l'existence est assurée par la 1ère loi de Newton. Nous lui attachons un repère dont l'origine est notée O et dont les axes n'ont pas besoin d'être précisés à ce stade. Nous étudions un point matériel M de masse m.

2ème loi de Newton (Principe fondamental de la dynamique)

Considérons un point matériel M, de masse m, sur lequel s'applique une résultante des forces $\vec{F}^{\text{tot}}$. Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, on a :

$$\forall\, t\,,\quad \boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_g} = \vec{F}}\,, \tag{1.1}$$

où $\vec{p}$ est la **quantité de mouvement** du point M étudié dans $\mathcal{R}_g$:

$$\vec{p} = m\vec{v}\,.$$

On dit qu'un point est à l'**équilibre mécanique** si, et seulement si, il est immobile, c'est-à-dire que sa vitesse $\vec{v}$ est nulle à tout instant. On en déduit qu'un point matériel est à l'équilibre mécanique si et seulement si la résultante des forces s'appliquant sur lui est nulle et que sa vitesse initiale est nulle. Une discussion approfondie de la notion d'équilibre mécanique est réalisée dans la section 1.1.1.

La 2ème loi de Newton est cruciale pour l'étude des mouvements car elle permet de relier une quantité cinématique, la vitesse, à des paramètres dynamiques du problème, les forces.

Une caractéristique fondamentale des interactions représentées par des forces fait l'objet de la troisième loi de Newton.

1. La notion de référentiel sera détaillée au chapitre 6. Rappelons qu'un référentiel est constitué d'un solide de référence et d'une horloge.

3ème loi de Newton (Principe des actions réciproques)

Considérons deux points matériels M_1 et M_2. Ces points interagissent par l'intermédiaire de deux forces :

- la force qu'exerce M_1 sur M_2, notée $\vec{F}_{1\to2}$;
- la force qu'exerce M_2 sur M_1, notée $\vec{F}_{2\to1}$.

Quel que soit le mouvement des points M_1 et M_2, on a

$$\boxed{\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}}.$$

On parle aussi de *principe de l'action et de la réaction.*

Remarque

Les lois de Newton ont été complétées, au XVIIIe siècle, par une description lagrangienne du mouvement, en terme de principes variationnels. Cela a donné naissance à la mécanique moderne, ou mécanique *analytique*, qui est développée au chapitre 9.

▷ Théorèmes énergétiques

La résolution de la mécanique par une approche énergétique permet deux choses : d'une part le lien avec les autres branches de la physique, l'énergie étant la quantité transverse par excellence. D'autre part, dans la plupart des problèmes de mécanique (et la quasi-totalité de ceux posés aux concours), elle permet d'obtenir aisément une équation du mouvement qui, lorsque celui-ci possède un unique degré de liberté, résout complètement le problème.

Puissance et travail d'une force Considérons une force $\vec{F}$ quelconque s'appliquant sur le point M de vitesse $\vec{v}$. On définit la **puissance** $\mathcal{P}$ à t de cette force par

$$\boxed{\mathcal{P}(t) = \vec{F}(t)\cdot\vec{v}(t)}.$$

C'est un scalaire qui s'exprime en watts W (dimension $\mathrm{ML^2T^{-3}}$).
Sur une portion de trajectoire suivie par M entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$, on définit à partir de la puissance le **travail infinitésimal** δW :

$$\boxed{\delta W = \mathcal{P}\,\mathrm{d}t}.$$

Par intégration entre les instants t_1 et t_2, on définit le **travail**

$$W_{t_1\to t_2} = \int_{t_1}^{t_2}\delta W = \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\;\vec{F}\cdot\vec{v}\,.$$

La valeur de l'intégrale dépend de la trajectoire, car la force $\vec{F}$ dépend en général de la position, de la vitesse, etc. On peut aussi écrire

$$\delta W = \vec{F}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t \quad\text{et}\quad \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\,.$$

Cela permet d'exprimer le travail élémentaire δW sous la forme

$$\boxed{\delta W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}} \quad\text{soit}\quad W_{t_1\to t_2} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}\,. \quad (1.2)$$

Énergie cinétique On définit l'**énergie cinétique** E_c de M par

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2}.$$

Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétique

Notons $\mathcal{P}(t)$ la somme des puissances des forces subies à t par un point matériel M. Le théorème de la puissance cinétique s'écrit

$$\forall\, t\,,\quad \boxed{\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(t)}.$$

On peut écrire ce théorème en version intégrée entre t_1 et t_2, il s'agit alors du **théorème de l'énergie cinétique** :

$$\boxed{\Delta E_c = E_c(t_2) - E_c(t_1) = W_{t_1\to t_2}},$$

où $W_{t_1\to t_2}$ est la somme des travaux des forces s'appliquant à M entre t_1 et t_2.

Énergie potentielle Considérons le cas d'une force $\vec{F}$ s'appliquant sur le point M. On s'intéresse au cas particulier où l'on peut trouver une fonction E_p telle que

$$\delta W = -\,\mathrm{d}E_p\,.$$

Cela implique

$$W = \int_{\mathscr{C}}\delta W = -\int_{\mathscr{C}}\mathrm{d}E_p = -\Delta E_p\,,$$

où ΔE_p est la variation de la fonction E_p entre le début et la fin de la trajectoire $\mathscr{C}$. Si une telle fonction E_p existe, on l'appelle **énergie potentielle** associée à la force $\vec{F}$ et on dit que la force est **conservative**. On a alors démontré un résultat capital : le travail *ne dépend plus de la trajectoire suivie* mais seulement des points de départ et d'arrivée !
En pratique, le calcul d'une énergie potentielle se fait à l'aide de la formule (1.2). On écrit en effet

$$\delta W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -\,\mathrm{d}E_p\,,$$

de sorte qu'une force est conservative s'il existe une fonction énergie potentielle E_p telle que

$$\boxed{\vec{F} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E_p}.$$

Dans le cas contraire on dit que la force est non-conservative.

On remarque que l'énergie potentielle est définie à une constante près ; cette constante peut être fixée arbitrairement afin de simplifier les expressions manipulées. Sauf avis contraire, la convention consiste à prendre l'énergie potentielle nulle au point où la force s'annule (si celui-ci existe et est unique).

Énergie potentielle pour des forces usuelles

On répertorie dans la table suivante des expressions usuelles à connaître.

Force	Expression	Énergie potentielle
Élastique	$-k(l-l_0)\vec{u}_x$	$\frac{1}{2}k(l-l_0)^2 + \text{cste}$
Poids	$-mg\vec{u}_z$	$mgz + \text{cste}$
Électrostatique	$q\vec{E}$	$qV + \text{cste}$

Si plusieurs forces s'appliquent sur le point M, on peut définir l'énergie potentielle totale $E_{p,\text{tot}}$ comme la somme des énergies potentielles de chaque force. On a alors $-\overrightarrow{\text{grad}}\, E_{p,\text{tot}} = \vec{F}_{\text{tot}}$.

Énergie mécanique L'énergie mécanique du point M est définie par

$$\boxed{E_m = E_c + E_{p,\text{tot}}},$$

où $E_{p,\text{tot}}$ est la somme des énergies potentielles des forces conservatives s'appliquant sur M.

Théorèmes de la puissance et de l'énergie mécanique

Notons $\mathcal{P}_{\text{nc}}$ la somme des puissances des forces *non-conservatives* subies à t par un point matériel M. Le théorème de la puissance mécanique s'écrit

$$\forall\, t,\ \boxed{\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{nc}}}.$$

On peut écrire ce théorème en version intégrée entre t_1 et t_2, il s'agit alors du théorème de l'énergie mécanique :

$$\Delta E_m = W_{\text{nc},\, t_1\to t_2},$$

où $W_{\text{nc},\, t_1\to t_2}$ est la somme des travaux associés aux forces non-conservatives.

Grâce au théorème de la puissance mécanique, on montre que l'énergie mécanique est une constante du mouvement lorsqu'il n'y a aucune force non-conservative. On parle d'intégrale première du mouvement : il s'agit d'une grandeur conservée au cours du mouvement qui ne dépend que de la position et de la vitesse du point M.

Notons pour clore cette partie sur l'énergie que les quatre théorèmes présentés (théorèmes de la puissance cinétique, puissance mécanique, énergie cinétique, énergie mécanique) sont « les mêmes ». En effet, on passe d'un théorème sur la puissance à celui sur l'énergie en intégrant par rapport au temps. De même, on passe d'un théorème cinétique au théorème mécanique en faisant passer l'action des forces conservatives du terme de droite au terme de gauche via l'énergie potentielle. Pour résoudre un problème donné appliquer plusieurs de ces théorèmes mènera donc toujours au même résultat et n'est pas utile. Il s'agira de choisir l'énoncé le plus adapté à la situation proposée.

▷ Théorème du moment cinétique

Considérons dans la suite un point matériel M de masse m et de quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$. Le principe fondamental de la dynamique décrit bien l'idée commune qu'on se fait du mouvement d'un corps, à travers sa quantité de mouvement $\vec{p}$: plus sa vitesse et/ou sa masse sera grande, plus il sera difficile de le mettre en mouvement ou l'arrêter. Nous allons voir ici une reformulation de ce théorème, particulièrement utile pour les mouvements de révolution et qui sera très puissante en mécanique des solides.

Moment cinétique Notons A un point quelconque de l'espace[2]. On définit le moment cinétique du point M en A par

$$\boxed{\vec{L}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}}. \tag{1.3}$$

Attention :

Il est crucial de se souvenir que le moment cinétique est un vecteur, et que celui-ci dépend du point M étudié, *mais aussi du point A où il est exprimé.*

Si (Δ) est une droite dirigée par le vecteur unitaire $\vec{u}_z$ et contenant le point A, on peut définir le moment cinétique par rapport à un axe (Δ) par

$$L_\Delta = \vec{L}_A \cdot \vec{u}_z.$$

Celui-ci est indépendant du choix du point A tant que A est sur l'axe (Δ). On peut aller plus loin : en se plaçant en coordonnées cylindriques d'origine A et d'axe (Δ) (voir figure 1.1), on a

$$\vec{p} = m\vec{v} = m\left(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z\right),$$

ce qui implique

$$L_\Delta = (r\vec{u}_r) \wedge \vec{p} = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z.$$

On définit alors le moment d'inertie I_Δ par rapport à (Δ) par

$$\boxed{L_\Delta = I_\Delta\dot{\theta}}. \tag{1.4}$$

On a alors, dans le cas présent,

$$I_\Delta = mr^2.$$

2. En pratique, A sera souvent l'origine du repère, parfois le centre d'inertie du système.

La notion de moment d'inertie prendra tout son sens au moment de l'étude de la rotation propre d'un solide dans le complément 7.2.2. Notons que le vecteur unitaire portant (Δ) étant nommé ici $\vec{u}_z$, on aurait pu noter les quantités L_z et I_z.

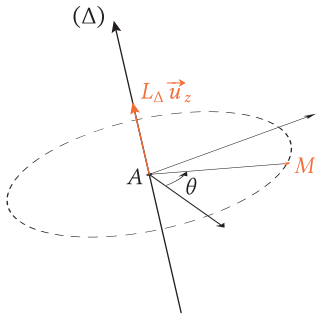


FIGURE 1.1 – Moment cinétique du point M par rapport à l'axe (Δ).

Moment d'une force Pour une force $\vec{F}$ s'appliquant au point M, on définit le **moment** en A de $\vec{F}$ par

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}}\,. \tag{1.5}$$

Le calcul du moment $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F})$ est facilité par la technique du *bras de levier* : si on note d la distance entre A et la droite portée par le vecteur $\vec{F}$ et $\vec{u}_z$ le vecteur unitaire orthogonal au plan $(\overrightarrow{AM}, \vec{F})$ (voir figure 1.2), on a

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \mathcal{M}_z \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad \mathcal{M}_z = \sigma d \|\vec{F}\|\,. \tag{1.6}$$

La quantité σ est telle que $\sigma = +1$ si la force $\vec{F}$ tend à « faire tourner » M dans le sens trigonométrique dans le plan $(\overrightarrow{AM}, \vec{F})$ et $\sigma = -1$ si elle fait tourner dans le sens anti-trigonométrique.

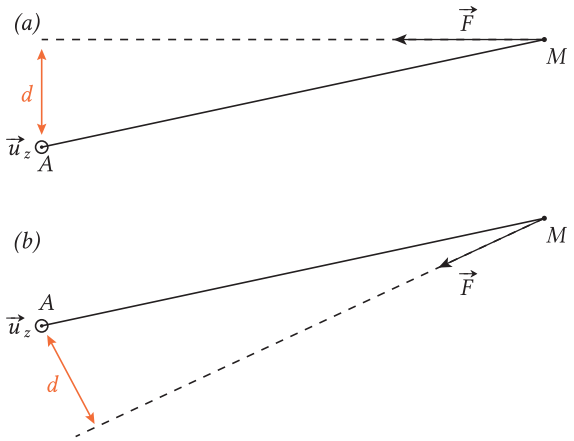


FIGURE 1.2 – Technique du bras de levier. *(a)* Cas $\sigma = +1$. *(b)* Cas $\sigma = -1$.

Théorème du moment cinétique

Le moment cinétique en un *point fixe* A d'un point matériel M est relié à la somme $\vec{\mathcal{M}}_A^{\text{tot}}$ des moments en A des forces s'appliquant sur M par le **théorème du moment cinétique** :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}_A}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_A^{\text{tot}}}\,. \tag{1.7}$$

Attention :

Cette expression du théorème n'est valable qu'en un point A *fixe*. Le cas d'un point A mobile est traité dans la section 7.2.4 avec le formalisme de la mécanique du solide. Pour un point matériel, on peut simplement déduire du PFD :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{L}_A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}\right) &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AM}}{\mathrm{d}t} \wedge \vec{p} + \overrightarrow{AM} \wedge \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \\ &= -\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{MA}}{\mathrm{d}t} \wedge \vec{p} + \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}^{\text{tot}}\,,\end{aligned}$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_A}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_A^{\text{tot}} - \vec{v}_A \wedge \vec{p}\,,$$

où $\vec{v}_A$ est la vitesse du point A.

Remarque

Le théorème du moment cinétique peut sembler futile pour le moment, car en mécanique du point matériel celui-ci est strictement équivalent à la relation fondamentale de la dynamique — en injectant (1.3) et (1.5) dans (1.1) on retrouve (1.7). Cependant, il devient crucial en mécanique du solide, ce qui est développé au chapitre 7.

Cas d'un mouvement plan

Supposons que le mouvement du point M soit plan : à tout instant t la position $\overrightarrow{AM}$ et la force $\vec{F}$ sont contenues dans un plan Π indépendant du temps. On note $\vec{u}_z$ la normale à ce plan. Les expressions (1.4) et (1.6) nous permettent d'écrire le théorème du moment cinétique projeté sur $\vec{u}_z$:

$$\boxed{I_z \ddot{\theta} = \mathcal{M}_z}\,.$$

Ce type de raisonnement sera utile pour l'étude des forces centrales au chapitre 4.

1.1 Développements variés sur la mécanique newtonienne

1.1.1 Positions d'équilibre et stabilité

Équilibre mécanique et position d'équilibre Un point matériel M est en **équilibre mécanique** si celui-ci est immobile pour tout temps : on a

$$\vec{v}(t) = \vec{0} \quad \text{pour tout } t\,.$$

On peut chercher à reformuler cette condition cinématique à l'aide de la résultante des forces $\vec{F}$ subie par le point M. Supposons qu'à un instant t_0, la vitesse du point M soit nulle : $\vec{v}(t_0) = \vec{0}$. Aux instants ultérieurs $t \geq t_0$, la vitesse ne peut rester nulle que si l'accélération est nulle. En vertu du principe fondamental de la dynamique (1.1), cela signifie que la résultante des forces $\vec{F}$ est nulle. On en déduit le théorème suivant.

Équilibre mécanique pour un point matériel

Un point matériel M est à l'équilibre mécanique si et seulement si

- sa vitesse est nulle à un instant $t = t_0$;
- la résultante des forces qu'il subit est nulle pour $t \geq t_0$ [a].

a. Une condition supplémentaire, associée au mouvement de rotation, est nécessaire en mécanique du solide (voir chapitre 7).

À ce stade, on définit une **position d'équilibre** comme une position où l'on peut avoir équilibre mécanique. Cela signifie qu'une position d'équilibre est une position où la résultante des forces est nulle.

Attention :
Cela n'implique en aucun cas qu'un système placé en une position d'équilibre acquiert automatiquement l'état d'équilibre mécanique dans la mesure où il peut y passer avec une vitesse non nulle.

Intérêt de la description énergétique L'étude des positions d'équilibre d'un système n'est pas toujours aisée car elle implique de résoudre au moins une équation vectorielle. On considère dans la suite un point matériel M de masse m sur lequel s'appliquent des forces de résultante $\vec{F}$.
Supposons désormais que $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle (i.e. $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p$). Par définition, les positions d'équilibre sont telles que $\vec{F} = \vec{0}$ c'est-à-dire que $\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p$ est nul. Il s'agit donc d'*extrema de l'énergie potentielle* que l'on peut facilement identifier sur une représentation graphique (voir figure 1.3).

Stabilité d'une position d'équilibre Pour chacune de ces positions d'équilibre la question de la stabilité se pose :

- l'équilibre est **stable** si lorsque le système s'en écarte il a tendance à y revenir,
- l'équilibre est **instable** si lorsque le système s'en écarte il a tendance à s'en écarter davantage.

Là encore le profil d'énergie potentielle de la figure 1.3 va être très utile. Commençons par considérer le cas unidimensionnel : l'énergie potentielle dépend d'une seule variable x et, x_0 étant position d'équilibre, on a

$$E_p'(x_0) = 0\,. \tag{1.8}$$

Or, on peut réaliser un développement de Taylor de E_p autour de $x = x_0$:

$$\begin{aligned} E_p(x) &= E_p(x_0) + E_p'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}E_p''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \\ &= E_p(x_0) + \frac{1}{2}E_p''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \end{aligned} \tag{1.9}$$

car $E_p'(x_0) = 0$.
À l'exception des cas particuliers [3] où $E_p''(x_0) = 0$, l'énergie potentielle peut donc être approximée par une parabole autour de $x = x_0$ et dans ce voisinage le système est soumis à une force

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p \simeq -E_p''(x_0)(x - x_0)\,\vec{u}_x\,. \tag{1.10}$$

Si $E_p''(x_0)$ est positif on peut l'assimiler à une constante de raideur et la force est analogue à une force de rappel élastique : on se trouve dans le cas d'un oscillateur harmonique (voir chapitre 2). Lorsque le système s'écarte de x_0, il est attiré vers la position d'équilibre qui est donc stable.
Si au contraire $E_p''(x_0)$ est négatif, la force a l'effet inverse : elle a tendance à accroître l'écartement à x_0, ce qui fait que l'équilibre est instable.

Stabilité d'un équilibre mécanique

Lorsque un système mécanique n'est soumis qu'à des forces conservatives, toute position d'équilibre x_0 correspond à un extremum d'énergie potentielle :

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0\,.$$

L'équilibre est

- stable si l'extremum est un minimum : $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_0) > 0$;
- instable si c'est un maximum : $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_0) < 0$.

3. Dans le cas où $E_p''(x_0) = 0$, il faut regarder les termes d'ordre supérieur dans (1.9). Si la position d'équilibre est stable et qu'il existe des oscillations autour de cette position, on parle d'oscillations *anharmoniques*.

Mouvement autour d'une position d'équilibre Lorsqu'on étudie le mouvement d'un système conservatif autour d'une position d'équilibre on a démontré (hors cas particulier où $E_p''(x_0) = 0$) que la force qu'il subit est exprimée par (1.10). On peut donc écrire l'équation du mouvement selon $\vec{u}_x$:

$$m\ddot{x} = E_p''(x_0)(x - x_0)\,,$$

soit en posant $X = x - x_0$:

$$\ddot{X} + \frac{E_p''(x_0)}{m} X = 0\,.$$

De nouveau la dichotomie stable/instable s'applique :

- Si l'équilibre est stable $E_p''(x_0)$ est positif. On note $\omega_0^2 = E_p''(x_0)/m$ et le système décrit, autour de x_0, de petites oscillations de pulsation propre ω_0.
- Si l'équilibre est instable $E_p''(x_0)$ est négatif et on note $-\tau = m/E_p''(x_0)$. L'équation du mouvement devient

$$\ddot{X} - \frac{1}{\tau} X = 0\,,$$

dont la solution est de la forme $X(t) = X_0 \exp(t/\tau)$. Le système s'écarte exponentiellement de la position d'équilibre instable en un temps caractéristique τ d'autant plus court que le profil d'énergie est concave. Cette solution exponentiellement croissante n'est cependant valide qu'aux temps très courts car les termes d'ordre supérieur dans le développement (1.9) deviennent rapidement non négligeables.

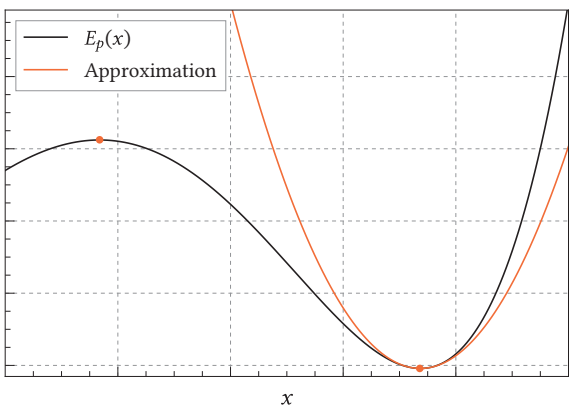


FIGURE 1.3 – Exemple de profil d'énergie potentielle, avec les positions d'équilibre associées (marquées par des points). On trace également l'approximation harmonique de l'énergie potentielle autour de son minimum.

Remarque

L'approximation harmonique du mouvement autour d'une position d'équilibre stable est fondamentale en physique. Elle justifie l'universalité de l'oscillateur harmonique, et est utile bien au-delà de la mécanique du point (elle sert par exemple en mécanique quantique).

Généralisation à un cas bidimensionnel Dans le cas où l'énergie potentielle dépend de plusieurs variables (par exemple x et y), l'étude est plus complexe. Pour commencer, on peut généraliser l'équation (1.8) : la position (x_0, y_0) est une position d'équilibre si et seulement si

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p(x_0, y_0) = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial E_p}{\partial x}(x_0, y_0) = 0\,, \\ \dfrac{\partial E_p}{\partial y}(x_0, y_0) = 0\,. \end{cases}$$

L'obtention des positions d'équilibre est donc assez similaire au cas unidimensionnel. Cependant, l'étude de la stabilité de celles-ci est plus ardue.
En effet, dans le cas multidimensionnel, on ne peut pas séparer directement les cas convexe et concave : on peut se trouver dans une situation où la position d'équilibre (x_0, y_0) apparaît comme un **point selle**[4], c'est-à-dire que l'énergie potentielle y est concave dans une direction et convexe dans une autre. Une telle situation est représentée sur la figure 1.4.
Afin de faire une étude systématique de la stabilité on introduit, en chaque point dont on veut étudier l'équilibre et la stabilité, la **matrice hessienne** M définie par

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 E_p}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Cela nous permet de généraliser l'équation (1.9) :

$$E_p(x, y) = E_p(x_0, y_0) + \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, E_p(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \left[M(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right] + \ldots \quad (1.11)$$

Remarque

Explicitons les notations de l'équation (1.11). Le gradient de l'énergie potentielle en (x_0, y_0) s'écrit vectoriellement :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial E_p/\partial x\,(x_0, y_0) \\ \partial E_p/\partial y\,(x_0, y_0) \end{pmatrix},$$

4. Cette terminologie est utilisée pour évoquer la forme du graphe de l'énergie potentielle au voisinage d'une telle position.

d'où

$$\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, E_p(x_0,y_0) = (x-x_0) \times \frac{\partial E_p}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0) \times \frac{\partial E_p}{\partial y}(x_0,y_0)\,.$$

Le terme d'ordre deux vaut de même :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \cdot \left[M(x_0,y_0) \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2}(x-x_0)^2 \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_0,y_0) + \frac{1}{2}(y-y_0)^2 \frac{\partial^2 E_p}{\partial y^2}(x_0,y_0) + (x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\,,$$

où on a utilisé le théorème de Schwarz (cf. Appendice, section A.4) pour identifier les dérivées secondes croisées.

On se place à une position d'équilibre (x_0, y_0). On note λ_1 et λ_2 les valeurs propres de $M(x_0, y_0)$ et $(\vec{u}_X, \vec{u}_Y)$ sa base propre [5]. On change de coordonnées : on réécrit le système en fonction de X et Y, coordonnées associées à $(\vec{u}_X, \vec{u}_Y)$ telles que la position d'équilibre soit en $X = 0$ et $Y = 0$. La matrice $M(x_0, y_0)$ s'écrit donc

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

L'équation (1.11) devient

$$\begin{aligned} E_p(X,Y) &= E_p(x_0,y_0) + 0 \\ &\quad + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \cdot \left[M(x_0,y_0) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right] + \dots \\ &= E_p(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 X \\ \lambda_2 Y \end{pmatrix} + \dots \\ &= E_p(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\lambda_1 X^2 + \frac{1}{2}\lambda_2 Y^2 + \dots \end{aligned}$$

On en déduit que la dynamique du système bidimensionnel en ce point est équivalente à celle de deux systèmes unidimensionnels découplés, avec les raideurs effectives

$$k_1 = \lambda_1 \quad \text{et} \quad k_2 = \lambda_2\,.$$

On distingue alors différents cas, résumés dans le théorème suivant.

Stabilité d'un équilibre bidimensionnel

Lorsqu'un système mécanique n'est soumis qu'à des forces conservatives, toute position d'équilibre (x_0, y_0) correspond à un extremum d'énergie potentielle :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p(x_0,y_0) = 0\,.$$

Si on note $\lambda_1 \leq \lambda_2$ les valeurs propres de la matrice hessienne associée à E_p en (x_0, y_0), plusieurs cas de stabilité sont possibles.

- Si $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ alors le système est instable (les raideurs effectives dans chaque direction étant négatives).
- Si $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ alors le système est stable.
- Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ alors on a un point selle : une perturbation générale entraînera une évolution instable, sauf si l'on n'excite le système que dans la direction correspondant à λ_2.

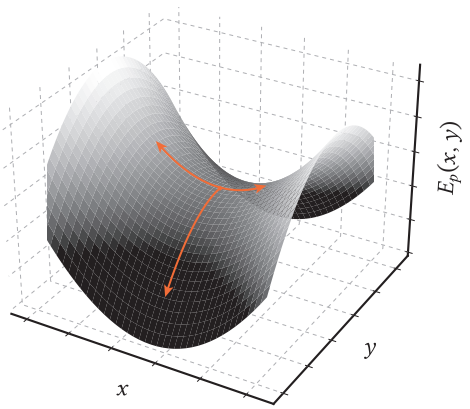


FIGURE 1.4 – Exemple d'énergie potentielle pour laquelle on a un point selle. En ce point, l'équilibre est instable pour toute perturbation dans la direction y.

Attention :

Insistons sur le fait que cette étude n'est valable que si *toutes les forces en jeu sont conservatives*, ce qui permet de ramener l'étude du système à l'étude de son énergie potentielle. S'il existe des forces non conservatives (typiquement la force de Coriolis ou la force de Lorentz magnétique), la stabilité d'une position d'équilibre ne pourra être déterminée qu'en revenant à l'équation du mouvement et en calculant la dynamique d'une petite perturbation autour de la position d'équilibre considérée. On peut citer par exemple les points de Lagrange et le piège de Penning.

5. Remarquons que, M étant symétrique (d'après le théorème de Schwarz (A.8)), les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont réelles. De plus, la base propre $(\vec{u}_X, \vec{u}_Y)$ s'obtient simplement en effectuant une *rotation* de la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$. $\vec{u}_X$ et $\vec{u}_Y$ sont deux vecteurs orthogonaux.

- Les points de Lagrange sont les positions auxquelles, dans le référentiel tournant d'un système à deux corps, on peut ajouter un troisième corps de masse négligeable sans que celui-ci n'acquière de mouvement par rapport au deux autres. On trouve 5 positions d'équilibre associées à 3 points selles et 2 maxima sur le graphe d'énergie potentielle (celle-ci est la somme de l'énergie potentielle gravitationnelle et de l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement). Ces positions seraient donc instables sans la force de Coriolis, non conservative ; cependant, sa prise en compte permet de montrer que les maxima sont des positions stables tandis que les points selles sont bien instables. On trouvera plus de détails dans [2].
- Le piège de Penning est une situation équivalente avec la force de Lorentz, il sera étudié dans le chapitre 5.

Remarque

Le raisonnement donné ici pour deux dimensions est aisément généralisable à trois dimensions : la matrice hessienne M est de composantes

$$M_{ij}(x, y, z) = \frac{\partial E_p}{\partial x_i x_j},$$

avec $(x_i) = (x, y, z)$. On note λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres de cette matrice en une position d'équilibre (x_0, y_0, z_0). Si l'une de ces valeurs propres est négative, la position d'équilibre est instable en général (i.e. éventuellement stable dans un certain nombre de directions mais instable dans au moins une).

1.1.2 Mouvement unidimensionnel dans un profil d'énergie potentielle

Dans cette partie, on s'intéresse au mouvement d'un point matériel de masse m dans un profil d'énergie potentielle E_p donné. On suppose le mouvement unidimensionnel, de sorte que l'énergie potentielle est notée $E_p(x)$. On suppose par ailleurs qu'il n'y a aucun frottement : toutes les forces sont conservatives et sont prises en compte dans E_p.
Par conservation de l'énergie mécanique, on a

$$E_c + E_p = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + E_p(x) = E_m = \text{cste}.$$

On en déduit plusieurs propriétés.

- L'énergie cinétique étant toujours positive, il est nécessaire d'avoir $E_m \geq E_p(x)$ pour tout x. Cela conditionne les valeurs de x accessibles au système. Si x ne peut prendre ses valeurs que dans un ensemble borné, on dira que le point matériel se trouve dans un **état lié** (figure 1.5) ; à l'inverse, si x peut atteindre l'infini, on dit que le point matériel se trouve dans un **état de diffusion** (figure 1.6).
- Les positions telles que $E_m = E_p(x)$, appelées **points de rebroussement**, correspondent aux points où $E_c = 0$. En ces positions, la vitesse s'annule et la trajectoire change de sens (elle passe des x croissants aux x décroissants ou vice-versa) : le point matériel *rebrousse* chemin.

Attention :

Les points de rebroussement ne sont pas des positions d'équilibre ! En effet, on a en ces positions $\dot{x} = 0$ mais $\ddot{x} \neq 0$.

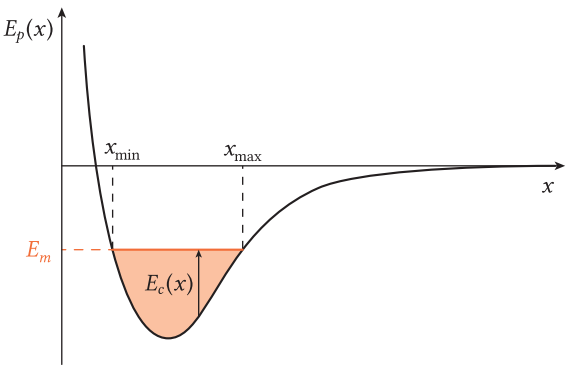


FIGURE 1.5 – Cas d'un état lié : le mouvement est borné entre $x_{\min}$ et $x_{\max}$.

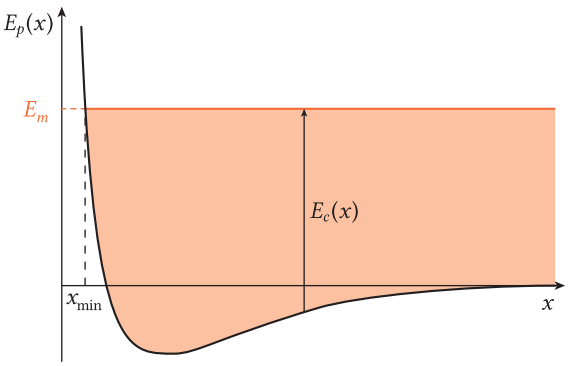


FIGURE 1.6 – Cas d'un état de diffusion : le mouvement est compris entre $x_{\min}$ et $+\infty$.

Ces considérations sont mises en œuvre au chapitre 4 pour décrire les différentes trajectoires de satellites à l'aide des états liés et de diffusion.

1.2 Théorème des travaux virtuels

L'étude de systèmes complexes en mécanique newtonienne peut s'avérer particulièrement ardue, car il faut comprendre le fonctionnement de chaque liaison pour pouvoir mettre en équation le système. Dans ce complément numérique, nous présentons une reformulation de la mécanique newtonienne qui permet de traiter simplement les contraintes internes à un système : le théorème des travaux virtuels.

Travaux virtuels

www.lienmini.fr/36421-cpltch01

Références

Références pour ce chapitre

[1] I. Newton. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. 1687.

[2] J.-P. Pérez. *Mécanique, fondements et applications*. 7ème édition. Dunod, 2022.

Références usuelles

[BFRM1] M. Bertin, J.-P. Faroux et J. Renault. *Mécanique 1. Mécanique classique des systèmes de points et notions de relativité*. Dunod, 1995.

[CPGE1] *Références diverses de CPGE 1ère année.*

Chapitre 2

Oscillateurs

Les oscillateurs sont omniprésents en physique et ils le sont donc aussi à l'agrégation. Le premier d'entre eux est l'oscillateur harmonique qui est une brique importante de ce chapitre à la fois du fait de sa simplicité mathématique ($\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$) et de son universalité (voir complément 2.1). Il possède trois propriétés fondamentales que nous allons redémontrer : la persistance des oscillations sinusoïdales dans le temps, l'isochronisme et l'équipartition de l'énergie entre E_c et E_p.
Les autres oscillateurs physiques peuvent se distinguer de l'oscillateur harmonique par deux aspects. D'une part l'amortissement, qui n'est jamais complètement négligeable lorsqu'on étudie un oscillateur réels aux temps longs. L'analyse des oscillateurs harmoniques amortis par frottements fluides est présentée en fiche synthèse ; l'étude de l'amortissement par frottements solides étant renvoyée au complément 3.3. D'autre part la présence de non-linéarités enrichit considérablement la gamme de comportements des oscillateurs, ce qui sera discuté au complément 2.2. Un des enjeux de ce chapitre est de montrer comment ces deux phénomènes modifient les propriétés des oscillateurs. Dans la suite de ces premiers compléments, l'étude des *oscillateurs paramétriques* est détaillée en complément numérique.
Enfin, nous nous intéresserons aux phénomènes particuliers apparaissant lorsque plusieurs oscillateurs influent les uns sur les autres : nous parlerons ainsi de *couplage des oscillateurs*. Ce sera l'occasion de différencier le couplage inertiel du couplage élastique et de mettre en évidence deux phénomènes majeurs : la levée de dégénérescence et la multiplication des fréquences propres. Nous établirons notamment qu'il existe autant de fréquences propres que d'oscillateurs couplés dans le système.

Aux concours ...

L'omniprésence des oscillateurs en physique se traduit par leur importance aux concours. Par exemple à l'oral de l'Agrégation Spéciale : « Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique » et « Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarités » ou à celui de l'AIPC : « Oscillateurs » et « Résonance ». Ils sont aussi largement présents dans les épreuves de montage de l'AEPC. On les retrouve enfin dans de nombreuses épreuves écrites que nous préciserons au fil du chapitre.

Sommaire

Fiche synthèse **14**
2.1 Universalité des oscillateurs harmoniques **19**
2.1.1 Oscillations autour d'une position d'équilibre stable 19
2.1.2 Prise en compte de l'amortissement 19
2.2 Oscillateurs non-linéaires **21**
2.2.1 Pendule simple : du linéaire au non-linéaire 21
2.2.2 Étude générale d'un oscillateur non-linéaire : portrait de phase 25
2.3 Oscillateurs paramétriques **28**
2.4 Couplage d'oscillateurs non amortis **28**
2.4.1 Exemples de systèmes couplés 28
2.4.2 Différents types de couplage 29
2.4.3 Deux oscillateurs : importance des vecteurs propres 29

Fiche synthèse

Cette fiche rassemble les résultats de CPGE sur l'oscillateur harmonique et l'oscillateur amorti par frottements fluides. C'est notamment l'occasion de réinvestir le concept de résonance. L'oscillateur amorti par frottements solides fait l'objet d'un complément dans le chapitre 3.

▷ Oscillateur harmonique

Un **oscillateur harmonique** est un système représenté, lorsqu'il est à une dimension et n'est soumis à aucune excitation, par une fonction $x(t)$ dépendant du temps et vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0}\,. \tag{2.1}$$

La quantité ω_0, positive[1], est appelée **pulsation propre** et est exprimée en rad · s^{-1} dans le SI. Son expression à partir des paramètres physiques dépend de la situation considérée. Deux situations canoniques sont à connaître :

Mécanique Pour une masse m d'abscisse l soumise au rappel d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0, on a en posant $x = l - l_0$ l'équation du mouvement

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx\,.$$

C'est un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Électronique Dans un circuit LC série, la charge q du condensateur vérifie

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{C}q = 0\,.$$

C'est un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Pour résoudre (2.1) on peut écrire au choix[2] :

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

ou

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)\,.$$

Supposons par exemple que l'oscillateur est initialement écarté de sa position d'équilibre sans vitesse initiale. Cela impose $x(t=0) = x_0$ et $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t\big|_{t=0} = 0$ de sorte que la première forme est la plus pratique, et on obtient dans tous les cas

$$x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)\,.$$

Il s'ensuit trois propriétés importantes de l'oscillateur harmonique :

- Les oscillations, sinusoïdales, persistent indéfiniment dans le temps sans atténuation.
- La période de l'oscillation est égale à $2\pi/\omega_0$ quelle que soit la condition initiale imposée, en particulier quelle que soit l'*amplitude* du mouvement. On parle d'**isochronisme** des oscillations.
- Enfin, l'énergie potentielle de l'oscillateur mécanique est

$$E_p = \frac{1}{2}kx(t)^2 = \frac{1}{2}kx_0^2\cos^2(\omega_0 t)$$

et son énergie cinétique est

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2}mx_0^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t)\,.$$

Avec $\omega_0^2 = k/m$ et en moyennant sur une période, on a :

$$\langle E_c\rangle = \langle E_p\rangle = \frac{1}{4}kx_0^2 = \frac{1}{2}E_m\,.$$

On parle d'équipartition de l'énergie mécanique et on peut voir l'oscillateur harmonique comme le parfait échangeur entre énergie potentielle et énergie cinétique.

En pratique, on soumet un oscillateur harmonique à une certaine excitation que l'on représente par une fonction $g(t)$ au second membre :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = g(t)\,.$$

La forme de la fonction g dépend du type d'excitation choisi ; cela sera développé dans les sections suivantes.

▷ Oscillateur harmonique amorti

Les oscillateurs physiques réels sont amortis par différentes sources de dissipation. Reprenons les exemples précédents.

Mécanique La dissipation vient des frottements (avec l'air ambiant, la liaison, le support, etc.). On les modélise par une force de frottements fluides de coefficient λ, ce qui mène à l'équation du mouvement

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - \lambda\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,.$$

En posant $Q = \sqrt{km}/\lambda$, on écrit :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0\,.$$

Électronique La dissipation vient de l'effet Joule lorsqu'on ajoute une résistance R. Dans un circuit RLC série, la charge q du condensateur vérifie

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = 0\,.$$

En posant $Q = \sqrt{L/C}/R$ il vient cette fois :

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 q = 0\,.$$

1. Lorsqu'on remplace le signe + par un signe – dans cette équation, le système devient instable. On discute ce cas dans le complément 2.1.
2. Développer le cosinus de la seconde forme redonne immédiatement la première de sorte que *ces deux solutions sont parfaitement équivalentes.*

La prise en compte de sources de dissipation mène donc au modèle de l'**oscillateur harmonique amorti**, qui répond à une nouvelle équation d'évolution qu'on met sous la *forme canonique* suivante :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0}\,. \tag{2.2}$$

La quantité ω_0 est toujours la pulsation propre et on a introduit un facteur sans dimension, positif lui aussi [3], noté Q et nommé **facteur de qualité**. On observe que si Q tend vers l'infini, on retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique (2.1). Ainsi, plus Q est élevé, plus l'amortissement est faible. En pratique, on ajoute comme pour l'oscillateur harmonique un second membre $g(t)$ permettant de décrire la réponse du système à une excitation :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = g(t)\,. \tag{2.3}$$

Ce système est donc décrit par une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Sa solution est déterminée de manière unique par la donnée de x et $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ en un point t_0, ainsi que par la donnée de g en tout t : c'est le *théorème de Cauchy*. La solution générale est de la forme

$$x(t) = x_{\mathrm{hom}}(t) + x_{\mathrm{part}}(t)\,,$$

où $x_{\mathrm{hom}}(t)$ est solution de (2.2) avec $g = 0$ (« solution de l'équation homogène ») et $x_{\mathrm{part}}(t)$ est une solution particulière de (2.2). Dans la suite de cette fiche, nous explorons deux types de solutions de l'équation (2.3), les réponses indicielle et spectrale, correspondant chacune à un choix de fonction g (et de conditions initiales le cas échéant). Ces solutions permettront de traiter la quasi-totalité des cas rencontrés en physique.

▷ Réponse indicielle

La **réponse indicielle** correspond au choix d'excitation $g(t)$ et de conditions initiales suivant :

$$x(t=0) = 0, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0 \quad \text{et} \quad g(t) = E\,H(t)\,.$$

La fonction H, appelée « fonction de Heaviside » ou encore « échelon », est telle que $H(t<0) = 0$ et $H(t\geq 0) = 1$. On impose donc au système d'atteindre, sous l'effet d'un forçage constant, une nouvelle valeur d'équilibre appelée *valeur consigne*. Une solution particulière de l'équation (2.2) est $x_{\mathrm{part}}(t<0) = 0$ et $x_{\mathrm{part}}(t\geq 0) = E/\omega_0^2$. La solution générale est ainsi :

$$x(t) = x_{\mathrm{hom}}(t) + \frac{E}{\omega_0^2} \qquad \text{pour } t \geq 0\,.$$

Attention :
Les conditions initiales ou les conditions de continuité s'appliquent à la *solution complète* $x(t)$, pas à x_{hom} ou x_{part} séparément.

La solution homogène $x_{\mathrm{hom}}(t)$ s'obtient en étudiant les racines du polynôme caractéristique

$$s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2 = 0\,.$$

Ce polynôme a pour discriminant $\Delta = \omega_0^2(1/Q^2 - 4)$ dont le signe dépend de la valeur de Q.

Régime apériodique : $\Delta > 0$ soit $Q < \frac{1}{2}$ Les deux racines réelles du polynôme caractéristique sont

$$s_\pm = \omega_0\left(-\frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right)\,.$$

Ces deux racines sont réelles et négatives. La solution est donc de la forme $x_{\mathrm{hom}}(t) = a_+\exp(s_+t) + a_-\exp(s_-t)$ et les conditions initiales imposent $a_+ + a_- + E/\omega_0^2 = 0$ et $s_+a_+ = -s_-a_-$. On en déduit donc :

$$x_{\text{apériod}}(t) = \frac{E}{\omega_0^2}\left(1 - \frac{s_+e^{s_-t} - s_-e^{s_+t}}{s_+ - s_-}\right)\,.$$

Régime critique : $\Delta = 0$ soit $Q = \frac{1}{2}$ Le polynôme caractéristique a une racine double négative $s_0 = -\omega_0$. La solution homogène est alors de la forme $x_{\mathrm{hom}}(t) = (a + bt)\exp(-\omega_0 t)$. Les conditions initiales imposent $a = -E/\omega_0^2$ et $b = -E/\omega_0$, d'où :

$$x_{\mathrm{crit}}(t) = \frac{E}{\omega_0^2}\left(1 - (1+\omega_0 t)e^{-\omega_0 t}\right)\,.$$

Régime pseudo-périodique : $\Delta < 0$ soit $Q > \frac{1}{2}$ Le polynôme caractéristique a deux racines complexes conjuguées

$$\underline{s}_\pm = \omega_0\left(-\frac{1}{2Q} \pm i\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\right)\,.$$

Le raisonnement est identique au cas apériodique, la seule différence étant que les exponentielles sont désormais complexes. On peut les développer sous forme de fonctions trigonométriques :

$$x_{\text{pseudo-T}}(t) = \frac{E}{\omega_0^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\sin(\Omega t + \varphi)\right),$$

où

$$\boxed{\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \qquad \text{est la pseudo-pulsation,}$$

et $\varphi = \arctan\left(\sqrt{4Q^2-1}\right)$. On a donc des pseudo-oscillations à la pulsation Ω, amorties exponentiellement avec une constante de temps $\tau = 2Q/\omega_0$. Plus Q est élevé, moins l'enveloppe exponentielle du sinus décroît donc rapidement.

3. Si Q n'est pas positif l'amortissement se transforme en amplification. De tels systèmes existent mais ce n'est pas l'objet de l'étude menée ici.

C'est évidemment cohérent avec le fait que « Q grand » correspond à un faible coefficient d'amortissement. On peut quantifier cette observation en définissant le décrément logarithmique δ, correspondant au logarithme du rapport des amplitudes de deux maxima successifs. Dans la mesure où la décroissance de l'amplitude est exponentielle, cette quantité est constante au cours du temps et on trouve

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}\,.$$

et on vérifie que plus Q est grand, plus le décrément est petit. Dans la limite $Q \longrightarrow +\infty$, ce qui correspond physiquement à un amortissement quasi nul, on retrouve le comportement en cosinus de pulsation propre ω_0 d'un oscillateur purement harmonique.

Comparaison des trois régimes On représente ces trois régimes sur la figure 2.1. Dans chaque régime, $x(t)$ tend vers la valeur asymptotique E/ω_0^2, mais à des « vitesses » différentes. Le régime pseudo-périodique atteint très rapidement la valeur consigne mais la dépasse largement au cours de ses pseudo-oscillations. Au contraire le régime apériodique est plus lent mais garantit de ne pas dépasser la consigne. L'un et l'autre peuvent être avantageux selon les cas. Le régime critique permet d'avoir la réponse la plus rapide possible sans dépassement.
Pour plus de détails, on pourra consulter toute référence de première année de CPGE [CPGE1].

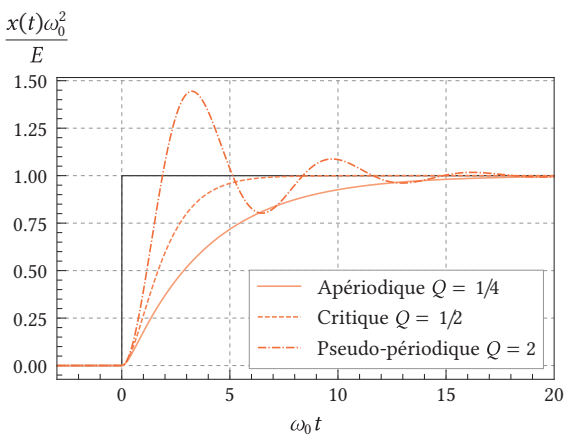


FIGURE 2.1 – Tracé des trois comportements possibles en réponse indicielle d'un oscillateur amorti. On a superposé en noir le tracé de $g(t)/E$.

▷ RÉPONSE SPECTRALE ET RÉSONANCES

Lorsque la fonction g dépend continûment du temps, il est généralement plus difficile de trouver une solution spécifique. Cependant, le problème étant linéaire, on peut se ramener à la résolution pour une seule composante de Fourier de g (voir appendice), que l'on note $ge^{i\omega t}$ (on suppose que la phase de l'excitation à l'origine est nulle, ce qui est toujours possible à un changement d'origine du temps près).

Remarque

En première année de CPGE, on ne fait pas explicitement mention de la transformée de Fourier : on écrit plutôt

$$g(t) = g\cos(\omega t)\,, \tag{2.4}$$

puis l'on passe aux exponentielles complexes en remarquant que l'on a

$$g(t) = \Re(\underline{g}(t)) \quad \text{avec} \quad \underline{g}(t) = ge^{i\omega t}\,.$$

Les coefficients du membre de gauche de l'équation (2.3) sont tous réels : on peut alors écrire $x(t) = \Re(\underline{x}(t))$ et la fonction $\underline{x}$ vérifie alors l'équation (2.3) avec g donné par $ge^{i\omega t}$.
Pour comprendre pourquoi tout signal réel peut se mettre sous la forme (2.4), il est cependant nécessaire de faire appel à la transformée de Fourier (voir appendice) : cette étape est donc admise dans les classes de CPGE.

L'étude de la solution homogène étant identique à l'étude de la réponse indicielle, on s'intéressera uniquement à la solution particulière. Cette solution est appelée **réponse spectrale**, et correspond donc au comportement du système soumis à une excitation à une seule fréquence (excitation harmonique), une fois que la solution homogène est devenue négligeable. Nous allons voir que le système oscille sinusoïdalement à la fréquence d'excitation, c'est pourquoi on parle également de **régime sinusoïdal forcé**.
Par linéarité, on cherche une solution à la pulsation ω, de la forme

$$\underline{x}(t) = \underline{X}(\omega)\exp(i\omega t)\,. \tag{2.5}$$

On a donc $\mathrm{d}^n\underline{x}/\mathrm{d}t^n = (i\omega)^n\underline{x}(t)$. L'équation (2.2) devient alors

$$\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}i\omega + \omega_0^2\right)\underline{X}(\omega) = g\,.$$

On exprime ainsi le coefficient $\underline{X}$ en fonction de la pulsation ω ou de la pulsation réduite $u = \omega/\omega_0$:

$$\underline{X}(\omega) = \frac{g}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\dfrac{\omega_0}{Q}} \quad \text{ou} \quad \underline{X}(u) = \frac{g}{\omega_0^2}\frac{1}{1 - u^2 + i\dfrac{u}{Q}}\,.$$

À la limite de fréquence nulle, lorsque $u \longrightarrow 0$, on retrouve la solution particulière de la réponse indicielle. De façon générale la réponse spectrale est de la forme $|\underline{X}|\exp(i(\omega t + \varphi))$, où $\varphi = \arg(\underline{X})$. On peut donc s'intéresser à l'évolution de $|\underline{X}|(u)$ et $\arg(\underline{X})(u)$ en fonction des valeurs de u, en échelle logarithmique. C'est le principe du **diagramme de Bode**. Dans la suite, on trace ces évolutions : si un maximum est présent, on parlera alors de *résonance*.

Résonance en position Les fonctions $|\underline{X}|$ et $\arg(\underline{X})$ sont tracées sur la figure 2.2. La fonction $|\underline{X}|$ est

- strictement décroissante si $Q < 1/\sqrt{2}$;
- minimale en $u = 0$ et maximale en $u = \sqrt{1 - 1/2Q^2}$ si $Q > 1/\sqrt{2}$.

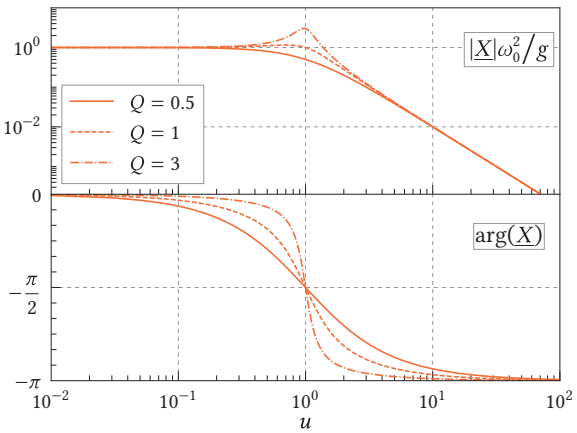


FIGURE 2.2 – Tracé de $|\underline{X}|$ et $\arg(\underline{X})$ en fonction de u.

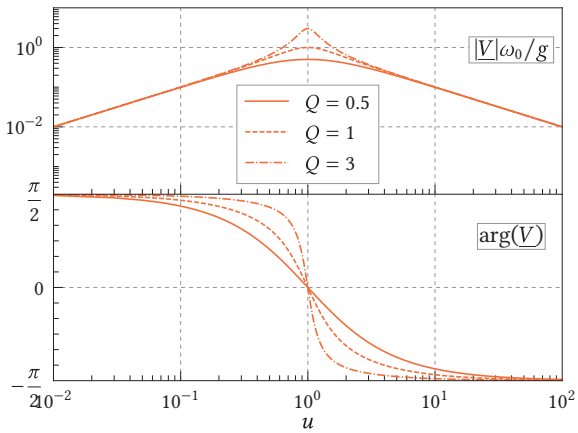


FIGURE 2.3 – Tracé de $|\underline{V}|$ et $\arg(\underline{V})$ en fonction de u.

Dans ce dernier cas, la valeur maximale de $|\underline{X}|\omega_0^2/g$ est alors $1/\sqrt{1-1/4Q^2}$: ce pic de la réponse spectrale correspond à une résonance et on retiendra la pulsation de résonance en position

$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}\,.$$

Résonance en vitesse Il peut s'avérer que la grandeur étudiée n'est pas directement x mais $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, par exemple si l'on mesure le courant dans un circuit RLC (le courant étant la dérivée de la charge). Pour la solution $\underline{x}$ considérée dans l'équation (2.5), on a $\mathrm{d}\underline{x}/\mathrm{d}t = i\omega\underline{X}(\omega)\exp(i\omega t)$. La grandeur d'intérêt est donc $\underline{V}(\omega) = i\omega\underline{X}(\omega)$. On a

$$\underline{V}(u) = \frac{g}{\omega_0}\frac{iu}{1-u^2+i\,u/Q} = \frac{gQ}{\omega_0}\frac{1}{1+iQ\left(u-\frac{1}{u}\right)}\,.$$

De même que précédemment, on étudie les fonctions $|\underline{V}|$ et $\arg(\underline{V})$. Celles-ci sont tracées sur la figure 2.3 qui permet de constater que la fonction $|\underline{V}|$ possède un maximum $\underline{V}_{\max} = gQ/\omega_0$ en $u = 1$ quelle que soit la valeur de Q. On a donc de nouveau une résonance. Plusieurs commentaires importants s'imposent :

- la résonance en vitesse, contrairement à celle en position, existe quelle que soit la valeur de Q ;
- contrairement à la résonance en position, la fréquence de résonance est indépendante du facteur de qualité Q puisqu'elle est égale à la fréquence propre du système ;
- lors de la résonance, on a $\arg(\underline{V}) = 0$, c'est-à-dire que l'excitation et la réponse sont *en phase* ;
- même si la position du pic de résonance ne dépend pas de Q, sa hauteur et sa largeur en dépendent. Notamment, la bande passante du pic, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de u telles que $|\underline{V}| > |\underline{V}|_{\max}/\sqrt{2}$ a pour largeur $\Delta u = 1/Q$.

Remarque

On pourrait poursuivre et étudier la résonance en accélération, etc. Cependant cela serait d'un intérêt limité car on mesure rarement ces grandeurs d'une part, et d'autre part le raisonnement suivi serait rigoureusement le même.

▷ Dualité entre les réponses

Pour conclure, on peut apprécier le fait que les paramètres importants dans la réponse indicielle jouent un rôle tout aussi important, mais différent, dans la réponse spectrale. La pulsation propre fixe l'échelle de temps ou de fréquence du système, tandis que le facteur de qualité influence fortement la réponse dans les deux cas.

- Dans le cas indiciel, Q caractérise la durée de la réponse et change la valeur de la pseudo-pulsation. La valeur critique est $Q = 1/2$.
- Dans le cas spectral, Q caractérise la hauteur et la largeur des pics de résonance, ainsi que la position de la résonance en position. La valeur critique est ici $Q = 1/\sqrt{2}$.

Le facteur de qualité a donc des effets très différents selon les réponses ! Cela relie des comportements que l'on n'aurait pas imaginé être corrélés [4]. Par exemple, un système à réponse longue dans le temps aura forcément une bande passante très réduite — c'est le cas du diapason. À l'inverse, si l'on souhaite limiter les oscillations d'un système autour de sa valeur d'équilibre, on fixe le facteur de qualité Q et donc la pulsation de résonance en position...

Le diapason

Le diapason est un exemple de système où la dualité des réponses s'observe bien. En effet, l'usage naturel d'un diapason est de frapper celui-ci fortement puis

4. En allant plus loin, on peut montrer que la réponse indicielle est reliée à la transformée de Fourier de la réponse spectrale, ce qui justifie ces corrélations.

d'écouter le son produit : il s'agit d'une étude en réponse indicielle. Le son produit est audible pendant une longue durée grâce à un facteur de qualité Q très élevé (plusieurs milliers). On peut cependant aussi étudier la réponse spectrale du diapason : on a alors un pic de résonance très étroit et très haut, toujours grâce au facteur Q élevé !
Lors de l'étude de la réponse spectrale de ce système, il est important de garder en tête que la solution homogène reste présente, mais elle décroît exponentiellement avec un temps caractéristique proportionnel à Q/ω_0. Le facteur Q étant élevé, celle-ci peut donc persister un long moment : pour $Q \sim 10^3$ et $f_0 = 440\,\text{Hz}$, on peut l'observer pendant plusieurs secondes après le début de l'excitation. Il est donc important d'attendre un temps suffisamment long à chaque changement des paramètres de l'expérience. Cet effet s'observe dans toutes les études de réponse spectrale mais est bien plus visible dans le cas du diapason à cause du lent amortissement de la solution homogène.

▷ Portrait de phase

Afin de visualiser qualitativement le comportement de l'oscillateur harmonique, on peut chercher à reformuler l'équation (2.1). En effet, en multipliant celle-ci par $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, on fait apparaître la conservation de l'énergie :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2\right) = 0\,.$$

Pour toute trajectoire $x(t)$, on a donc

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 = \text{cste}\,,$$

ce qui signifie qu'il existe une constante a telle que

$$\left(\frac{1}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + x^2 = a\,.$$

Dans le plan $\left(x, \dot{x}/\omega_0\right)$, cette équation est l'équation d'un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{a}$ (la constante a étant forcément positive). Le tracé des trajectoires dans ce plan est appelé **portrait de phase** : il s'agit d'un outil très puissant pour l'étude des oscillateurs, qui sera réinvesti dans le complément 2.2. On dispose d'autant de trajectoires qu'il y a de constantes a : on trace quelques-unes d'entre elles sur la figure 2.4.

Intéressons-nous à quelques propriétés des trajectoires dans l'espace des phases.

Conditions initiales Des conditions initiales $x(0)$ et $\dot{x}(0)$ permettent de repérer un point dans le portrait de phase. Ce point permet de fixer la constante a, ce qui permet en retour de fixer la trajectoire. Ainsi, on retrouve bien le fait que les conditions initiales fixent intégralement la trajectoire.

Croisement de trajectoires Deux trajectoires dans l'espace des phases ne peuvent se croiser : si cela était le cas, les trajectoires auraient les mêmes valeurs de x et $\dot{x}$ en un point. En prenant ce point comme condition initiale, les trajectoires seraient alors identiques car elles auraient les mêmes conditions initiales.

Sens de parcours Une trajectoire dans l'espace des phases possède un sens de parcours, que l'on peut trouver grâce au signe de $\dot{x}$: dans la partie supérieure, on a $\dot{x} > 0$, donc x doit augmenter, ce qui signifie que l'on parcourt la trajectoire de la gauche vers la droite. Dans la partie inférieure, le sens de parcours est de la droite vers la gauche.

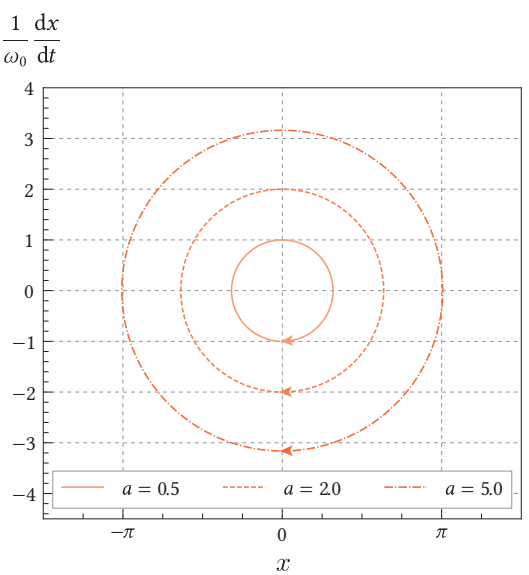


Figure 2.4 – Portrait de phase de l'oscillateur harmonique. On observe que dans le demi-espace $\dot{\theta} > 0$, on parcourt les trajectoires de la gauche vers la droite, tandis qu'on les parcourt dans le sens opposé dans le demi-espace $\dot{\theta} < 0$.

2.1 Universalité des oscillateurs harmoniques

2.1.1 Oscillations autour d'une position d'équilibre stable

Considérons un système conservatif décrit par une variable $x(t)$, évoluant dans un profil d'énergie potentielle $E_p(x)$ et étudions son mouvement autour d'une position d'équilibre stable x_0. Par définition de l'équilibre, x_0 correspond à un extremum d'énergie potentielle et $\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}x\big|_{x=x_0} = 0$. Cette étude a déjà été réalisée au chapitre 1 : en réalisant un développement de Taylor de E_p autour de x_0, avec l'annulation de cette première dérivée, on peut écrire :

$$E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2 + \dots\,.$$

L'énergie potentielle étant définie à une constante près, on peut fixer $E_p(x_0) = 0$. L'équilibre étant stable on a $\mathrm{d}^2E_p/\mathrm{d}x^2 > 0$ de sorte que dans le voisinage[5] de $x = x_0$, en posant avec $k = \mathrm{d}^2E_p/\mathrm{d}x^2\big|_{x=x_0}$ et $X = x - x_0$, l'énergie potentielle s'écrit :

$$E_p(X) = \frac{1}{2}kX^2\,.$$

Cette approximation parabolique du potentiel correspond à décrire localement l'énergie potentielle par un puits harmonique. Il faut ensuite considérer l'énergie cinétique du système (quadratique en $\dot{x}$),

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\,,$$

tout en notant qu'il pourrait tout aussi bien s'agir de l'énergie contenue dans une bobine dans un circuit RLC (si x était la charge aux bornes du condensateur). On remarque que l'on a $\dot{x} = \dot{X}$. L'énergie totale est donc

$$E = \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}kX^2\,.$$

Par conservation de l'énergie, on obtient l'équation du mouvement

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \Longrightarrow \ddot{X} + \frac{k}{m}X = 0\,,$$

qui est bien l'*équation d'un oscillateur harmonique.*

Harmonicité des petites oscillations

Considérons les petites oscillations au voisinage d'une position d'équilibre x_0 stable, c'est-à-dire

$$\left.\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = 0 \quad \text{et} \quad \left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0} > 0\,.$$

Ces oscillations sont *harmoniques* et la raideur k du système masse-ressort équivalent est donnée par

$$\boxed{k = \left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}}\,.$$

La solution générale est

$$X(t) = X_0\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,. \tag{2.6}$$

Un tel système présente donc des *oscillations* à une fréquence dépendant du rapport k/m. Son énergie totale s'écrit

$$E_0 = \frac{1}{2}\frac{k}{\omega_0^2}\omega_0^2X_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kX_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}kX_0^2\,. \tag{2.7}$$

Remarque

Dans le cas où la position d'équilibre est instable, on a simplement $\mathrm{d}^2E_p/\mathrm{d}x^2\big|_{x=x_0} < 0$. L'équation du mouvement est la même, mais on l'écrit

$$\ddot{X} - \frac{k}{m}X = 0 \quad \text{avec} \quad k = -\left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}\,.$$

Les solutions sont donc des exponentielles croissantes, qui sont donc divergentes aux temps longs : cela traduit l'instabilité.

2.1.2 Prise en compte de l'amortissement

Supposons maintenant qu'en une période, le système perde une énergie ΔE s'exprimant comme une fraction constante de l'énergie totale, sous la forme

$$\left|\frac{\Delta E}{E}\right| = \frac{2\pi}{Q}\,,$$

5. On peut quantifier rigoureusement la notion de voisinage ici en demandant que le terme d'ordre suivant, $\frac{1}{6}\left.\frac{\mathrm{d}^3E_p}{\mathrm{d}x^3}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^3$, reste négligeable devant le terme harmonique.

6. À ce stade, Q est une constante quelconque, mais nous montrerons qu'on peut l'interpréter comme le facteur de qualité d'un oscillateur harmonique amorti.

dans laquelle on introduit [6] la constante Q. L'énergie E dépend donc du temps selon :

$$\frac{E(t+\frac{2\pi}{\omega_0})-E(t)}{E(t)} = -\frac{2\pi}{Q}\,.$$

Dans la limite où la variation d'énergie est faible devant l'énergie elle-même ($Q \gg 1$, ou $\Delta E \ll E$), on peut approximer

$$\frac{2\pi}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\frac{2\pi}{Q}E(t)\,.$$

On a donc

$$E(t) = E_0 e^{-\gamma t} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{\omega_0}{Q}\,.$$

La quantité γ est alors telle que $\gamma \ll \omega_0$. En s'inspirant de l'énergie d'un oscillateur harmonique écrite dans l'équation (2.7), on peut retrouver cette expression exponentiellement décroissante pour l'énergie en multipliant la solution (2.6) par un facteur $e^{-\gamma t/2}$: en effet on a alors

$$\begin{aligned}
X &= X_0 e^{-\gamma t/2}\cos(\omega_0 t+\varphi)\,,\\
\dot{X} &= X_0 e^{-\gamma t/2}\,\omega_0\left(-\frac{\gamma}{2\omega_0}\cos(\omega_0 t+\varphi)-\sin(\omega_0 t+\varphi)\right)\,,\\
\ddot{X} &= X_0 e^{-\gamma t/2}\,\omega_0^2\left(\left(\frac{\gamma}{2\omega_0}\right)^2\cos(\omega_0 t+\varphi)\right.\\
&\qquad \left.+\frac{\gamma}{\omega_0}\sin(\omega_0 t+\varphi)-\cos(\omega_0 t+\varphi)\right)\,.
\end{aligned}$$

On a donc à l'ordre le plus bas non nul en γ/ω_0 :

$$\frac{1}{2}m\dot{X}^2+\frac{1}{2}kX^2 = \frac{1}{m}\omega_0^2 X_0^2 e^{-\gamma t} = E_0 e^{-\gamma t}\,,$$

et

$$\ddot{X}+\omega_0^2 X = X_0 e^{-\gamma t/2}\,\omega_0\gamma\sin(\omega_0 t+\varphi)\,,$$

soit

$$\boxed{\ddot{X}+\omega_0^2 X = -\gamma\dot{X} = -\frac{\omega_0}{Q}\dot{X}}\,.$$

On observe que l'on retrouve la solution pseudo-périodique dans la limite $Q \gg 1$, ce qui correspond ici à la limite $\gamma \ll \omega_0$ que nous avons prise.
On a donc démontré que le terme d'amortissement dans un oscillateur harmonique est bien plus général qu'un simple terme de frottements visqueux : il permet de rendre compte de toute perte d'énergie à un taux constant $1/Q$!

Remarque

Ce résultat permet aussi de modéliser le comportement en régime sinusoïdal forcé. Ainsi, tout système oscillant avec une légère perte d'énergie peut être modélisé par les réponses en position et en vitesse étudiées dans la fiche synthèse. C'est par exemple le cas d'un diapason : le système physique est riche et complexe et met en jeu des équations de mécanique des milieux continus, mais en première approximation le diapason se comporte comme un oscillateur harmonique amorti et il possède donc une résonance dont on connaît les propriétés. On trouvera des détails dans [1].

Amortissement par rayonnement

Les calculs précédents permettent de comprendre d'où provient le terme d'amortissement dans le modèle de l'électron élastiquement lié. Cet électron perd de l'énergie par rayonnement selon la formule de Larmor :

$$\mathcal{P} = \frac{q^2a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\,,$$

où q est la charge et a est l'accélération. Le mouvement de l'électron (ou plus précisément du barycentre du nuage électronique) est harmonique de période $2\pi/\omega_0$ et d'amplitude R. L'accélération au carré moyenne $\langle a^2\rangle$ s'écrit alors

$$\langle a^2\rangle = \frac{1}{2}\left(R\omega_0^2\right)^2\,,$$

le facteur $1/2$ provenant de la valeur moyenne du $\cos^2$. On en déduit que sur une période, la variation d'énergie est

$$\Delta E = \frac{q^2R^2\omega_0^3}{6\varepsilon_0 c^3}\,.$$

Or, l'énergie totale est en général $E_0 = kX_0^2/2$ avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et X_0 l'amplitude des oscillations, soit ici

$$E_0 = \frac{1}{2}m\omega_0^2R^2 \quad \text{d'où} \quad \frac{2\pi}{Q} = \frac{2q^2\omega_0}{6mc^3\varepsilon_0}\,,$$

avec m la masse de l'électron. On en déduit

$$\boxed{Q = \frac{6\pi m\varepsilon_0 c^3}{q^2\omega_0}}\,.$$

Selon le résultat de cette partie, on a démontré que la perte d'énergie par formule de Larmor pouvait être modélisée dans l'équation du mouvement par un terme d'amortissement d'oscillateur harmonique, à condition d'avoir $Q \gg 1$! Pour un nuage composé d'un seul électron, on trouve

$$Q = \frac{1{,}60.10^{23}\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}}{\omega_0}\,,$$

ce qui signifie que l'approximation est valable pour la grande majorité des rayonnements. Cette modélisation est bien plus simple que la prise en compte du terme exact qui ferait apparaître des dérivées troisièmes par rapport au temps. On pourrait cependant montrer analytiquement que ces termes se ramènent à un terme de frottement fluide lorsque $\gamma \ll \omega_0$ (voir [2]).

2.2 Oscillateurs non-linéaires

Dans cette section, nous nous intéresserons à une classe très générale de systèmes en physique : les oscillateurs non-linéaires. Un oscillateur est dit **non-linéaire** s'il est caractérisé par une équation différentielle ne respectant pas le principe de superposition : si $x_1(t)$ est la réponse pour un forçage $F_1(t)$ donné et $x_2(t)$ la réponse au forçage $F_2(t)$, alors la combinaison linéaire $ax_1(t) + bx_2(t)$ *n'est pas* la réponse pour le forçage $aF_1(t) + bF_2(t)$! Ces systèmes sont bien plus difficiles à étudier que les oscillateurs linéaires tels que l'oscillateur harmonique mais possèdent en contre-partie des propriétés physiques bien plus riches.
Commençons par l'étude de l'oscillateur non-linéaire que l'on rencontre le plus souvent dans les cursus de physique : le pendule simple. Cet exemple s'appuie sur le cours [3].

Aux concours ...

Des études d'oscillateurs non linéaires sont proposées dans A2010, A2019 et AIPC2012.

2.2.1 Pendule simple : du linéaire au non-linéaire

Étudions le mouvement d'un point matériel M de masse m relié par un fil de masse négligeable de longueur l à un point O fixe dans un référentiel galiléen. On se restreint à un mouvement dans le plan généré par les vecteurs $\vec{g}$ et $\overrightarrow{OM}(t=0)$. Un schéma est donné sur la figure 2.5. L'équation du mouvement est bien connue (voir [CPGE1]) :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 \sin\theta = 0\,, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}\,, \tag{2.8}$$

où θ est l'angle entre la verticale donnée par $\vec{g}$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

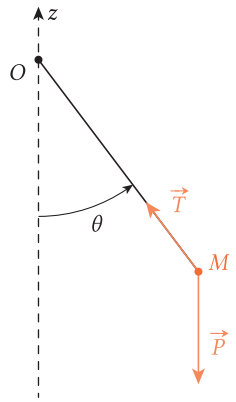


Figure 2.5 – Schéma du pendule simple, avec les représentations du poids $\vec{P}$ ainsi que de la tension $\vec{T}$ du fil s'exerçant au point M.

Remarque

La même étude peut être effectuée avec un pendule *pesant*, pour lequel la masse de la tige reliant la masse m au point d'attache n'est pas négligeable. L'équation du mouvement s'obtient par exemple via le théorème du moment cinétique et possède deux différences par rapport au pendule simple :

- le moment d'inertie de la tige s'ajoute à ml^2,
- il faut rajouter la contribution du moment du poids de la tige [a], qui sera également proportionnelle à $\sin\theta$.

L'équation du mouvement reste (2.8), mais avec une expression de ω_0 différente.

a. On peut annuler cette contribution en *équilibrant* le pendule à vide, mais cela n'enlève pas la contribution du moment d'inertie dans le premier membre de l'équation !

Aux concours ...

Les pendules simple et pesant ont fait l'objet d'une partie des épreuves AIPC2017 et AIPC2023.

Linéarisation En général, on traite l'équation du mouvement (2.8) au premier ordre en θ. On suppose $\theta \ll 2\pi$, ce qui permet d'écrire $\sin\theta \simeq \theta$. On retrouve alors l'équation

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\theta = 0$$

d'un oscillateur harmonique. Elle est linéaire (par construction) et on l'a résolue plus haut : les solutions sont de la forme $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$ et conduisent à des oscillations à une pulsation $\sqrt{g/l}$ *pour toutes les conditions initiales.* Rappelons que l'on parle d'**isochronisme** des oscillations.
Cependant, la linéarisation de l'équation induit forcément des erreurs dès que θ n'est plus suffisamment petit par rapport à 2π et, pour améliorer la modélisation, on est amené à réaliser un développement limité du sinus à un ordre supérieur.

Solutions d'ordre supérieur Réalisons un développement perturbatif plus complet. Il nous faut pour cela identifier un petit paramètre en puissances duquel nous pourrons développer la solution. Nous avons vu précédemment que $\theta \ll 2\pi$ de sorte que θ pourrait être un bon candidat mais il varie au cours du temps et n'est donc pas à proprement parler un *paramètre*. On lui préfèrera l'angle initial θ_0, constant et faible lui aussi, que l'on notera dorénavant ε afin d'insister sur son caractère infinitésimal. On prendra ainsi pour conditions initiales (sans perte de généralité)

$$\theta(t=0) = \varepsilon \quad \text{et} \quad \left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0\,. \tag{2.9}$$

On cherche alors une solution sous la forme

$$\theta(t) = \varepsilon\theta_1(t) + \varepsilon^2\theta_2(t) + \dots .$$

Attention :

Les conditions initiales s'appliquent toujours à la fonction $\theta(t)$. Ainsi, on a

$$\varepsilon\theta_1(0) + \varepsilon^2\theta_2(0) + \dots = \varepsilon .$$

En identifiant les puissances de ε, on trouve les conditions correspondantes sur les θ_i :

$$\theta_1(0) = 1 \quad \text{et} \quad \theta_i(0) = 0 \quad \text{pour} \quad i > 1 .$$

De même, on trouve que pour tout i on a $\mathrm{d}\theta_i/\mathrm{d}t\big|_{t=0} = 0$.

L'équation (2.8) devient, avec cette forme de solution et en s'arrêtant à l'ordre 3 :

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2\theta_1}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon^2\frac{\mathrm{d}^2\theta_2}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon^3\frac{\mathrm{d}^2\theta_3}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\sin\left(\varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \varepsilon^3\theta_3\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) = 0 .$$

On doit développer le sinus en puissances de ε :

$$\sin\left(\varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \varepsilon^3\theta_3\right) = \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \varepsilon^3\theta_3 - \frac{1}{6}\left(\varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \varepsilon^3\theta_3\right)^3 + \dots .$$

En ne conservant que les termes d'ordre au plus 3, on obtient pour finir

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2\theta_1}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon^2\frac{\mathrm{d}^2\theta_2}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon^3\frac{\mathrm{d}^2\theta_3}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\left(\varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \varepsilon^3\left(-\frac{1}{6}\theta_1^3 + \theta_3\right)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) = 0 .$$

On a donc, en identifiant les équations ordre par ordre et en faisant appel aux conditions initiales (2.9) :

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2\theta_1}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\theta_1 = 0 && \Longrightarrow \theta_1(t) = \cos(\omega_0 t) ,\\
&\frac{\mathrm{d}^2\theta_2}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\theta_2 = 0 && \Longrightarrow \theta_2(t) = 0 ,\\
&\frac{\mathrm{d}^2\theta_3}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\theta_3 = \frac{1}{6}\omega_0^2\theta_1^3 = \frac{\omega_0^2}{24}\cos(3\omega_0 t) + \frac{\omega_0^2}{8}\cos(\omega_0 t) .
\end{aligned}$$

On observe que la dernière équation correspond à un oscillateur harmonique à la pulsation ω_0, forcé à la pulsation ω_0. Ce système est instable [7] : ainsi, θ_3 diverge lorsque t augmente, ce qui fait que le développement perturbatif n'est plus valable au bout d'un certain temps.

Méthode de Poincaré-Lindstedt Afin d'éviter les divergences, on doit réaliser un développement perturbatif plus poussé. On se propose alors de faire un double développement perturbatif sur θ, toujours, mais aussi sur ω :

$$\begin{cases} \tau = \omega t \qquad \text{avec} \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \dots , \\ \theta(\tau) = \varepsilon\theta_1(\tau) + \varepsilon^2\theta_2(\tau) + \dots . \end{cases}$$

Un tel développement permet de rendre explicite une modification de la fréquence avec l'amplitude initiale. L'équation (2.8) reste alors à l'ordre 1

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta_1}{\mathrm{d}\tau^2} + \theta_1 = 0 .$$

On en déduit que l'on a $\theta_1(\tau) = \cos(\tau)$. À l'ordre 2, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta_2}{\mathrm{d}\tau^2} + \theta_2 = -2\frac{\omega_1}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}^2\theta_1}{\mathrm{d}\tau^2} = 2\frac{\omega_1}{\omega_0}\cos(\tau) .$$

Afin d'éviter l'instabilité décrite au paragraphe précédent, on doit annuler le terme de forçage, en prenant $\omega_1 = 0$. On a alors $\theta_2 = 0$ compte tenu des conditions initiales. Enfin, l'équation à l'ordre 3 donne

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta_3}{\mathrm{d}t^2} + \theta_3 = -2\frac{\omega_2}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}^2\theta_1}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{1}{6}\theta_1^3 = \frac{1}{24}\cos(3\tau) + \frac{1}{8}\left(1 + 16\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)\cos(\tau) .$$

De nouveau, pour annuler le terme de forçage à ω_0, on doit avoir $\omega_2 = -\omega_0/16$. On en déduit alors

$$\omega = \omega_0\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{16}\right) .$$

On peut faire apparaître la période T dans la formule précédente : on a $T = 2\pi/\omega$ et on obtient la formule de Borda :

$$\boxed{T = T_0\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{16}\right)}, \tag{2.10}$$

où $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$. La pulsation est donc dépendante de l'amplitude des oscillations !

Remarque

C'est justement le fait que la fréquence varie avec l'amplitude qui faisait échouer la méthode précédente. En général, dès qu'une méthode perturbative fait apparaître un forçage rendant le système instable, on peut se douter qu'un des paramètres du système doit aussi être développé de façon perturbative, ce qui amène ici à la méthode de Poincaré-Lindstedt.

7. On peut le voir en interprétant l'équation du mouvement comme un oscillateur harmonique à $Q = +\infty$: la hauteur du pic de résonance en vitesse lorsque $\omega = \omega_0$ est infinie. Plus concrètement, on peut aussi résoudre l'équation différentielle en prenant en compte les conditions initiales : on obtient alors

$$\theta_3(t) = \frac{1}{96}\sin(\omega_0 t)(6\omega_0 t + \sin(2\omega_0 t)) ,$$

et la partie proportionnelle à t fait que θ_3 n'est pas borné au cours du temps.

On peut enfin résoudre l'équation pour θ_3 et on obtient :

$$\theta(t) = \varepsilon\cos(\omega t) + \frac{\varepsilon^3}{192}(\cos(\omega t) - \cos(3\omega t)) + \mathcal{O}(\varepsilon^4)\,,$$
$$\omega = \omega_0\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{16}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\,.$$

La correction en ε^2 dans ω nous permet de développer les cosinus dans le terme en ε^3 de $\theta(t)$, pour obtenir une expression équivalente pour $\theta(t)$:

$$\theta(t) = \varepsilon\cos\left(\omega_0\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{16}\right)t\right) + \frac{\varepsilon^3}{192}(\cos(\omega_0 t) - \cos(3\omega_0 t)) + \mathcal{O}(\varepsilon^4)\,.$$

Les propriétés ainsi obtenues pour le pendule simple sont universelles et sont caractéristiques des systèmes non linéaires.

Caractéristiques des oscillateurs non linéaires

L'apparition de non-linéarités dans le mouvement d'un oscillateur entraîne trois effets :

- une modification de la fréquence fondamentale du mouvement ;
- une apparition d'harmoniques aux multiples de la fréquence fondamentale du mouvement ;
- une dépendance des caractéristiques dans les conditions initiales ;

Ces trois propriétés sont la signature d'un comportement non-linéaire et se retrouvent dans des systèmes extrêmement variés.

Conseil didactique

La méthode utilisée ici est assez calculatoire, mais le résultat est physiquement très important. Il est donc intéressant d'en présenter les résultats même en éludant les calculs. On pourra aussi présenter une résolution numérique de l'équation non-linéaire (2.8) avec une étude spectrale de la réponse.

Période d'oscillation Il est intéressant, pour éviter le développant perturbatif précédent, d'établir des méthodes de calculs allégées qui mènent à un résultat partiel mais souvent suffisant. Dans le cas du pendule simple par exemple, on peut trouver l'expression de la période d'oscillation pour toute position initiale. Pour ce faire, on multiplie l'équation du mouvement (2.8) par $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$: on obtient la conservation de l'énergie (à un facteur m près)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \omega_0^2\cos\theta\right) = 0\,.$$

Supposons qu'on lâche le pendule avec un angle θ_0 ($\theta_0 < \pi$, de façon à faire moins d'un tour complet), sans vitesse initiale. Par intégration, on a donc

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)\,.$$

On se place sur le premier quart de période du mouvement : θ évolue de θ_0 à 0 tandis que t évolue de 0 à $T/4$. On peut prendre la racine carrée de l'équation précédente et on obtient

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{2}\omega_0\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}\,,$$
$$\text{soit} \qquad \mathrm{d}t = \frac{-\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2}\omega_0\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}\,.$$

Par intégration sur le quart de période, il vient donc

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}\omega_0}\int_0^{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}\,.$$

L'intégrale dans le membre de droite n'a pas d'expression simple à partir de fonctions de base : il s'agit d'une intégrale elliptique. On peut cependant l'évaluer numériquement. On la note $\pi I(\theta_0)/\sqrt{2}$; la fonction I est tracée sur la figure 2.6 et on a

$$T = T_0\, I(\theta_0) \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}\,.$$

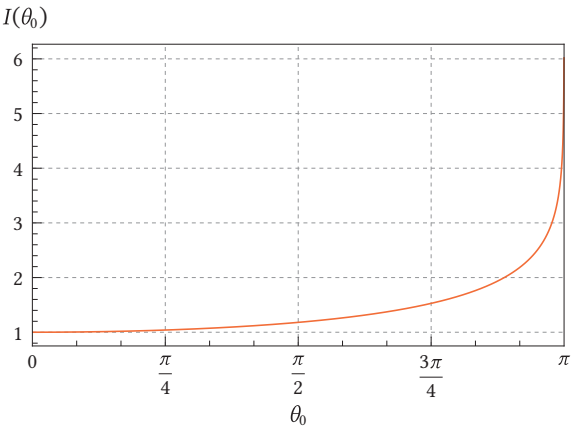


FIGURE 2.6 – Tracé de la fonction I pour θ_0 entre 0 et π.

On peut donc trouver numériquement la période des oscillations pour toute amplitude de départ, ce qui est souvent satisfaisant en pratique. Par ailleurs, une étude asymptotique montre que la fonction I s'écrit

$$I(\theta_0) = 1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \mathcal{O}(\theta_0^4)\,.$$

On a donc $T = T_0\left[1 + \theta_0^2/16 + \mathcal{O}(\theta_0^4)\right]$ et on retrouve la formule de Borda (2.10). En revanche, on n'obtient pas la résolution complète de l'équation à l'ordre 3.

Étude qualitative du mouvement complet Dans cette partie sur le pendule non-linéaire nous avons d'abord présenté le calcul complet pour les petites oscillations, difficile, qui mène à la solution exacte à l'ordre 3. Nous avons ensuite présenté une solution numérique partielle du problème permettant de retrouver la formule de Borda. Dans toute la suite de ce complément nous nous intéressons à un outil très puissant, le portrait de phase, qui permet de *comprendre* le comportement du système sans avoir à le résoudre. Cet outil est connu et nous en avons rappelé les principales propriétés en fiche synthèse. Il est ici question de le mettre en application.

On a montré ci-dessus que la quantité $1/2\left(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t\right)^2 - \omega_0^2\cos\theta$ était constante au cours du mouvement. La donnée de conditions initiales $(\theta(0),\ \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t\big|_{t=0})$ permet de l'évaluer et le mouvement sera tel que

$$\left(\frac{1}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 2\cos(\theta) = C \quad \text{avec} \quad C = \text{cste}\,. \tag{2.11}$$

Les trajectoires dans le portrait de phase dépendent donc de la valeur de la constante C : on en trace quelques-unes sur la figure 2.7.

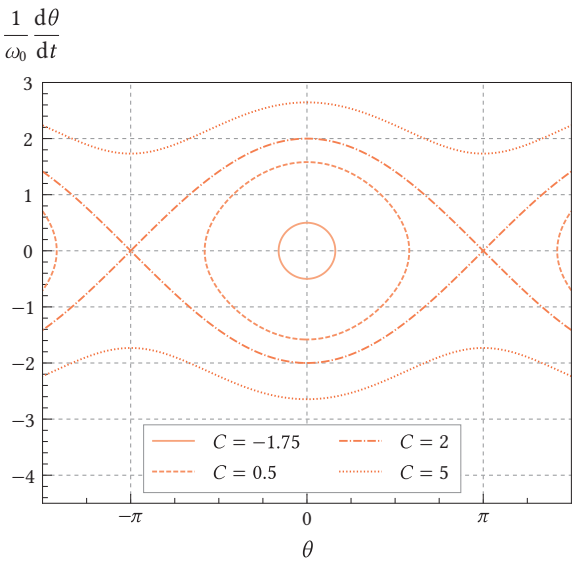


FIGURE 2.7 – Portrait de phase d'un pendule pesant pour différentes valeurs de C.

Ce portrait de phrase permet de comprendre qualitativement les différents types de mouvements possibles. Pour ce faire, remarquons que l'on doit toujours avoir $-2\cos\theta < C$, soit $\cos\theta > -C/2$. Ainsi, on différencie les mouvements selon la valeur de C.

$-2 < C < 2$ Dans ce cas, il existe deux valeurs de θ telles que $-2\cos\theta = C$. On note ces valeurs $\pm\theta_0$. Lorsque $\theta = \pm\theta_0$, on a donc $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = 0$. Ainsi, on a un mouvement *oscillatoire* d'amplitude $2\theta_0$; la période a été calculée dans la partie précédente. Sur le portrait de phase de la figure 2.7, cela se traduit par une trajectoire qui boucle sur elle-même : en partant d'un point donné, on y revient toujours en un temps fini. Ceci est valable modulo 2π : si on décale θ de 2π, le tracé de la trajectoire est inchangé.

$C > 2$ On n'a plus de valeur de θ telle que $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = 0$. Ainsi la vitesse ne s'annule pas et θ croît (ou décroît, selon la trajectoire) indéfiniment. Le mouvement est une *révolution*. Le même choix de C amène d'ailleurs à deux trajectoires, selon le sens de rotation.

$C = 2$ Il s'agit d'une valeur critique, pour laquelle les deux comportements précédents se rejoignent. Le pendule prend un temps infiniment long à atteindre $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = 0$ (correspondant à $\theta = p\pi$ avec p entier relatif impair).

Lorsque C est proche de -2 (avec toujours $C > -2$), on peut poursuivre l'étude plus loin. Posons $C = -2 + \varepsilon^2$ avec $\varepsilon > 0$. On a alors

$$-2\cos\theta_0 = -2 + \varepsilon^2 \quad \text{soit} \quad \theta_0 = \arccos\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) = \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\,.$$

Ainsi, les oscillations sont d'ordre ε, ce qui permet de faire l'approximation des petites oscillations. La trajectoire est donc telle que

$$\left(\frac{1}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = -2 + \varepsilon^2\,,$$

soit

$$\left(\frac{1}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \theta^2 = \varepsilon^2\,.$$

Cette équation est la représentation d'un cercle : on a donc des trajectoires circulaires dans le portrait de phase dès lors que les oscillations sont de faible amplitude : on retrouve le comportement en oscillateur harmonique du pendule simple aux petits angles. À mesure que C augmente, les trajectoires se déforment à cause de l'apparition de non-linéarités jusqu'à changer qualitativement dès que $C > 2$. On en déduit une autre propriété fondamentale des non-linéarités : celles-ci entraînent l'apparition de *comportements qualitativement différents* en fonction des conditions initiales.

On peut comprendre l'origine de ces différents comportements en reliant l'étude de (2.11) à un bilan énergétique. En effet, l'énergie mécanique du pendule simple s'écrit

$$E_m = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + mgl(1-\cos\theta)\,.$$

L'énergie mécanique est conservée car la seule force qui travaille (le poids) est conservative et on peut écrire, en posant $\omega_0 = \sqrt{g/l}$:

$$\frac{2(E_m - mgl)}{mgl} = \frac{1}{\omega_0^2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 2\cos\theta\,.$$

On en déduit que la constante C se relie à l'énergie mécanique E_m par

$$C = 2\left(\frac{E_m}{mgl} - 1\right).$$

Or on a toujours $E_m \geq E_p$ car l'énergie cinétique est positive. Ainsi, pour une valeur de C donnée, le domaine accessible en θ sera tel que

$$\frac{E_p}{mgl} \geq \frac{C}{2} + 1 \,.$$

On trace sur la figure 2.8 le profil d'énergie potentielle E_p/mgl, ainsi que les valeurs limites de l'énergie potentielle selon la valeur de C. On observe que pour $C < 2$, le domaine accessible est borné, tandis que pour $C \geq 2$ tous les angles sont atteignables. Cela confirme les résultats de l'étude précédente.

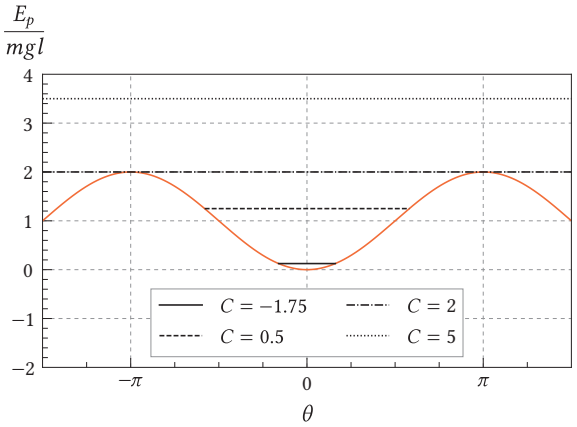


FIGURE 2.8 – Profil d'énergie potentielle du pendule simple et quelques valeurs d'énergie mécanique correspondant aux valeurs de C de la figure 2.7.

Ainsi, l'étude du portrait de phase permet de comprendre les différents comportements de l'oscillateur non-linéaire. Il est donc pertinent, pour un oscillateur donné, de chercher à tracer son portrait de phase afin de caractériser son comportement. C'est l'objet de la section suivante.

2.2.2 Étude générale d'un oscillateur non-linéaire : portrait de phase

Généralisons l'étude précédente, en considérant un système soumis à des équations du mouvement données. On réécrit les équations du mouvement sous la forme de N équations d'ordre 1 sur les fonctions x_i :

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = F_1(\{x_i\}) \,, \quad \ldots \,, \quad \frac{\mathrm{d}x_N}{\mathrm{d}t} = F_N(\{x_i\}) \,.$$

On définit alors l'**espace des phases** comme l'intégralité des valeurs que peut prendre le vecteur $\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_N \end{pmatrix}$. Une **trajectoire de phase** est alors, pour une solution donnée des équations du mouvement, la courbe paramétrée $\begin{pmatrix} x_1(t) & \ldots & x_N(t) \end{pmatrix}$. Enfin, le **portrait de phase** est l'ensemble des trajectoires de phase pour toutes les conditions initiales possibles.

Reprenons l'exemple du pendule pesant : on peut réécrire l'équation (2.8) comme

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \omega_0 \, x_2 \,, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -\omega_0 \sin x_1 \,. \end{cases}$$

Dans ce système, on peut identifier x_1 à θ et x_2 à $\dot{\theta}/\omega_0$. Ainsi, l'espace des phases est $\mathbb{R}^2$: le portrait de phase est à deux dimensions, ce que l'on observe bien sur la figure 2.7.

> **Remarque**
>
> La théorie des portraits de phase est reliée à des concepts bien plus fondamentaux de physique et d'analyse mathématique. En particulier l'« espace des phases » est en réalité l'espace des paramètres entrant dans le Hamiltonien du système (voir chapitre 9) et le portrait de phase est le flot hamiltonien du système. Cela est bien au-delà du programme de l'agrégation et ne sera absolument pas demandé à l'oral ou à l'écrit ; cependant, il est bon d'avoir conscience que les outils manipulés ici ont une finalité bien plus fondamentale que la simple étude d'oscillateurs.

On propose dans cette section l'étude de quelques oscillateurs à travers leur portrait de phase. D'autres exemples, et davantage de détails, sont fournis dans le BUP [4].

Pendule simple amorti Considérons un pendule pesant amorti par un terme de frottements : l'équation du mouvement devient

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \,.$$

Réécrivons cette équation sous la forme d'un système d'ordre 1, en posant $\tau = \omega_0 t$, $x_1 = \theta$ et $x_2 = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\tau$:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\tau} = x_2 \,, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\tau} = -\sin x_1 - \dfrac{1}{Q} x_2 \,. \end{cases}$$

Le portrait de phase est représenté sur la figure 2.9 pour $Q = 2$. On observe des trajectoires qui se différencient des trajectoires du portrait de phase du pendule simple non amorti : elles se terminent toutes en certains points de l'axe des abscisses, correspondant physiquement à une vitesse nulle et un pendule à la verticale. Cela est dû à la perte d'énergie : au bout d'un temps suffisamment long, le pendule sera presque immobile, fixé à une position d'équilibre. Ces points sont appelés des **attracteurs** : mathématiquement, ils sont tels que plusieurs conditions initiales amènent toutes à des trajectoires convergeant vers ceux-ci. On observe aussi que la symétrie autour de l'axe des ordonnées a disparu : cela correspond à la brisure de l'invariance $t \longrightarrow -t$.

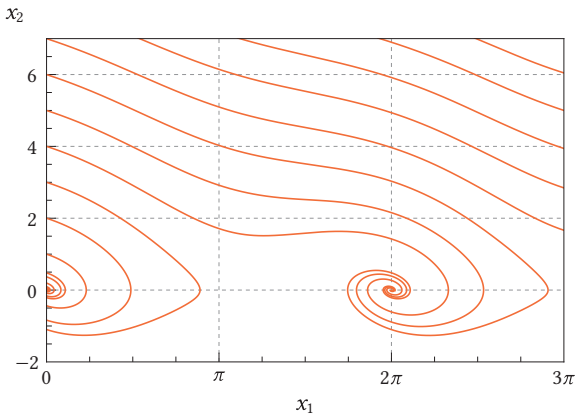


FIGURE 2.9 – Portrait de phase d'un pendule amorti pour $Q = 2$.

Oscillateur de van der Pol Un autre oscillateur classique à l'agrégation est l'oscillateur de van der Pol. Celui-ci est un modèle théorique proposé pour modéliser des oscillations entretenues. Heuristiquement, on voudrait compenser l'amortissement en ayant des phases où $Q < 0$: le terme d'amortissement sera alternativement positif et négatif. C'est ainsi nécessairement un système *actif* capable de fournir de l'énergie. Il est décrit par l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} + A(X^2 - X_0^2)\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 X = 0 \quad \text{avec} \quad X_0 > 0\,.$$

Ce système ressemble à un oscillateur harmonique ayant pour position d'équilibre $X = 0$; la seule différence provient de la non-linéarité du terme d'amortissement. On remarque que si $|X| < X_0$, celui-ci est négatif : il correspond donc à un terme d'injection d'énergie dans le système, qui entraînera une augmentation des oscillations. Dès que les les oscillations dépassent $|X| = X_0$, le terme d'injection d'énergie redevient un terme d'amortissement et on aura donc des oscillations décroissantes. Ainsi, on s'attend à trouver des oscillations entretenues d'amplitude de l'ordre de X_0.
Afin d'étudier ce système on par remanie l'équation différentielle. En posant $x = X/X_0$ et $\tau = \omega_0 t$, on a

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} + a(x^2 - 1)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + x = 0 \quad \text{avec} \quad a = \frac{AX_0^2}{\omega_0}\,.$$

Sur la figure 2.10, on trace la trajectoire de l'oscillateur de van der Pol dans le cas $x(0) = 10^{-3}$ et $a = 1$. On observe alors un régime permanent d'oscillations périodiques.
On peut alors s'intéresser au portrait de phase de l'oscillateur de van der Pol. En posant $x_1 = x$ et $x_2 = \mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau$, on réécrit l'équation sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\tau} = x_2\,, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\tau} = -a(x_1^2 - 1)x_2 - x_1\,. \end{cases}$$

On trace alors le portrait de phase sur la figure 2.11.

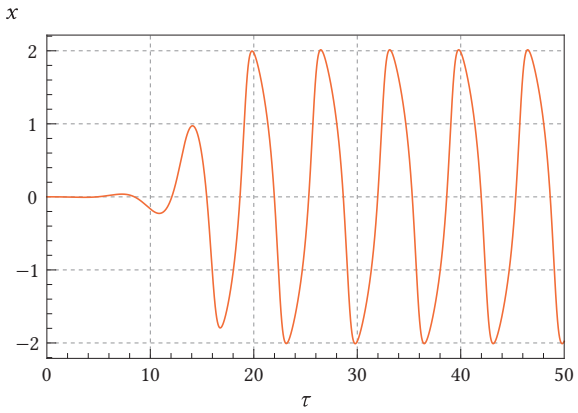


FIGURE 2.10 – Trajectoire de l'oscillateur de van der Pol pour $x(0) = 10^{-3}$ et $a = 1$.

On observe la présence d'un *cycle limite* : pour plusieurs conditions initiales, on rejoint le même cycle correspondant aux oscillations entretenues. Cela peut s'interpréter de la même façon que les points attracteurs dans le cas du pendule pesant amorti : la différence principale est que désormais l'attracteur est un cycle, ce qui permet un mouvement non trivial (des oscillations) au lieu d'avoir un système figé. De plus, on observe que le cycle n'est pas circulaire, ce qui signifie que les oscillations ne sont pas sinusoïdales. Cette observation est immédiate à partir du portrait de phase, mais beaucoup moins évidente en observant simplement la réponse temporelle figure 2.10 : on observe là encore la puissance des portraits de phase.

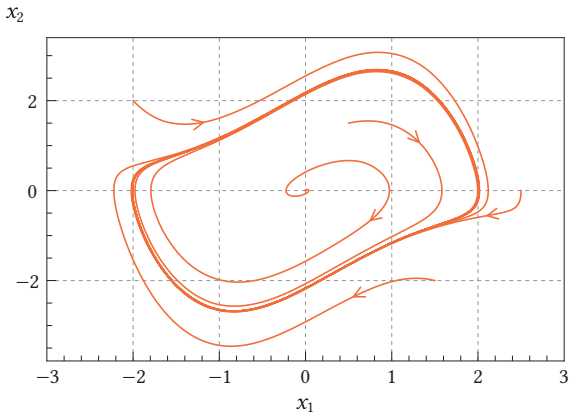


FIGURE 2.11 – Portrait de phase de l'oscillateur de van der Pol pour $a = 1$.

Remarque

L'oscillateur de van der Pol est proposé de façon heuristique, mais celui-ci permet tout de même de comprendre le comportement de systèmes très variés en

physique, biologie ou géophysique. En particulier, des versions légèrement modifiées de cet oscillateur ont été proposées pour modéliser le comportement des neurones [5], ou certaines interactions en tectonique des plaques [6].

Transition vers le chaos L'une des propriétés les plus intéressantes des systèmes non-linéaires est que ceux-ci peuvent avoir un comportement très sensible aux conditions initiales, appelé comportement **chaotique**. Plus précisément, supposons que l'on prenne deux systèmes dynamiques régis par la même équation et que l'on place ceux-ci dans des conditions initiales proches d'une distance[8] d_0. On parle d'un système chaotique si au cours du temps la distance entre les deux trajectoires évolue comme

$$d(t) = d_0 e^{t/\tau} .$$

La grandeur τ, réelle positive, est appelée **horizon de Lyapounov** du système : celle-ci caractérise la durée caractéristique pendant laquelle deux systèmes relativement proches initialement restent proches au cours de leur évolution (on définit aussi $\lambda = 1/\tau$ l'exposant de Lyapounov).
Cet horizon de Lyapounov est très important pour comprendre ce qui limite notre connaissance de l'évolution d'un système physique. En effet, les lois physiques sont déterministes, ce qui laisserait penser que la connaissance de l'état d'un système à un instant donné suffirait à connaître son état pour tout temps ultérieur (ou antérieur). En particulier, en connaissant précisément les positions et vitesses de tous les corps présents dans l'Univers actuellement, on pourrait imaginer être capable de prévoir l'évolution future complète de celui-ci. En réalité, l'existence de l'horizon de Lyapounov nous apprend qu'il faudrait connaître les conditions initiales avec une précision gigantesque pour pouvoir prévoir l'évolution au-delà d'un temps τ ; ainsi, *en pratique*, il est impossible de prévoir le comportement d'un système physique aussi complexe que l'Univers !

Horizons de Lyapounov de quelques systèmes

On présente quelques valeurs d'horizons de Lyapounov pour des systèmes usuels. Les valeurs sont issues de la table 1 de [7]. On observe que le comportement du Système Solaire ne peut être prédit que pendant 10 millions d'années environ ! On voit aussi que la très faible valeur pour le comportement d'un gaz justifie totalement l'étude statistique qui est faite de ce genre de systèmes.

Système	τ (s)
Système Solaire	$3{,}6.10^{14}$
Convection de Rayleigh-Bénard	5,4
1 cm^3 d'argon à T_{amb}	10^{-10}

La sensibilité aux conditions initiales est donc l'une des propriétés essentielles des systèmes chaotiques. Cependant, le chaos peut aussi se reconnaître autrement. On résume les propriétés des systèmes chaotiques dans le théorème suivant.

Caractéristiques des systèmes chaotiques

Les systèmes chaotiques possèdent plusieurs propriétés permettant de les reconnaître :

- pour des conditions initiales très proches, le comportement au bout d'un temps long est très différent ;
- leur spectre s'élargit jusqu'à devenir continu ;
- ils obéissent à des équations différentielles non-linéaires et possèdent un espace des phases de dimension 3 ou plus.

Le second critère est observé par tout système chaotique, mais cela n'empêche pas un système chaotique d'avoir une réponse piquée en une fréquence donnée. Ce dernier critère quant à lui n'est pas suffisant pour assurer l'existence de chaos : il s'agit simplement d'un critère nécessaire. Afin d'illustrer cela, on trace sur la figure 2.12 la réponse d'un oscillateur non-linéaire forcé, pour lequel l'espace des phases est de dimension 3[9]. L'étude complète d'un tel oscillateur peut être trouvée dans [8]. On observe bien que le mouvement n'est plus périodique et aucune tendance ne semble se dégager : qualitativement, on a bien affaire à un système chaotique.

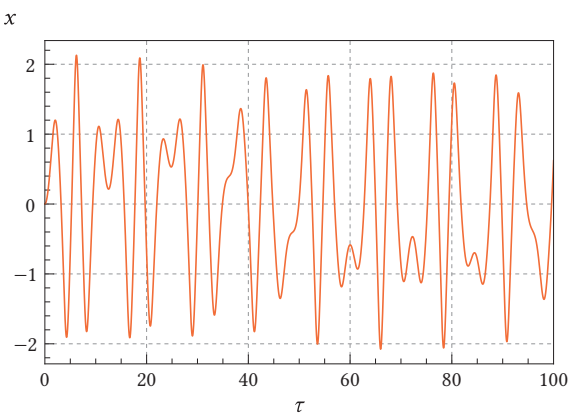


FIGURE 2.12 – Exemple de trajectoire d'un oscillateur non-linéaire forcé, dans un régime chaotique.

L'étude des systèmes chaotiques et de leurs propriétés est l'objet de la physique non-linéaire. Il s'agit d'un domaine très riche : le lecteur plus curieux pourra se tourner vers les références [3, 9, 10].

8. Dans le cas de deux pendules représentés par les angles θ_1 et θ_2, la distance d est définie par $d = |\theta_1 - \theta_2|$.
9. Afin d'éviter de mettre un terme de forçage $\cos(\omega t)$ dans les équations de la trajectoire mettant en jeu x_1 et x_2, ce qui les ferait dépendre du temps, on écrit le terme de forçage sous la forme $\cos(x_3)$ et on ajoute l'équation $\mathrm{d}x_3/\mathrm{d}t = \omega$. Cela ajoute donc un degré de liberté au système !

2.3 Oscillateurs paramétriques

Un **oscillateur paramétrique** (non amorti) est un système vérifiant l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2(t)x = 0\,,$$

où le *paramètre* $\omega^2(t)$ dépend du temps. La physique de ces oscillateurs est riche : on peut notamment citer le phénomène de « résonance paramétrique ».

Nous discutons différents aspects de ces oscillateurs dans ce complément numérique.

Oscillateurs paramétriques

www.lienmini.fr/36421-cpltch02

2.4 Couplage d'oscillateurs non amortis

Les compléments précédents ont montré que la physique des oscillateurs non amortis était déjà incroyablement riche, ne serait-ce que par l'introduction de non-linéarités. Dans ce dernier complément, on reste dans le cas linéaire mais on considère plusieurs oscillateurs *non-indépendants*. Après avoir présenté quelques exemples d'oscillateurs couplés, on décrit de manière très générale les couplages possibles entre ces oscillateurs puis les conséquences du couplage sur leur comportement.

2.4.1 Exemples de systèmes couplés

Commençons par illustrer ce que signifie « coupler des oscillateurs » en prenant deux exemples classiques en CPGE.

Couplage par un ressort On considère deux masses m. Chaque masse est reliée au bâti par un ressort de raideur K et constitue en elle-même un oscillateur de pulsation $\omega_0 = \sqrt{K/m}$. Ces deux oscillateurs sont couplés en reliant les deux masses entre elles par un ressort de raideur k. On suppose qu'à l'équilibre, tous les ressorts ont pour longueur leur longueur à vide. On schématise la situation sur la figure 2.13.

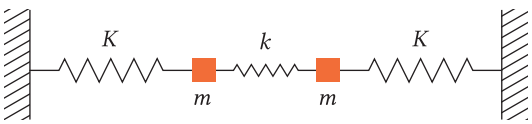


Figure 2.13 – Schéma des deux masses couplées par un ressort.

On note X_1 la position de la première masse et X_2 la position de la seconde, puis on définit les écarts à l'équilibre $x_1 = X_1 - X_{1,\text{éq}}$ et $x_2 = X_2 - X_{2,\text{éq}}$. Les équations du mouvement pour x_1 et x_2 sont

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} = -Kx_1 + k(x_2 - x_1)\,, \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} = -Kx_2 + k(x_1 - x_2)\,. \end{cases} \tag{2.12}$$

On pourra se référer à [11, TLM] pour ce calcul classique. On peut réécrire ces équations en introduisant les pulsations ω_1 et ω_2 ainsi que les coefficients de couplage α_1 et α_2 :

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = \frac{K+k}{m} \quad \text{et} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{k}{m}\,. \tag{2.13}$$

On obtient alors le système

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} + \omega_1^2 x_1 = \alpha_1 x_2\,, \\ \dfrac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} + \omega_2^2 x_2 = \alpha_2 x_1\,. \end{cases} \tag{2.14}$$

Couplage par inductance mutuelle Considérons deux circuits LC avec L et C identiques. Ces circuits sont réalisés en pratique à l'aide de circuits RLC pour lesquels on néglige les résistances. On place ces deux circuits proches l'un de l'autre, de façon à créer une inductance mutuelle entre les deux bobines (voir figure 2.14). On note M le coefficient d'inductance mutuelle.

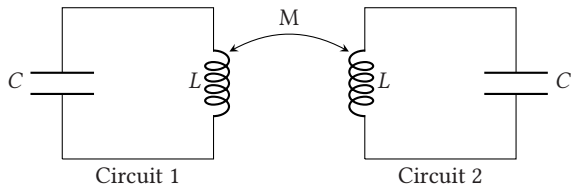


Figure 2.14 – Deux circuits LC couplés par inductance mutuelle.

Les équations pour les charges q_1 et q_2 aux bornes des condensateurs sont (voir [CPGE1]) :

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}^2 q_1}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{q_1}{C} + M\dfrac{\mathrm{d}^2 q_2}{\mathrm{d}t^2} = 0\,, \\ L\dfrac{\mathrm{d}^2 q_2}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{q_2}{C} + M\dfrac{\mathrm{d}^2 q_1}{\mathrm{d}t^2} = 0\,. \end{cases}$$

On introduit alors les pulsations ω_1 et ω_2 ainsi que les coefficients de couplage β_1 et β_2 tels que

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{et} \quad \beta_1 = \beta_2 = \frac{M}{L}\,.$$

Les équations couplées se réécrivent alors, en renommant q_1 en x_1 et q_2 en x_2 :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} + \omega_1^2 x_1 = -\beta_1 \dfrac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2}\,, \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} + \omega_2^2 x_2 = -\beta_2 \dfrac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2}\,. \end{cases} \tag{2.15}$$

Les systèmes d'équations (2.14) et (2.15) sont des représentants des deux classes de couplage qui peuvent exister entre deux oscillateurs. Dans la suite, on cherche à décrire de façon générale comment de tels couplages modifient le comportement des oscillateurs.

Conseil didactique

Le couplage d'oscillateurs est une notion très importante à l'agrégation. Nous en présentons, dans ce qui suit, une étude systématique et assez théorique, dont la maîtrise mathématique complète n'est pas nécessaire. Celle-ci est surtout présentée afin de montrer les rouages derrière chaque cas particulier.

2.4.2 Différents types de couplage

Considérons N oscillateurs harmoniques non amortis de pulsations ω_i. Leurs équations du mouvement sont donc

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} + \omega_1^2 x_1 = 0\,, \quad \dots, \quad \frac{\mathrm{d}^2 x_N}{\mathrm{d}t^2} + \omega_N^2 x_N = 0\,.$$

On dit de N systèmes qu'ils sont **couplés** s'ils peuvent agir les uns sur les autres. D'un point de vue mathématique, l'équation i est forcée par un terme dépendant de la valeur des autres variables et de leurs dérivées secondes [10] :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2} + \omega_i^2 x_i = F\left(\{x_j\}_{j\neq i}, \left\{\frac{\mathrm{d}^2 x_j}{\mathrm{d}t^2}\right\}_{j\neq i}\right).$$

Le couplage est dit linéaire si toutes les fonctions F_i sont linéaires en toutes leurs variables. En notant X le vecteur des x_i, on peut alors écrire

$$F_i = (\mathcal{M}_E X)_i + \left(\mathcal{M}_I \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2}\right)_i\,,$$

où $\mathcal{M}_E$ et $\mathcal{M}_I$ sont des matrices. On distingue alors deux types de couplages dans la suite.

- Le **couplage élastique** correspond au cas $\mathcal{M}_I = 0$. On a un couplage par la position, qui correspond au cas de deux ressorts couplés présenté dans la section 2.4.1.
- Le **couplage inertiel** correspond au cas $\mathcal{M}_E = 0$. Le couplage se fait par la dérivée seconde : il s'agit typiquement du couplage par inductance mutuelle présenté dans la section 2.4.1.

En général, on peut avoir toute superposition de ces deux formes de couplage, mais la compréhension physique du couplage ne nécessite pas de traiter les deux en même temps. Dans la suite, nous chercherons à décrire le comportement d'oscillateurs couplés selon l'un ou l'autre. Afin de simplifier l'étude, nous considérons le cas de deux oscillateurs.

Aux concours ...

L'étude du couplage de deux oscillateurs a été proposée dans le problème C2009. Les modes propres d'une molécule ont été étudiés dans la composition A2011.

2.4.3 Deux oscillateurs : importance des vecteurs propres

Couplage élastique Considérons le cas de deux oscillateurs couplés de façon élastique. Selon ce qui a été vu précédemment, cela revient à écrire les équations du mouvement

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} + \omega_1^2 x_1 = \alpha_1 x_2\,, \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} + \omega_2^2 x_2 = \alpha_2 x_1\,. \end{cases}$$

En introduisant $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ [11], le système se réécrit

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2} + \Omega X = 0 \quad \text{avec} \quad \Omega = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \omega_2^2 \end{pmatrix}.$$

L'idée fondamentale pour la résolution des systèmes couplés est de « découpler » les degrés de liberté en trouvant les bonnes combinaisons y_1 et y_2 de x_1 et x_2 vérifiant des équations ne contenant respectivement que y_1 et y_2. En termes matriciels, cela revient à chercher un moyen de mettre Ω sous forme diagonale : cela est possible en réalisant un changement de variables adapté. Soit P une matrice inversible. On pose $X = PY$: on a alors

$$\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}t^2} + P^{-1}\Omega P Y = 0\,.$$

Si la matrice Ω est diagonalisable, par définition il existe une matrice P particulière (dite « de passage ») telle que $P^{-1}\Omega P$ soit diagonale, c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}t^2} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} Y = 0\,,$$

10. On ne traite pas le cas où les F_i dépendent des dérivées temporelles premières car cela briserait l'invariance temporelle et l'énergie ne serait plus nécessairement conservée.

11. La notation ^{T} désigne la transposée et permet ici d'écrire en ligne des vecteurs qui sont en fait des vecteurs colonnes.

où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de Ω. On aura donc deux oscillateurs harmoniques non amortis y_1 et y_2 de pulsations respectives $\sqrt{\lambda_1}$ et $\sqrt{\lambda_2}$.
Rappelons que les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique de Ω :

$$\lambda^2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\lambda + (\omega_1^2\omega_2^2 - \alpha_1\alpha_2) = 0\,.$$

Posons le coefficient de couplage γ tel que

$$\gamma = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\omega_1^2\omega_2^2}\,.$$

On a alors

$$\lambda^2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\lambda + \omega_1^2\omega_2^2(1-\gamma) = 0 \qquad (2.16)$$

Discutons maintenant des racines de l'équation 2.16. Le discriminant du polynôme est

$$\Delta = (\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4\omega_1^2\omega_2^2(1-\gamma) = (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\omega_1^2\omega_2^2\gamma\,. \quad (2.17)$$

Pour obtenir le découplage, il est nécessaire d'obtenir ici deux racines réelles, donc d'avoir

$$\gamma \geq -\frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}{4\omega_1^2\omega_2^2}\,. \qquad (2.18)$$

Par ailleurs, on observe que la somme des racines est positive tandis que leur produit est du signe de $(1-\gamma)$. Pour avoir deux racines positives afin de pouvoir en prendre les racines carrées, on doit donc avoir $\gamma \leq 1$.
Le découplage est donc possible si

$$-\frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}{4\omega_1^2\omega_2^2} \leq \gamma \leq 1\,.$$

Ces limites sur les valeurs de γ permettent de placer des limites sur les valeurs des racines. En effet la condition précédente impose $0 \leq \Delta \leq (\omega_1^2 + \omega_2^2)^2$ et il vient donc

$$\lambda_1 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{soit} \quad 0 \leq \lambda_1 \leq \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}\,,$$
$$\lambda_2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{soit} \quad \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \leq \lambda_2 \leq \omega_1^2 + \omega_2^2\,.$$

On dit que le système est **accordé** si les deux oscillateurs initiaux ont même pulsation. On note alors $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ et les formules précédentes se simplifient : on a $0 < \gamma < 1$ et

$$\lambda_1 = \omega_0^2(1 - \sqrt{\gamma}) \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \omega_0^2(1 + \sqrt{\gamma})\,.$$

Les pulsations des oscillateurs découplés sont donc $\sqrt{\lambda_1}$ et $\sqrt{\lambda_2}$, avec

$$\boxed{\sqrt{\lambda_1} = \omega_0\sqrt{1 - \sqrt{\gamma}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sqrt{\lambda_2} = \omega_0\sqrt{1 + \sqrt{\gamma}}}\,. \qquad (2.19)$$

Le couplage a donc pour effet de *lever la dégénérescence* sur les pulsations : deux oscillateurs de mêmes pulsations propres, une fois couplés, sont équivalents à un système avec deux pulsations propres différentes, l'une plus haute et l'autre plus basse que la pulsation propre d'origine.

Remarque

Cet effet est notamment présent en physique quantique, lors de l'étude des niveaux d'énergie E_n d'un atome (assimilables à des oscillateurs harmoniques de pulsations $\omega_n = E_n/\hbar$). Ceux-ci sont indexés par quatre nombres quantiques, m, ℓ, m_ℓ et m_s ; seulement, leur valeur ne dépend que de n : on a dégénérescence des niveaux d'énergie. Par exemple, le niveau $(n = 1, \ell = 0)$ et le niveau $(n = 1, \ell = 1)$ ont la même énergie.
Cependant, des facteurs extérieurs vont introduire des couplages entre niveaux : on peut citer les effets relativistes et le couplage spin-orbite, ou le couplage à un champ magnétique. Ces couplages vont lever la dégénérescence entre les niveaux d'énergie en faisant dépendre la valeur de l'énergie des autres nombres quantiques ℓ, m_ℓ... Par exemple, en prenant en compte le couplage spin-orbite, les niveaux $(n = 1, \ell = 0)$ et $(n = 1, \ell = 1)$ ont des énergies différentes. Cette nouvelle répartition des niveaux d'énergie due au couplage spin-orbite est appelée « structure fine ». Le couplage à un champ magnétique est quant à lui à l'origine de la « structure hyperfine ». On trouvera plus de détails sur ces couplages dans le chapitre 13.

Une fois les valeurs propres λ_1 et λ_2 obtenues, il est intéressant de revenir aux variables d'origine pour comprendre le comportement général des deux oscillateurs couplés.
Commençons par remarquer que les composantes de Y, les variables y_1 et y_2, vérifient des équations d'oscillateurs harmoniques : chaque variable oscille à une fréquence propre donnée du système. On appelle y_1 et y_2 les **vecteurs propres** du système. Pour revenir à x_1 et x_2, on doit utiliser la relation $X = PY$: ainsi, les x_i sont des combinaisons linéaires des y_i. On en déduit qu'en général, la solution pour chaque oscillateur est *une superposition d'oscillations à chaque fréquence propre* du système. Si l'on fait en sorte de n'exciter qu'un seul des y_i grâce à un choix de conditions initiales, tous les x_i oscilleront à la fréquence propre correspondante, bien qu'avec des amplitudes différentes. On dira alors que le système est dans un de ses **modes propres**.

Pour mieux comprendre ces différents concepts, appliquons-les au cas d'une matrice Ω symétrique pour deux oscillateurs accordés. On note

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_0^2 & -\alpha \\ -\alpha & \omega_0^2 \end{pmatrix}\,. \qquad (2.20)$$

On a alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

et on trouve

$$y_1 = x_1 + x_2\,, \quad \lambda_1 = \omega_0^2 - \alpha\,,$$
$$y_2 = -x_1 + x_2\,, \quad \lambda_2 = \omega_0^2 + \alpha\,.$$

Si les conditions initiales sont telles que l'on « n'excite que y_1 » (pour tout temps, $y_2 = 0$ donc $x_1 = x_2$), on dira que l'on

se trouve dans le *mode symétrique* et la pulsation propre sera $\sqrt{\lambda_1}$. Dans le cas où « seul y_2 est excité », on se trouve dans le *mode antisymétrique*, de pulsation propre $\sqrt{\lambda_2}$. Pour des conditions initiales quelconques, la solution générale pour y_1 et y_2 est plutôt

$$y_1(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{\lambda_1}t + \varphi_1\right), \quad y_2(t) = A_2 \cos\left(\sqrt{\lambda_2}t + \varphi_2\right).$$

Les solutions x_1 et x_2 seront donc des sommes de deux cosinus : on observera alors des *battements*. Ce cas ainsi que le cas précis où seul le mode antisymétrique est présent sont illustrés sur la figure 2.15. Dans le cas où l'on observe des battements, on peut mesurer leur fréquence pour remonter à l'écart entre $\sqrt{\lambda_1}$ et $\sqrt{\lambda_2}$.

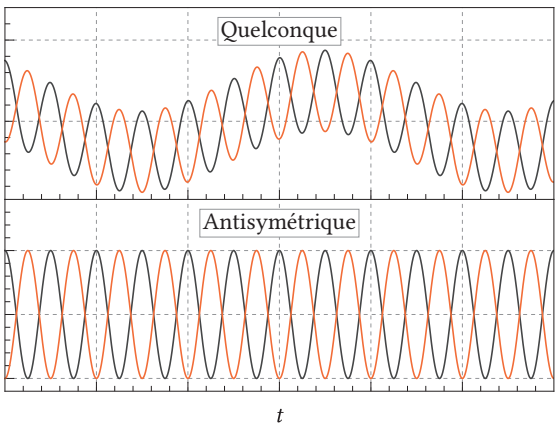


FIGURE 2.15 – Tracé des fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ dans le cas d'un couplage donné par (2.20). Dans le premier cas, on utilise des conditions initiales quelconques : on observe des battements. Dans le second cas, on choisit les conditions initiales de façon à n'exciter que le mode antisymétrique.

Couplage élastique par un ressort

On reprend l'exemple des ressorts couplés, présenté dans la section 2.4.1. Ce système correspond au cas étudié ici avec

$$\omega_0^2 = \frac{K+k}{m}, \quad \alpha = \frac{k}{m} \quad \text{et} \quad \gamma = \left(\frac{k}{k+K}\right)^2.$$

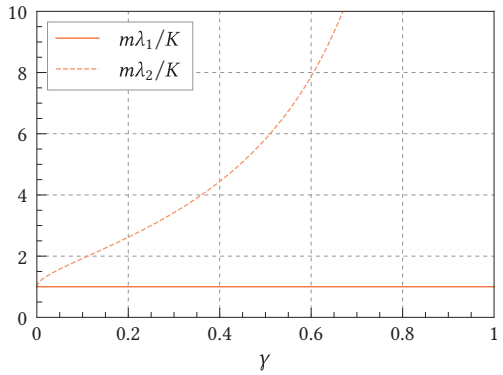
Ce système est étudié dans [12] : les deux vecteurs propres sont

$$y_1 = x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad y_2 = -x_1 + x_2\,.$$

Les valeurs propres correspondantes sont alors

$$\lambda_1 = \omega_0^2(1-\sqrt{\gamma}) = \frac{K}{m}$$
$$\lambda_2 = \omega_0^2(1+\sqrt{\gamma}) = \frac{K+2k}{m} = \frac{K}{m}\frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}}.$$

On les trace en fonction de γ à K et m fixés dans la figure suivante.



On observe donc que l'un des modes ne change pas de pulsation par rapport au cas non couplé ! Il s'agit du mode symétrique : les masses oscillent ensemble et le ressort du milieu ne se contracte ou se détend jamais. Tout se passe comme si les masses n'étaient pas couplées.

Attention :

En observant les tracés de λ_1 et λ_2 en fonction de γ dans l'exemple précédent, on pourrait penser que ceux-ci ne correspondent pas à l'équation (2.19). Il s'agit d'un écueil classique : il ne faut pas oublier que ω_0 dépend également de γ. Dans l'exemple, on avait

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}\frac{1}{\sqrt{\gamma}} = \frac{K}{m}\frac{1}{1-\sqrt{\gamma}}.$$

Il est donc important de garder en tête la dépendance des quantités ω_0, α et γ en les différents paramètres.

Couplage inertiel Étudions désormais le couplage inertiel (par la dérivée seconde). Les équations sont alors

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} + \omega_1^2 x_1 = -\beta_1 \dfrac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2}, \\ \dfrac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} + \omega_2^2 x_2 = -\beta_2 \dfrac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2}. \end{cases}$$

Sous forme matricielle, ces équations s'écrivent

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta_1 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} + \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix} X = 0\,.$$

On peut donc se ramener à une équation de la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} + \Omega^2 X = 0 \quad \text{avec} \quad \Omega = \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\Omega = \frac{1}{1-\beta_1\beta_2} \begin{pmatrix} \omega_1^2 & -\beta_1\omega_2^2 \\ -\beta_2\omega_1^2 & \omega_2^2 \end{pmatrix}.$$

On peut donc adapter l'étude faite dans le cas élastique, en effectuant les changements

$$\omega_i^2 \longrightarrow \frac{\omega_i^2}{1-\beta_1\beta_2}\,, \quad \alpha_1 \longrightarrow \frac{\beta_1\omega_2^2}{1-\beta_1\beta_2}$$
$$\text{et} \quad \alpha_2 \longrightarrow \frac{\beta_2\omega_1^2}{1-\beta_1\beta_2}\,.$$

En transposant les formules (2.17) et (2.18), on obtient

$$\gamma = \beta_1\beta_2 \quad \text{et} \quad \Delta = \frac{1}{(1-\gamma)^2}\left[(\omega_1^2+\omega_2^2)^2 + 4\gamma\omega_1^2\omega_2^2\right].$$

La condition sur γ pour obtenir un découplage reste

$$-\frac{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2}{4\omega_1^2\omega_2^2} \leq \gamma < 1\,.$$

Enfin, dans le cas où les deux oscillateurs sont accordés (i.e. $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$), les deux pulsations propres sont

$$\boxed{\sqrt{\lambda_1} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+\sqrt{\gamma}}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sqrt{\lambda_2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\sqrt{\gamma}}}}\,.$$

On observe de nouveau une levée de dégénérescence. Comme dans le cas élastique, la pulsation ω_0 peut dépendre de γ et rendre l'interprétation compliquée.

Remarque

Dans le cas où les deux oscillateurs sont accordés, on définit en général θ de sorte que $\theta^2 = \gamma$. Cela est possible car dans ce cas on a $\gamma \geq 0$. Cependant, dans le cas général on peut avoir γ négatif, ce qui fait qu'une telle définition n'est pas adaptée.

Couplage inertiel par inductance mutuelle

Reprenons les deux circuits LC décrits dans la section 2.4.1. Ceux-ci possèdent la même pulsation propre $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et sont couplés par une inductance mutuelle de coefficient M. On se trouve dans un cas où la pulsation propre ω_0 est indépendante du couplage : on peut donc directement utiliser les résultats de ce paragraphe, avec

$$\gamma = \frac{M^2}{L_1L_2} = \frac{M^2}{L^2}\,.$$

La propriété $|M| \leq \sqrt{L_1L_2} = L$ montre que l'on a $0 \leq \gamma \leq 1$, ce qui implique que le découplage est bien possible.

Références

▷ Références pour ce chapitre

[1] J. Adloff et al. « Résonance aiguë et auto-oscillation d'un diapason ». *BUP* 92.801 (1998).

[2] J.-M. Raimond. *Électromagnétisme et relativité*. 2000. URL : https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00092954.

[3] C. Coste. *Introduction à la physique non linéaire*. 2011. URL : https://hal-univ-paris.archives-ouvertes.fr/cel-01405722.

[4] H. Gié et J.-P. Sarmant. « Le portrait de phase des oscillateurs ». *BUP* 86.744 (1992).

[5] R. FitzHugh. « Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane ». *Biophys. J.* 1.6 (1961).

[6] J. H. E. Cartwright et al. « Dynamics of Elastic Excitable Media ». *Int. J. Bifurc. Chaos* 9.11 (1999).

[7] P. Gaspard. *Chaos, Scattering and Statistical Mechanics*. Cambridge Nonlinear Science Series. Cambridge : Cambridge University Press, 1998.

[8] Y. Ku et X. Sun. « Chaos in van Der Pols Equation ». *J. Frankl. Inst.* 327.2 (1990).

[9] V. Croquette. *Systèmes dynamiques et introduction au chaos*. 2000. URL : http://www.lps.ens.fr/~vincent/ch1e.pdf.

[10] P. Bergé, Y. Pomeau et C. Vidal. *L'ordre dans le chaos*. Hermann, 2004.

[11] J.-P. Pérez. *Mécanique, fondements et applications*. 7ème édition. Dunod, 2022.

[12] M. Benarroche. « À propos d'oscillateurs couplés ». *BUP* 80.685 (1986).

▷ Références usuelles

[CPGE1] *Références diverses de CPGE 1ère année.*

[TLM] L. Bocquet, J.-P. Faroux et J. Renault. *Toute la mécanique. Cours et exercices corrigés*. Dunod, 2002.

Chapitre 3

Frottements solides

Dans le chapitre précédent portant sur les oscillateurs nous avons étudié l'influence des frottements fluides. Ce phénomène est modélisé par un terme dynamique simple, fonction des variables cinématiques, en l'occurrence $\vec{F}_{\text{fluide}} = -\alpha\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse instantanée du point matériel considéré. Il s'avère aussi que dans de nombreuses situations physiques ce type de force, d'ordre 1 en la vitesse, modélise correctement l'effet de l'amortissement quelle que soit la source réelle de la dissipation d'énergie.

Cela ne doit pas pour autant occulter la diversité des sources de dissipation. L'une d'elles en particulier nous intéresse dans ce chapitre : les frottements solides. En fiche synthèse nous rappelons les lois phénoménologiques d'Amontons-Coulomb et insistons sur les écueils à éviter au concours, à l'écrit ou à l'oral, lorsque ce type de frottements est à étudier.

Dans les compléments nous nous concentrons d'abord sur la description microscopique du contact entre deux solides. Nous donnons ensuite quelques éléments sur des différents mouvements possibles de deux solides en contact, notamment certains plus exotiques que l'habituelle translation d'un solide sur un autre. Enfin, nous détaillons l'étude de l'oscillateur amorti par frottements solides et insistons sur les différences avec l'oscillateur amorti par frottements fluides, ainsi que les spécificités du traitement calculatoire de ce type de problème.

Aux concours ...

Jusqu'en 2019 ce chapitre faisait l'objet d'une leçon de l'AEPC : « Contact entre deux solides. Frottement. » En 2022 une leçon intitulée « Frottements » a été proposée et constitue aussi un sujet d'exposé à l'AIPC.

Sommaire

Fiche synthèse **34**
3.1 Analyse des frottements solides à l'échelle microscopique **36**
3.2 Mouvements possibles entre deux solides en contact **38**
3.2.1 Glissement, basculement et point d'application de la réaction du support 38
3.2.2 Roulement et pivotement 39
3.2.3 Liaisons 40
3.3 Oscillateur amorti par frottements solides **41**
3.3.1 Première phase du mouvement 41
3.3.2 Suite et fin des oscillations 42
3.3.3 Enveloppe des oscillations 42
3.3.4 Portrait de phase 43

Fiche synthèse

Le seul mouvement d'un solide sur un autre au programme de CPGE est le mouvement de translation (on tire un solide sur un plan horizontal, on pose un solide sur un plan incliné, éventuellement on translate plusieurs solides les uns sur les autres). Il est également possible de considérer les mouvements de rotation autour d'un point fixe correspondant à des situations de basculement (d'une échelle, d'une tartine, etc.). Le premier enjeu de l'étude est alors cinématique : il s'agit de décrire le mouvement relatif de deux solides.

▷ Vitesse de glissement

On considère un solide $\mathcal{S}$ posé sur un support Σ qui peut être fixe ou représenter un autre solide en mouvement et dont la forme est a priori quelconque. Ces deux objets évoluent dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. Dans un premier temps le contact est supposé ponctuel. À l'instant t, on considère deux points coïncidents : le point I appartenant au solide $\mathcal{S}$ et le point I' appartenant à Σ (voir figure 3.1). Ils sont confondus à l'instant t mais éventuellement amenés à se séparer aux instants ultérieurs.

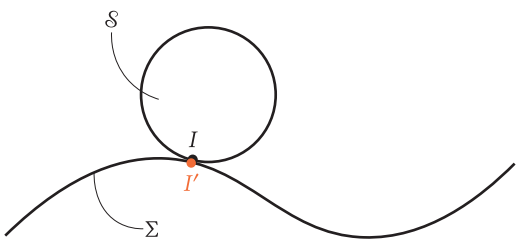


Figure 3.1 – Points $I \in \mathcal{S}$ et $I' \in \Sigma$ coïncidant à l'instant t.

La **vitesse de glissement** à t de $\mathcal{S}$ sur Σ est donnée par

$$\boxed{\vec{v}_g(\mathcal{S}/\Sigma) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(I \in \mathcal{S}) - \vec{v}_{\mathcal{R}}(I' \in \Sigma)}.$$

Lorsque $\mathcal{S}$ et Σ ne glisse pas l'un par rapport à l'autre les points I et I' coïncident à tout instant ultérieur et on a $\vec{v}_g = \vec{0}$. On parle alors d'**adhérence**.

▷ Force de contact

La friction des deux solides se fait à l'échelle microscopique. La description précise de ces actions est délicate et fait l'objet du complément 3.1, mais on peut les décrire macroscopiquement par une force résultante $\vec{R}$ de Σ sur $\mathcal{S}$ qui s'applique au point de contact I et dont on cherche à préciser la direction, le sens et la norme. Dans le modèle d'un contact ponctuel, les actions de contact ont un moment nul en I.

Attention :

Un contact ne peut avoir lieu sans un léger écrasement de la zone commune ce qui donnera lieu à un moment $\vec{\mathcal{M}}_I^{\text{contact}}$ a priori non nul. Nous considérons cette configuration au complément 3.2.

On décompose la force $\vec{R}$ subie par $\mathcal{S}$ en deux vecteurs :

- l'un, noté $\vec{N}$, est orthogonal au plan tangent aux solides au niveau point de contact. Il caractérise le non-encastrement du solide dans Σ et est dirigé de Σ vers $\mathcal{S}$ [1] ;
- l'autre, noté $\vec{T}$, est dans le plan tangent au contact (donc orthogonal à $\vec{N}$) et caractérise la friction.

Les lois du frottement solide, énoncées ci-après, portent sur ces deux composantes.

▷ Loi d'Amontons-Coulomb

Les lois d'Amontons-Coulomb, qui régissent le contact entre solides, sont des lois phénoménologiques énoncées par Amontons dès 1699 et précisées par Coulomb en 1785 [2].

Lois d'Amontons-Coulomb ou « lois du frottement solide ».

On distingue deux cas selon la valeur de $\vec{v}_g(\mathcal{S}/\Sigma)$.

- Si $\vec{v}_g(\mathcal{S}/\Sigma) = \vec{0}$, il y a adhérence et on a
$$\left\|\vec{T}\right\| \leq f_s \left\|\vec{N}\right\|.$$
- Si $\vec{v}_g(\mathcal{S}/\Sigma) \neq \vec{0}$, il y a glissement et on a
$$\left\|\vec{T}\right\| = f_d \left\|\vec{N}\right\| \quad \text{et} \quad \vec{T} \cdot \vec{v}_g(\mathcal{S}/\Sigma) < 0\,.$$

f_s et f_d sont deux coefficients caractérisant le contact respectivement nommés **coefficient de frottement statique** et **coefficient de frottement dynamique**. Ils ne dépendent que des corps en contact (matériaux, état de surface, etc.) et sont indépendants de la valeur de $\vec{N}$ (en particulier dans la plupart des cas usuels, de la masse de $\mathcal{S}$), de l'aire de la zone de contact entre les deux solides et, le cas échéant, de la vitesse de glissement [a].

a. Le fait que f_s et f_d ne dépendent pas de $\vec{v}_g$ n'est strictement valable qu'en première approximation mais ce sera systématiquement vérifié dans les cas qui se présenteront au concours.

Dans le cas du glissement, l'inégalité $\vec{T} \cdot \vec{v}_g(\mathcal{S}/\Sigma) < 0$ traduit que la composante $\vec{T}$ de la réaction du support dissipe de

1. Si ce n'était pas le cas il y aurait *rupture de contact.*
2. Les travaux de Charles-Augustin Coulomb répondent au problème de l'Académie datant de 1779 portant sur « le frottement et la roideur des cordes ». L'enjeu est à l'époque de mieux comprendre le comportement des cordes et des poulies sur les navires marchands et militaires.

Remarque

Dans le contexte du glissement cette idée est juste mais elle peut occulter des situations dans lesquelles le frottement est utile. Dans le cas de la marche à pied ou du mouvement d'une voiture c'est le fait qu'il y ait adhérence (donc frottement statique) qui permet de convertir l'action mécanique en mouvement. D'autres situations exploitent aussi le frottement dynamique : polissage, freinage, etc.

Insistons sur le fait que ces lois présentent une dichotomie importante entre la situation de glissement et celle de non glissement. Leur énoncé ne saurait se limiter à l'une des deux situations. Par ailleurs il ne faut pas omettre qu'elles portent sur les normes $\left\|\vec{T}\right\|$ et $\left\|\vec{N}\right\|$ et doivent être complétées par une réflexion physique afin de déterminer le sens de $\vec{T}$. Nous aurons l'occasion d'illustrer le raisonnement à mettre en œuvre dans les compléments de ce chapitre, notamment 3.3.

▷ Coefficients de frottement

f_s et f_d sont considérés égaux dans de nombreux problèmes de niveau CPGE, même si en toute rigueur on a plutôt $f_s \geq f_d$ comme en témoigne la table de valeurs 3.1 [3].

Manifestations expérimentales de $f_d \leq f_s$

Cette inégalité implique qu'il est plus facile d'entretenir un mouvement de glissement que de lui donner naissance. Par exemple, lorsqu'on déplace une armoire, il est plus difficile d'initier le mouvement que de la faire glisser ensuite. De même, il est connu que le freinage d'une voiture est moins efficace lorsque les roues sont bloquées et glissent sur la chaussée. Cela justifie l'utilisation généralisée des systèmes antiblocage des roues, en allemand *Antiblockiersystem* qui a donné l'acronyme commun « ABS ».

Matériaux	f_s	f_d
Acier/Acier	0,2	0,1
Pneu/Route	0,8	0,65
Pneu/Route mouillée	0,8	0,3
Bois/Bois	0,5	0,3
Pneu de F1/Route	1,8	
Caoutchouc/Acier	4	

Table 3.1 – Ordres de grandeur de quelques coefficients de frottement classiques.

Les valeurs présentées dans la table 3.1 ne sont en aucun cas des valeurs exactes et doivent être considérées comme des ordres de grandeurs de f_s et f_d. En effet, la valeur exacte de ces coefficients dépend de nombreux paramètres et varieront d'une expérience à une autre, même avec des matériaux identiques, selon l'état d'usinage des surfaces des solides, leur état d'usure, l'humidité, etc. Aussi, bien que ce soit négligé en première approximation, f_s et f_d peuvent dépendre de la vitesse de glissement. Nous aurons l'occasion de préciser ces dépendances et les limites des lois d'Amontons-Coulomb au complément 3.1. On pourra retenir que dans la grande majorité des cas usuels $f_s < 1$. Rien n'impose que ce soit toujours le ca smais cette inégalité est essentiellement mise en défaut pour des contacts travaillés industriellement précisément dans l'objectif de maximiser l'adhérence.

Fixe-glisse

La différence numérique entre f_s et f_d a son importance. Elle permet notamment d'expliquer les mouvements « fixe-glisse ». Ce type de mouvement, communément étudié en CPGE, consiste en une alternance de phases de glissement et de non-glissement. On pourra par exemple se référer à la plupart des références de deuxième année [CPGE2], en particulier [1].

3. Comme les lois d'Amontons-Coulomb, cette inégalité est phénoménologique. Elle ne se démontre pas à partir de principes fondamentaux de la physique, si bien qu'il peut exister des situations dans lesquelles elle est mise en défaut. Par exemple pour les systèmes de freinage ou les embrayages de voiture on cherche généralement à avoir un coefficient de frottement qui croît lorsque la vitesse de glissement augmente.

3.1 Analyse des frottements solides à l'échelle microscopique

Même si le contact entre deux solides et parfois supposé ponctuel ce n'est jamais le cas en toute rigueur et un fait surprenant dans l'énoncé des lois d'Amontons-Coulomb est le fait qu'*elles ne dépendent pas de l'aire de la zone de contact*[4]. Cette observation peut s'expliquer en « zoomant » sur la zone de contact et en étudiant les efforts à l'échelle microscopique. Cette étude a été menée par Bowden & Tabor dans les années 1950 [2]. Nous en relayons ici les grandes lignes.

Conseil didactique

La lecture de ce complément nécessite d'avoir en tête quelques notions de mécanique des solides déformables. On pourra (re)lire le complément 7.4.

Nécessité d'une description phénoménologique On pourrait vouloir décrire microscopiquement le contact en écrivant l'interaction (par exemple interaction de Van der Waals) entre un atome du solide $\mathcal{S}$ avec chacun de ceux de Σ et en sommant les contributions de tous les atomes de $\mathcal{S}$. Bien évidemment cela demanderait non seulement une puissance de calcul phénoménale mais, même en admettant cela possible, une connaissance des interactions et de l'organisation des atomes à une précision inaccessible. Le problème qui se pose est donc a priori très complexe et une description phénoménologique s'impose. Il est d'ailleurs remarquable qu'un problème aussi compliqué a priori soit en très bonne approximation décrit par des lois aussi simples que celles d'Amontons-Coulomb.
Dans la suite, nous cherchons à comprendre ces lois à partir de considérations microscopiques en réalisant donc un nombre important d'approximations et d'hypothèse. Il n'est pas question de prétendre les démontrer mais plutôt d'en comprendre les principales caractéristiques.

Surface réelle de contact La première idée de la modélisation est de différencier l'aire de la surface géométrique macroscopique « de contact » commune aux deux solides, notée A et que l'on mesure aisément d'une part, et d'autre part l'aire réelle du contact A_r à l'échelle microscopique. Du fait de la rugosité des surfaces considérées, l'aire A_r est nettement plus faible que A. La figure 3.2, représentant une rugosité exagérée, aide à s'en convaincre. Le contact entre les deux solides est donc ramené à une série de contacts quasi-ponctuels.

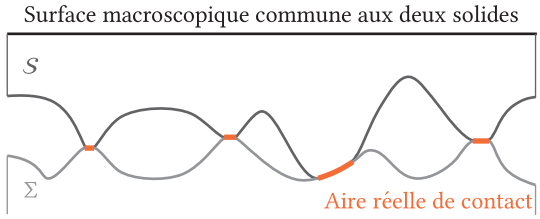


Figure 3.2 – L'aire réelle de contact à l'échelle microscopique est nettement plus petite que l'aire géométrique commune aux deux solides à l'échelle macroscopique.

Déformation en compression Dans un premier temps on considère que les deux solides sont simplement posés l'un sur l'autre de sorte que les efforts imposés sont normaux. On tient donc uniquement compte de la compression. La déformation ε due à la contrainte normale σ_N (force par unité de surface) imposée et donnée par la loi contrainte/-déformation en compression dont la tendance est schématiquement représentée figure 3.3.

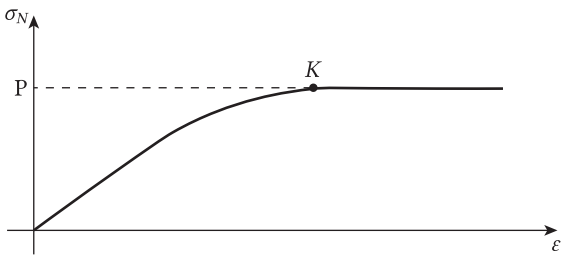


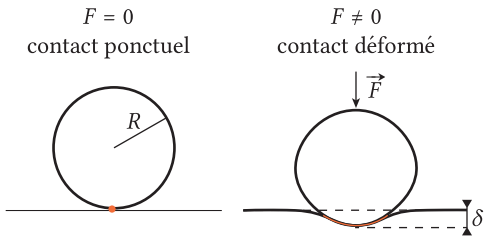
Figure 3.3 – Relation contrainte/déformation en compression. σ_N est la contrainte normale exercée par unité de surface et ε la déformation des solides $\mathcal{S}$ et Σ associée.

Dans le cas qui nous intéresse la force verticale contraignant les solides l'un sur l'autre est macroscopique (c'est par exemple le poids du solide supérieur) tandis qu'on a justifié plus haut que la surface réelle de contact est microscopique. La contrainte σ_N est donc très importante de sorte qu'elle doit être absorbée par une multitude de contacts quasi-ponctuels qui absorbent chacun au plus une contrainte P (la « résistance » du matériau, notée R dans 7.4) une fois dans leur régime plastique de déformation. P étant a priori largement inférieur à σ_N on pourra considérer que tous les contacts ponctuels ont atteint ce régime. L'équilibre macroscopique du solide impose ainsi $N = P \times A_r$ soit $P = N/A_r$.

4. Rappelons que même si le contact est souvent supposé ponctuel ce n'est jamais le cas en toute rigueur.

Contact de Hertz

Un contact dit « ponctuel » est toujours, en réalité, légèrement écrasé. La description de cet écrasement est compliquée, en témoigne le résultat suivant à propos du contact sphère-plan dit **contact de Hertz** [3].



Soit une sphère progressivement comprimée contre un plan par une force F, l'enfoncement δ, défini sur la figure ci-dessus, est la différence entre le rayon de la sphère et la distance réelle entre son centre et le plan. En gardant une modélisation élastique, donc *linéaire*, de la relation déformation/contrainte pour le solide constituant la sphère, la relation entre F et δ est donnée, du fait de la géométrie, par

$$F \propto \delta^{3/2}\,.$$

Ce contact est connu pour être un système physique dont le comportement est *non linéaire, y compris aux très faibles déformations $\delta \ll R$.*

Efforts de cisaillement, rupture Les micro-contacts étudiés subissent des efforts si importants qu'on peut considérer qu'à ces endroits les deux solides « fusionnent ». Appliquons alors une action T parallèle à la surface de contact (typiquement on tire $\mathcal{S}$ sur un plan).

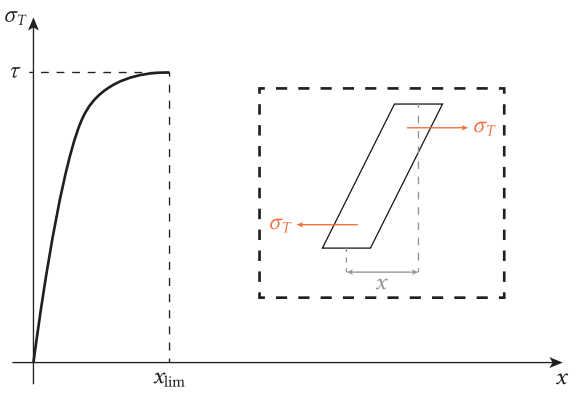


FIGURE 3.4 – Relation contrainte/déformation en cisaillement. σ_T est la contrainte tangentielle exercée par unité de surface et x la déformation des solides. L'encart pointillé rappelle comment est décrit le cisaillement.

Chaque micro-contact subit une contrainte tangentielle $\sigma_T = T/A_r$ sa déformation est donnée schématiquement par la courbe de réponse contrainte/déformation en cisaillement présentée figure 3.4. Contrairement à ce qui se passait en compression, les contacts ne peuvent pas se déformer notablement en cisaillement et cassent dès que la contrainte appliquée devient supérieure à τ.
Considérons dans un premier temps que T est relativement faible, c'est-à-dire que $T/A_r \ll \tau$. Alors la contrainte tangentielle peut se répartir sur tous les micro-contacts en garantissant pour la majorité d'entre eux qu'il n'y a pas rupture. Cette répartition tient jusqu'à ce que T atteigne une valeur seuil de l'ordre de $T = \tau A_r$ à partir de laquelle les contacts ne peuvent plus absorber la contrainte et sont obligés de rompre. Comme on a justifié précédemment que $A_r = N/P$ on a finalement :

$$\begin{array}{ll} T < \dfrac{\tau}{P} N & \text{lorsqu'il n'y a pas glissement} \\ T = \dfrac{\tau}{P} N & \text{lorsqu'il y a glissement.} \end{array}$$

On retrouve donc un comportement semblable à celui annoncé par les lois d'Amontons-Coulomb. On comprend qu'effectivement ces lois ne dépendent pas de la surface du contact puisque quelle que soit la surface disponible au contact c'est la surface réelle A_r qui joue un rôle et celle-ci varie en s'écrasant plus ou moins pour compenser exactement la contrainte normale. Enfin on relie le coefficient de frottement aux propriétés intrinsèques du solide déformable sans considérations sur le contact en tant que tel.

Imbrication en dent de scie

Pour aller plus loin la référence [TLM] propose, en application du chapitre 20, une description simplifiée de l'échelle microscopique qui consiste à voir les deux solides comme des dents de scie imbriquées qui bougent l'une sur l'autre sans frottement. On trouve, pour la mise en mouvement, une expression analogue aux lois d'Amontons-Coulomb où l'angle des dents de scie $\tan\alpha$ joue le rôle du coefficient de frottement.

Coefficient dynamique, coefficient statique La modélisation microscopique proposée ne permet pas de différencier f_s et f_d. En revanche, on peut donner quelques pistes pour interpréter l'inégalité $f_d < f_s$.

- D'un point de vue microscopique, avant la rupture la force à laquelle peuvent résister les contact dans un état « fusionné » est plus grande qu'après la rupture.
- De plus, la mise en mouvement sur les aspérités microscopiques tend à soulever $\mathcal{S}$, c'est-à-dire à lui appliquer une force verticale vers le haut. La résultante de cette force avec N est donc inférieure à N ce que l'on traduit, faute de pouvoir l'expliciter au niveau microscopique, par un coefficient de frottement plus faible que f_s.
- Enfin, lorsque le glissement a lieu il s'accompagne d'un **labourage** qui « lisse » les surfaces à l'échelle microsco-

pique et réduit les aspérités. Cela contribue encore à auto-entretenir le glissement.

Limitations des lois d'Amontons-Coulomb Cette description sommaire et largement perfectible permet d'entrevoir certaines limitations aux lois de Coulomb. En premier lieu, dès que la surface A_r tend à rejoindre la valeur de A, le raisonnement ne tient plus. C'est en particulier le cas lorsque la charge est trop importante ou si les matériaux sont trop mous. Dans ces cas les contacts s'écrasent immédiatement. De plus la valeur des coefficients de frottement dépend des propriétés mécaniques du solide sans qu'on soit capable d'anticiper l'impact de l'état de surface ou du vieillissement du contact. On ne décrit pas non plus l'historique du matériau qui adhérera plus ou moins selon qu'il a été déjà beaucoup éprouvé (ce qui rejoint l'idée du labourage exposé juste au dessus).

Aux concours ...

Cette partie, qui pourra éventuellement servir à l'oral, doit avoir au moins le mérite de faire passer un message clair : aucune valeur tabulée de f_s ou f_d ne peut servir de référence absolue car elles dépendent de l'état de surface. Le seul moyen de les connaître pour un contact donné est de les mesurer systématiquement.

3.2 Mouvements possibles entre deux solides en contact

On propose dans ce complément de passer en revue les différents mouvements possibles entre deux solides en contact. C'est notamment l'occasion de rappeler quelles contraintes s'appliquent à quels mouvements et de discuter des liaisons physiques entre différents systèmes. Dans les cas qui suivent le contact n'est pas supposé ponctuel du fait de la géométrie des solides (pavé/plan par exemple) ou de l'écrasement du contact (sphère/plan notamment).

3.2.1 Glissement, basculement et point d'application de la réaction du support

Considérons un pavé de côté a et hauteur h, de masse m, posé sur un plan et tiré dans la direction $\vec{u}_x$ par une force $\vec{F} = F\vec{u}_x$ appliquée en M comme représenté figure 3.5. Le frottement entre le pavé et le plan est ici caractérisé par un unique coefficient $f = f_s = f_d$.

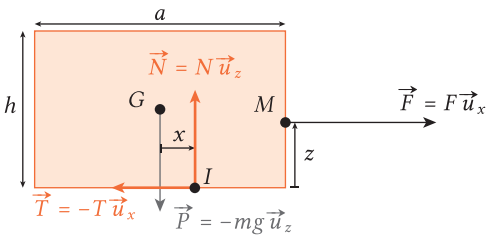


Figure 3.5 – Le pavé est soumis à une force de traction $\vec{F} = F\vec{u}_x$ appliquée en M, à son poids $\vec{P}$ appliqué en G et à la réaction du support $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ appliqué au point I dont la position exacte est inconnue à ce stade.

Glissement Commençons par appliquer au pavé le théorème de la résultante dynamique :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}$$
$$\text{i.e.} \quad m\ddot{x} = -mg\vec{u}_z + N\vec{u}_z - T\vec{u}_x + F\vec{u}_x$$

Selon $\vec{u}_z$ l'absence de mouvement impose $\boxed{N = mg}$. Selon $\vec{u}_x$ il vient $m\ddot{x} = -T + F$ et on distingue deux cas :

- Soit il y a adhérence (ou *non-glissement*). On a alors $\ddot{x} = 0$ donc $F = T$. Dans ce cas, d'après les lois d'Amontons-Coulomb, on doit avoir $T \leq fN$. Cette situation ne peut ainsi advenir que si $F \leq fmg$.
- Soit il y a glissement. On a alors $m\ddot{x} = -T + F$. Dans ce cas les lois du frottement solide imposent $T = fN = fmg$. On a alors $\ddot{x} = -fmg + F$ et cela ne peut avenir que si $F > fmg$ d'après le cas précédent ce qui garantit que $\ddot{x} > 0$ et le glissement a lieu dans le sens attendu des x positifs.

Point d'application de $\vec{R}$ Si les forces de contact s'appliquent sur l'ensemble de la surface commune au pavé et au plan, comme nous l'avons discuté au complément 3.1, leur résultante $\vec{R}$ s'applique en un point I dont la position n'est pas évidente.

Attention :

Le point d'application d'une force est toujours le point du système par rapport auquel la force n'exerce pas de moment. Si la force est ponctuelle cela se démontre facilement : admettons qu'elle s'applique en O, alors

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OO} \wedge \vec{F} = \vec{0}\,.$$

Par exemple, le centre de gravité G d'un solide est le point d'application du poids. C'est donc le point par rapport auquel le poids n'applique aucun moment : $\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{P}) = \vec{0}$.

L'équilibre des forces étant vérifié, le point d'application I de la force $\vec{R}$ (commun, donc, à $\vec{T}$ et $\vec{N}$) est, par définition, le point par rapport auquel le moment de $\vec{R}$ est nul : $\vec{\mathcal{M}}_I(\vec{R}) = \vec{0}$. On peut alors déterminer la position du point I en appliquant le théorème du moment cinétique en I où

$\vec{\mathcal{M}}_I(\vec{N}) = \vec{\mathcal{M}}_I(\vec{T}) = \vec{0}$:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_I}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \quad \text{car le pavé est à l'équilibre,}$$

puis, d'après le TMC,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{L}_I}{\mathrm{d}t} &= \vec{\mathcal{M}}_I(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_I(\vec{F}) + \vec{\mathcal{M}}_I(\vec{T}) + \vec{\mathcal{M}}_I(\vec{N}) \\ &= -(mgx - Fz)\,\vec{u}_y\,,\end{aligned}$$

d'où la relation définissant la position du point I :

$$x = Fz/mg\ .$$

Plusieurs remarques s'imposent :

- Si on ne tire pas sur le pavé ($F = 0$), le point I est la projection de G sur la surface de contact.
- Si on tire sur la droite du pavé, le point d'application de la force est à droite de G. Si on pousse ($F < 0$), le point d'application est à gauche de G.
- Plus le pavé est lourd, moins le point d'application s'écarte de la verticale de G.

Basculement Notons enfin que si $|x| > a/2$, le point d'application I sort de la surface de contact entre les deux solides ce qui est impossible. L'équilibre des moments est nécessairement rompu et le solide **bascule**. La condition de basculement s'écrit

$$\frac{|F|}{mg}z > \frac{a}{2}\,.$$

Cette condition peut être vérifiée soit pour une force trop grande, soit pour une force appliquée trop haut, ce qui est conforme aux manifestations quotidiennes de cette situation. À l'inverse, cette condition est d'autant plus difficile à remplir que le pavé est large (a grand) et lourd (m élevée).

Attention :

On pourrait penser que le coefficient de frottement f ne joue pas de rôle dans la condition de basculement. Cela n'est pas exact, car le rôle de f est caché dans les hypothèses : en effet, pour avoir $F = T$ alors que le pavé est immobile, on doit avoir $|F| \leq fN$. Si la force F dépasse cette limite avant de vérifier la condition de basculement on aura glissement du pavé.

Remarque

Le même raisonnement s'applique pour un pavé posé sur un plan qu'on inclinerait progressivement.

3.2.2 Roulement et pivotement

Le solide $\mathcal{S}$ peut aussi avoir des mouvements de rotation par rapport à Σ. Lorsque la rotation se fait autour d'un axe du plan de contact on parle de **roulement** tandis qu'on parle de **pivotement** lorsque la rotation se fait autour de l'axe orthogonal au contact. On illustre ces deux mouvements sur le cas intuitif d'une sphère sur un plan figure 3.6.

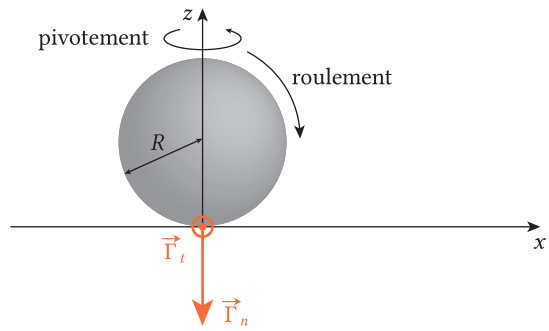


FIGURE 3.6 – Mouvements d'une sphère sur un plan.

Roulement sans glissement Dans le cas général, rien n'empêche la sphère de glisser sur le support. Le mouvement est alors une combinaison du roulement, glissement et pivotement. C'est un mouvement compliqué et dont la résolution est difficilement accessible mais qui ne se rencontre qu'à de rares occasions, la plus classique étant la boule de billard sur sa table. Dans la très grande majorité des cas d'étude, on fait l'hypothèse supplémentaire de **roulement sans glissement** c'est-à-dire qu'on impose $\vec{v}_g(\mathcal{S}/\Sigma) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(I \in \mathcal{S}) - \vec{v}_{\mathcal{R}}(I' \in \Sigma) = \vec{0}$. On est alors souvent dans le cas représenté figure 3.7.

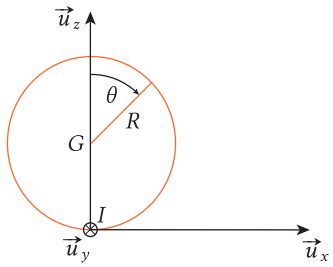


FIGURE 3.7 – Description cinématique d'une situation de roulement sans glissement.

Cette hypothèse a l'avantage d'imposer une condition cinématique supplémentaire qui aide à clore le système. En effet, on a $\vec{v}_{\mathcal{R}}(I \in \mathcal{S}) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(I' \in \Sigma)$ et le support étant immobile, $\vec{v}_{\mathcal{R}}(I' \in \Sigma) = \vec{0}$. Le solide étant en rotation de vecteur $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{u}_y$ on a, par composition des vitesses,

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\mathcal{R}}(G) &= \vec{v}_{\mathcal{R}}(I) + \vec{GI} \wedge \vec{\Omega} \\ &= \vec{0} - R\vec{u}_z \wedge \dot{\theta}\vec{u}_y\,,\end{aligned}$$

d'où la relation :

$$\boxed{\vec{v}(G/\mathcal{R}) = R\dot{\theta}\vec{u}_x}\,.$$

Frottements de roulement et de pivotement En réalité, le contact n'est pas rigoureusement ponctuel (il s'écrase), de sorte qu'il s'oppose à la mise en rotation de la sphère par un moment $\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_n + \vec{\Gamma}_t$. Le raisonnement est parfaitement analogue à la décomposition de $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ (voir figure 3.6) :

- $\vec{\Gamma}_n$ s'oppose au pivotement,
- $\vec{\Gamma}_t$ s'oppose au roulement.

De plus, des lois tout à fait similaires aux lois d'Amontons-Coulomb peuvent être écrites (voir [TLM]). Notamment, il existe un couple minimal à appliquer à la sphère pour que le mouvement de pivotement ou de roulement s'amorce.

Attention :
Dès lors que le contact est supposé ponctuel ces moments sont nécessairement nuls.

3.2.3 Liaisons

Une **liaison** est un modèle rendant compte d'un dispositif qui met deux solides en contact en autorisant ou non certains mouvements relatifs ([Dict]).

- Lorsqu'on force un mouvement autorisé par la liaison on peut transmettre un très léger effort du fait des frottements. La liaison dissipe alors une puissance P_{liaison}.
- Lorsqu'on force un mouvement relatif interdit par la liaison celle-ci transmet automatiquement tous les efforts de translation et rotation, jusqu'à rupture éventuelle.

Une liaison est dite **parfaite** si $P_{\text{liaison}} = 0$, autrement dit s'il n'y a pas de frottement lors des mouvements relatifs autorisés. En général les frottements dissipent de l'énergie et on a plutôt $P_{\text{liaison}} < 0$. Étudions quelques exemples communs :

La liaison glissière est la plus simple (quoique rarement rencontrée dans les exercices). Elle autorise seulement la translation selon l'axe de liaison et transmet tous les autres efforts. Une liaison glissière parfaite n'exerce pas de frottement lors d'un mouvement de translation suivant son axe.

La liaison rotule autorise toute les rotations autour d'un point mais aucune translation. C'est par exemple la liaison qui permet d'attacher un pendule à son support [5]. La liaison rotule parfaite ne s'oppose à aucune des trois rotations de sorte que $P_{\text{liaison}} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega} = 0$ pour tout $\vec{\Omega}$ donc $\vec{\Gamma} = \vec{0}$. Ainsi le moment résultant des actions est nul, mais pas leur résultante elle-même.

La liaison pivot est une réduction de la rotule et permet la rotation autour d'un axe seulement. C'est la liaison qui permet d'accrocher une roue à son support par exemple. La liaison pivot parfaite doit vérifier $P_{\text{liaison}} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega} = 0$ mais cette fois $\vec{\Omega}$ est restreint aux rotations autour de l'axe Δ de la liaison de sorte qu'on conclut seulement $\Gamma_\Delta = 0$.

Remarque

Une liaison pivot avec $\vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega} > 0$, donc motrice, permet de rendre compte du comportement d'un moteur.

Ces trois liaisons, qui sont les plus classiques, sont représentées figure 3.8.

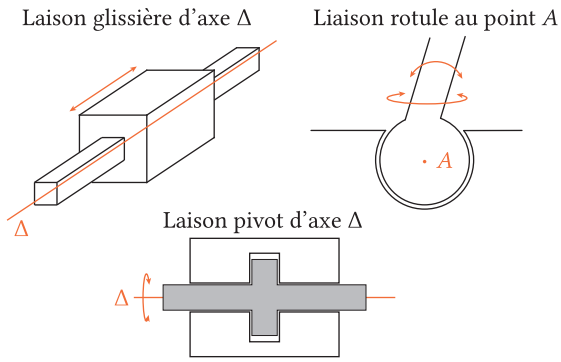


Figure 3.8 – Représentation schématique de trois liaisons.

5. En réalité la plupart des pendules n'ont pas leur trois rotations libres et son plutôt reliés au support par une liaison pivot. On pourra préférer, pour exemple de liaison rotule, l'attache d'une caravane.

3.3 Oscillateur amorti par frottements solides

Conseil didactique

L'intérêt de cette étude est double. D'une part le système en soi est pertinent car il peut être présenté en montage et modélise des phénomènes physiques réel. D'autre part l'exemple est didactiquement intéressant pour introduire l'étude d'une alternance de phases de glissement et de non-glissement. Pour approfondir on renvoie aussi à l'étude du « fixe-glisse » (voir notamment [CPGE2, 1]).

L'étude des oscillateurs, menée au chapitre 2, doit être complétée par celle de l'oscillateur amorti par frottements solides car changer la forme de l'amortissement modifie drastiquement la phénoménologie et le traitement mathématique du système.
Dans ce complément un mobile parallélépipédique de masse m est posé sur un plan et relié à un point de fixation par un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k. Le contact entre le solide et le plan est caractérisé par un unique coefficient de frottement f (on identifie f_s à f_d). La position du mobile est repérée par l'abscisse x du point d'attache du ressort, $x = 0$ correspond à un ressort au repos ($l = l_0$). Ce système est décrit figure 3.9.

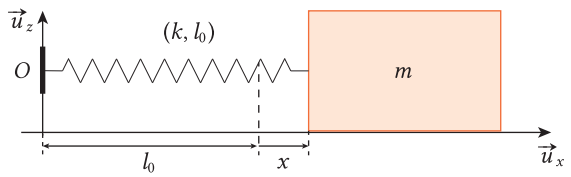


Figure 3.9 – Situation étudiée dans ce complément.

3.3.1 Première phase du mouvement

À l'instant initial $t = 0$, le mobile est placé en x_0. Les forces qui s'exercent sur lui sont alors

- son poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$,
- le rappel du ressort $\vec{F} = -kx\vec{u}_x$,
- la résultante des actions de contact $\vec{R}$ décomposée selon

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}\,.$$

Le contact est garanti si $\vec{N} = N\vec{u}_z$ avec $N > 0$ et, à ce stade, on note $\vec{T} = T\vec{u}_x$ avec T de signe inconnu a priori.

Attention :

Insistons une dernière fois sur le fait qu'il est primordial de déterminer soigneusement le sens de $\vec{N}$ et $\vec{T}$ pour ensuite écrire les lois de Coulomb sans erreur.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au mobile dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen s'écrit immédiatement en projection sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$:

$$m\ddot{x} = -kx + T\,,$$
$$0 = -mg + N\,.$$

La deuxième équation permet d'exprimer $N = mg$. La première phase du mouvement dépend du rapport entre la force de rappel et la composante tangentielle. Tant que $k|x_0| \leq fmg$, c'est-à-dire $|x_0| \leq fmg/k$ on peut vérifier l'inégalité $|T| = k|x_0| \leq fmg = fN$ sans contredire la loi d'Amontons-Coulomb sur le frottement statique : la situation d'adhérence persiste, le mobile reste immobile.
Cela permet d'énoncer le critère d'arrêt de l'oscillateur du système :

$$\boxed{\dot{x} = 0 \quad \text{et} \quad x \in [-p, p] \quad \text{où} \quad p = \frac{fmg}{k}}\,. \tag{3.1}$$

On constate donc que l'oscillateur peut s'arrêter en un point $x \neq 0$. On parle de **plage d'arrêt**.

Incertitude de certains instruments de mesure

Cette plage d'arrêt peut s'avérer problématique pour un certain nombre de capteurs dont l'indicateur est mécanique. Prenons pour exemple une balance dont l'aiguille pointe une masse m_0 lorsqu'elle s'arrête à la position θ_0. Lorsqu'on dépose une telle masse sur la balance l'aiguille oscille brièvement autour de θ_0 et interrompt son mouvement en une position θ qui peut différer de θ_0 du fait de la plage d'arrêt de l'oscillateur à frottements solides.

Si au contraire $|x_0| > p$, la force de rappel est trop forte pour être compensée par les frottements et le pavé entame une phase de glissement. On change alors de cas d'application des lois d'Amontons-Coulomb. Prenons pour fixer les idées $x_0 > p$ (le ressort est étiré), alors le glissement s'effectue vers la gauche avec $\dot{x} < 0$. On a, d'après lesdites lois,

$$\vec{T} \cdot \vec{v}_g = T\dot{x} < 0 \quad \text{donc} \quad T > 0\,,$$
$$\text{et} \quad |T| = T = fN = fmg\,.$$

L'équation du mouvement est donc

$$m\ddot{x} = -kx + fmg \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = fg\,, \tag{3.2}$$

qui est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0^2 = k/m$ excentré. En effet, si la solution homogène reste $x_{\text{hom}}(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ on doit lui ajouter une solution particulière qui vaut $x_{\text{part}}(t) = p = fg/\omega_0^2$. La solution générale, satisfaisant aux conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$ est

$$x(t) = (x_0 - p)\cos(\omega_0 t) + p\,,$$

de sorte que l'oscillation se fait de manière complètement sinusoïdale mais autour de p. Cette première phase, représentée graphiquement sur la figure 3.10, est valable tant qu'il y a glissement c'est-à-dire jusqu'au prochain point d'annulation de la vitesse du pavé.



Physique pour l'agrégation

Les concours interne et externe de l'agrégation de physique ont connu de récentes évolutions (accès à internet durant les épreuves orales, fin des listes de sujets au concours externe…). Par ailleurs, les thèmes de niveau de fin de Licence sont plus difficiles à appréhender par les candidats ne disposant souvent que d'une littérature spécialisée.

Afin de répondre à ces deux problématiques, ce manuel propose un **cours synthétique** – reprenant les notions indispensables – suivi d'une **série de compléments** aussi précieux pour les épreuves écrites que pour les épreuves orales. En particulier, les **fiches synthèse** seront très utiles aux candidats durant leurs révisions. Une **bibliographie détaillée** par chapitre permet d'identifier rapidement les ressources complémentaires. Les sujets couverts vont de la physique classique (mécanique, thermodynamique) à la physique moderne (mécanique quantique, relativité, physique statistique).

I. Mécanique
1. Théorèmes généraux de la mécanique
2. Oscillateurs
3. Frottements solides
4. Forces centrales
5. Mouvement de particules chargées
6. Changements de référentiels
7. Mécanique des solides
8. Mécanique relativiste
9. Mécanique analytique

II. Physique quantique et nucléaire
10. Dualité onde-corpuscule
11. Fonction d'onde et équation de Schrödinger
12. Formalisme de la mécanique quantique
13. Moment cinétique
14. Physique subatomique. Énergie nucléaire

III. Thermodynamique
15. Description des systèmes thermodynamiques à l'équilibre
16. Transformations d'un système thermodynamique
17. Du fluide parfait à la transition de phase
18. Les principes de la physique appliqués à des systèmes ouverts
19. Machines thermiques
20. Phénomènes de transport

IV. Physique statistique
21. Fondements théoriques. Ensemble microcanonique
22. Ensemble canonique
23. Ensemble grand-canonique. Statistiques quantiques
24. Rayonnement thermique

Appendice : Outils transverses

Index

LES PLUS

- **Combinaison de synthèses de cours et de compléments**
- **Figures disponibles en version numérique**
- **Références aux épreuves récentes des concours**

Jules Fillette est professeur agrégé à l'ENS Ulm et enseigne à la préparation à l'agrégation de physique-chimie de Montrouge.

Julien Froustey est docteur en physique et réalise un post-doctorat à l'Université de Berkeley. Il a précédemment enseigné au centre de préparation de Montrouge.

Hugo Roussille est docteur en physique et enseigne à la préparation à l'agrégation de l'ENS de Lyon. Il a aussi été encadrant à la préparation à l'agrégation interne de l'Université Paris Cité.

Tous les trois ont obtenu l'agrégation externe de physique en 2019.

42,90 €

ISBN : 978-2-8073-3642-1

9 782807 336421

deboeck SUPÉRIEUR

www.deboecksuperieur.com

Conception graphique : Primo&Primo®