

PRÉPAS SCIENTIFIQUES  
PCSI-PTSI

CONFORME AU  
PROGRAMME

Olivier Coulaud

# Maths

ENTRAÎNEMENT INTENSIF



**Tous les rappels de cours**  
pour réviser les notions  
essentielles en un clin d'œil



**Plus de 240 exercices progressifs**  
en phase avec les attentes  
des concours



**Plus de 65 fiches méthodes**  
pour maîtriser les techniques  
de résolution des exercices



**Tous les corrigés détaillés**



**OFFERT EN LIGNE**

► Toutes les **fiches méthodes**  
à télécharger pour des révisions  
nomades

Vuibert



**PRÉPAS SCIENTIFIQUES  
PCSI-PTSI**

**CONFORME AU  
PROGRAMME  
2021**

# Maths

**ENTRAÎNEMENT INTENSIF**

**Olivier Coulaud**

Agrégé de mathématiques, enseignant de mathématiques en classes préparatoires scientifiques filière PSI,  
au lycée Roland Garros à La Réunion.

**Vuibert**

## RESSOURCES NUMÉRIQUES

**Retrouvez  
nos ressources numériques  
à télécharger**

[www.vuibert.fr/site/215953](http://www.vuibert.fr/site/215953)

**Retrouvez notre collection  
complète ici :**



**ISBN : 978-2-311-21595-3**

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1<sup>er</sup> de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal. Le « photocopillage », c'est l'usage abusif et collectif de la photocopie sans autorisation des auteurs et des éditeurs. Largement répandu dans les établissements d'enseignement, le « photocopillage » menace l'avenir du livre, car il met en danger son équilibre économique. Il prive les auteurs d'une juste rémunération. En dehors de l'usage privé du copiste, toute reproduction totale ou partielle de cet ouvrage est interdite. Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au Centre français d'exploitation du droit de copie : 20, rue des Grands-Augustins, F-75006 Paris. Tél. : 01 44 07 47 70.

© Vuibert - juillet 2023 - 5, allée de la 2<sup>e</sup> D.B., 75015 Paris - Site Internet : <http://www.vuibert.fr>



# SOMMAIRE

## Chapitre 1. Raisonnement et vocabulaire ensembliste - Applications 7

Rappel de cours, p. 7

1 ► Ensembles, p. 7 — 2 ► Applications, p. 9

Méthodes, p. 12, Entraînement, p. 16, Corrigés, p. 18

## Chapitre 2. Sommes et produits - Inégalités dans $\mathbb{R}$ 25

Rappel de cours, p. 25

Méthodes, p. 32, Entraînement, p. 35, Corrigés, p. 37

## Chapitre 3. Trigonométrie 47

Rappel de cours, p. 47

1 ► Repérage sur le cercle trigonométrique - Définition de  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ , p. 47 — 2 ► Congruence modulo  $2\pi$ , p. 48 — 3 ► Valeurs remarquables, p. 48 — 4 ► Fonctions sinus et cosinus, p. 54 — 5 ► La fonction tangente, p. 56

Méthodes, p. 57, Entraînement, p. 61, Corrigés, p. 63

## Chapitre 4. Nombres complexes 74

Rappel de cours, p. 74

1 ► Forme algébrique - Affixe, p. 74 — 2 ► Conjugaison - Module, p. 75 — 3 ► Nombres complexes de module 1 et trigonométrie - Formes trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe non nul, p. 75 — 4 ► Racines carrées d'un nombre complexe, p. 78 — 5 ► Équations algébriques, p. 78 — 6 ► Racines  $n$ -ièmes d'un nombre complexe, p. 79 — 7 ► Interprétation géométrique des nombres complexes, p. 80

Méthodes, p. 80, Entraînement, p. 84, Corrigés, p. 85

## Chapitre 5. Fonctions d'une variable réelle 95

Rappel de cours, p. 95

1 ► Généralités sur les fonctions, p. 95 — 2 ► Dérivation, p. 97 — 3 ► Régularité : fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  et plus, p. 98 — 4 ► Fonctions usuelles, p. 98 — 5 ► Fonctions trigonométriques et trigonométriques réciproques, p. 101 — 6 ► Dérivation d'une fonction complexe à valeurs réelles, p. 103

Méthodes, p. 103, Entraînement, p. 107, Corrigés, p. 109

## Chapitre 6. Primitives et équations différentielles linéaires 119

Rappel de cours, p. 119

1 ► Primitives d'une fonction continue, p. 119 — 2 ► Équations différentielles linéaires du premier ordre, p. 123 — 3 ► Équations différentielles linéaires d'ordre 2, p. 125

Méthodes, p. 126, Entraînement, p. 129, Corrigés, p. 131

## **Chapitre 7. Suites numériques** **141**

### **Rappel de cours, p. 141**

**1** ► Borne supérieure, p. 141 — **2** ► Suites particulières, p. 142 — **3** ► Généralités sur les suites réelles, p. 143 — **4** ► Limite d'une suite réelle, p. 144 — **5** ► Propriétés des suites monotones bornées, p. 145 — **6** ► Suites extraites, p. 145 — **7** ► Suites complexes, p. 146

**Méthodes, p. 146, Entraînement, p. 150, Corrigés, p. 151**

## **Chapitre 8. Limites et continuité - Dérivabilité** **161**

### **Rappel de cours, p. 161**

**1** ► Limites, p. 161 — **2** ► Croissances comparées, p. 164 — **3** ► Continuité, p. 164 — **4** ► Dérivabilité, p. 165

**Méthodes, p. 170, Entraînement, p. 173, Corrigés, p. 174**

## **Chapitre 9. Calcul matriciel - Systèmes linéaires** **183**

### **Rappel de cours, p. 183**

**1** ► Opérations sur les matrices, p. 183 — **2** ► Systèmes linéaires, p. 187 — **3** ► Matrices et systèmes linéaires, p. 190 — **4** ► Matrices inversibles - Inverse d'une matrice, p. 190

**Méthodes, p. 191, Entraînement, p. 194, Corrigés, p. 196**

## **Chapitre 10. Polynômes** **210**

### **Rappel de cours, p. 210**

**1** ► Polynômes à une indéterminée, p. 210 — **2** ► Divisibilité et division euclidienne, p. 210 — **3** ► Fonctions polynomiales et racines, p. 211 — **4** ► Dérivation, p. 211 — **5** ► Factorisation - Décomposition en produit de facteurs irréductibles, p. 212 — **6** ► Décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  des fonctions rationnelles à pôles simples, p. 212

**Méthodes, p. 213, Entraînement, p. 218, Corrigés, p. 219**

## **Chapitre 11. Analyse asymptotique** **231**

### **Rappel de cours, p. 231**

**1** ► Relations de comparaison : cas des fonctions, p. 231 — **2** ► Développements limités, p. 233 — **3** ► Relations de comparaison : cas des suites, p. 235 — **4** ► Problèmes d'analyse asymptotique, p. 237

**Méthodes, p. 238, Entraînement, p. 241, Corrigés, p. 242**

## **Chapitre 12. Géométrie du plan et de l'espace (PTSI)** **251**

### **Rappel de cours, p. 251**

**1** ► Géométrie du plan, p. 251 — **2** ► Géométrie de l'espace, p. 256

**Méthodes, p. 260, Entraînement, p. 265, Corrigés, p. 266**

## **Chapitre 13. Espaces vectoriels** **277**

### **Rappel de cours, p. 277**

**1** ► Espaces vectoriels, p. 277 — **2** ► Espaces vectoriels de dimension finie, p. 279

**Méthodes, p. 281, Entraînement, p. 284, Corrigés, p. 286**

## **Chapitre 14. Applications linéaires** **293**

Rappel de cours, p. 293

**1** ► Applications linéaires - Endomorphismes, p. 293 — **2** ► Endomorphismes remarquables, p. 294 — **3** ► Projecteurs et symétries, p. 295 — **4** ► Détermination d'une application linéaire lorsque  $E$  est de dimension finie, p. 296 — **5** ► Rang d'une application linéaire - Théorème du rang, p. 296 — **6** ► Équations linéaires, p. 297 — **7** ► Formes linéaires et hyperplans en dimension finie, p. 297

Méthodes, p. 298, Entraînement, p. 302, Corrigés, p. 304

## **Chapitre 15. Matrices et applications linéaires** **313**

Rappel de cours, p. 313

**1** ► Matrice d'une application linéaire dans des bases, p. 313 — **2** ► Changements de bases, p. 314 — **3** ► Application linéaire canoniquement associée à une matrice - Rang d'une matrice, p. 315 — **4** ► Systèmes linéaires, p. 317

Méthodes, p. 317, Entraînement, p. 321, Corrigés, p. 323

## **Chapitre 16. Déterminants (PCSI-PTSI option PSI)** **336**

Rappel de cours, p. 336

Méthodes, p. 338, Entraînement, p. 341, Corrigés, p. 343

## **Chapitre 17. Intégration** **353**

Rappel de cours, p. 353

**1** ► Primitives, p. 353 — **2** ► Intégrale d'une fonction continue sur un segment, p. 354 — **3** ► Rappels : méthodes de calculs d'intégrales, p. 355 — **4** ► Sommes de Riemann, p. 356 — **5** ► Lien entre intégrale et primitive, p. 357 — **6** ► Inégalité de Taylor-Lagrange, p. 357 — **7** ► Cas des fonctions à valeurs complexes, p. 358

Méthodes, p. 358, Entraînement, p. 361, Corrigés, p. 364

## **Chapitre 18. Dénombrement - Probabilités** **379**

Rappel de cours, p. 379

**1** ► Dénombrement, p. 379 — **2** ► Probabilités, p. 380

Méthodes, p. 383, Entraînement, p. 386, Corrigés, p. 388

## **Chapitre 19. Variables aléatoires réelles** **401**

Rappel de cours, p. 401

**1** ► Variable aléatoire - Loi, p. 401 — **2** ► Espérance - Variance, p. 402 — **3** ► Lois usuelles, p. 404 — **4** ► Couples de variables aléatoires, p. 405 — **5** ► Couples de variables aléatoires, p. 407 — **6** ► Covariance et indépendance, p. 408 — **7** ► Inégalités probabilistes, p. 408

Méthodes, p. 408, Entraînement, p. 412, Corrigés, p. 415

## **Chapitre 20. Produits scalaires Espaces préhilbertiens et euclidiens (PCSI)** **426**

Rappel de cours, p. 426

Méthodes, p. 429, Entraînement, p. 433, Corrigés, p. 435

**Chapitre 21. Séries numériques** **444**

Rappel de cours, p. 444

**1** ► Généralités - Vocabulaire, p. 444 — **2** ► Séries remarquables, p. 445 — **3** ► Séries à termes positifs, p. 446 — **4** ► Séries absolument convergentes, p. 447

Méthodes, p. 447, Entraînement, p. 452, Corrigés, p. 453

**Chapitre 22. Fonctions de deux variables (PCSI-PTSI option PSI)** **465**

Rappel de cours, p. 465

**1** ► Ouverts de  $\mathbb{R}^2$  - Fonctions continues, p. 465 — **2** ► Dérivées partielles et composées - Règle de la chaîne, p. 468 — **3** ► Dérivées partielles et composées, p. 470 — **4** ► Extrema d'une fonction de deux variables, p. 470

Méthodes, p. 471, Entraînement, p. 473, Corrigés, p. 474

# CHAPITRE 1

## Raisonnement et vocabulaire ensembliste - Applications

### Objectifs et compétences du programme

| Capacités principales<br>à maîtriser | Méthodes<br>associées | Exercices<br>associés |
|--------------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| Modes de raisonnement                | 1-2                   | A-E                   |
| Ensembles - Inclusion - Parties      | 3                     | 5-C                   |
| Image directe - Image réciproque     |                       | 1-3-F                 |
| Injection - Surjection               | 4-5                   | 2-3-4-B-D-F           |
| Bijection - Réciproque               | 5                     | 2-3-B-D               |

## RAPPELS DE COURS

### 1. Ensembles



#### Définition 1.1.

- Il existe un unique ensemble ne contenant aucun élément. Il s'agit de l'**ensemble vide**, noté  $\emptyset$ .
- (a) Soient deux ensembles  $E$  et  $F$ .  
On dit que  $E$  est **inclus dans**  $F$  et on note  $E \subset F$  si tout élément de  $E$  est élément de  $F$ .  
On dit aussi que  $E$  est un **sous-ensemble** de  $F$ .  
(b) On dit que  $E = F$  si  $E \subset F$  et  $F \subset E$ .  
On montre souvent une égalité d'ensembles par double inclusion.  
(c) L'ensemble des parties d'un ensemble  $E$  est noté  $\mathcal{P}(E)$ .



#### Définition 1.2. Intersection - Réunion - Complémentaire

- Intersection** : si  $A$  et  $B$  sont deux parties de  $E$ , leur **intersection**, notée  $A \cap B$ , est l'ensemble des éléments communs à  $A$  et  $B$ .  
$$A \cap B = \{x \in E, x \in A \text{ et } x \in B\}.$$
- Réunion** : si  $A$  et  $B$  sont deux parties de  $E$ , leur **réunion**, notée  $A \cup B$ , est l'ensemble des éléments de  $E$  appartenant à l'un au moins des ensembles  $A$  et  $B$ .  
$$A \cup B = \{x \in E, x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

3. **Complémentaire** : si  $A$  est une partie de  $E$ , son complémentaire dans  $E$ , noté  $\overline{A}$  (ou  $E \setminus A$  ou  $A^c$ ), est l'ensemble des éléments de  $E$  qui ne sont pas dans  $A$ .

$$\overline{A} = \{x \in E, x \notin A\}.$$

4. **Différence** : si  $A$  et  $B$  sont deux parties de  $E$ , on appelle **différence** de  $A$  et  $B$ , et on note  $A \setminus B$ , l'ensemble des éléments de  $E$  qui appartiennent à  $A$  mais pas à  $B$ .  
On a donc :  $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ .

### Propriété 1.3.

- Pour tout sous-ensemble  $A$  de  $E$ ,  $A \cap A = A$ ,  $A \cap E = A$  et  $A \cap \emptyset = \emptyset$ .
- Pour toutes parties  $A$  et  $B$  de  $E$ ,  $A \cap B = B \cap A$ .
- Pour toutes parties  $A, B, C$  de  $E$ ,  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$  (que l'on note  $A \cap B \cap C$ ).
- Pour tout sous-ensemble  $A$  de  $E$ ,  $A \cup A = A$ ,  $A \cup E = E$  et  $A \cup \emptyset = A$ .
- Pour toutes parties  $A$  et  $B$  de  $E$ ,  $A \cup B = B \cup A$ .
- Pour toutes parties  $A, B, C$  de  $E$ ,  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$  (que l'on note  $A \cup B \cap C$ ).
- Pour toutes parties  $A$  et  $B$  de  $E$ ,  $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ .
- Si  $A, B, C$  sont trois parties de  $E$ ,  $A \subset B \Rightarrow (A \cap C \subset B \cap C)$  et  $(A \cup C \subset B \cup C)$ .
- Soient  $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ . Alors :
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Pour toutes parties  $A, B$  de  $E$ , on a :  $A \cap (A \cup B) = A$  et  $A \cup (A \cap B) = A$ .
- Pour tout ensemble  $E$ ,  $\overline{\overline{E}} = E$  et  $\overline{\emptyset} = E$ .
- $\forall A \in \mathcal{P}(E), \overline{\overline{A}} = A$ .
- $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$ .

### Proposition 1. 4. Lois de Morgan

Soient  $A, B$  deux parties de  $E$ .  
Alors  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  et  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .



### Définition 1.5. Partition d'un ensemble

Soient  $E$  un ensemble,  $I = \llbracket 1 ; n \rrbracket$  et  $(E_i)_{i \in I}$  une famille de sous-ensembles de  $E$ .

- On dit que  $(E_i)_{i \in I}$  est un **recouvrement disjoint** de  $E$  si :
  - $\bigcup_{i \in I} E_i = E$ ;
  - $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset$ .
- Si, en outre, pour tout  $i \in I, E_i \neq \emptyset$ , on dit que  $(E_i)_{i \in I}$  est une **partition** de  $E$ .

**Définition 1.6. Produit cartésien**

1. Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles.  
Le **produit cartésien** de  $E$  et  $F$ , noté  $E \times F$ , est l'ensemble des couples  $(x, y)$ , où  $x$  est un élément de  $E$  et  $y$  un élément de  $F$ .  
 $E \times F = \{(x, y), x \in E, y \in F\}$ .  
Par exemple,  $(-5; \pi)$  est un élément de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ , car  $-5 \in \mathbb{Z}$  et  $\pi \in \mathbb{R}$ . Mais ce n'est pas un élément de  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ .  
**ATTENTION** l'ordre est fondamental!! Le couple  $(x; y)$  n'est pas le couple  $(y; x)$ .
2. Lorsque  $E = F$ , le produit cartésien  $E \times E$  est noté  $E^2$ .
3. Plus généralement, le produit cartésien  $\underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$  est noté  $E^n$ .

**Propriété 1.7.**

$E, F$  sont deux ensembles;  $A_1, A_2 \subset E, B \subset F$ .

Alors :

- $(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B)$ ;
- $(A_1 \cap A_2) \times B = (A_1 \times B) \cap (A_2 \times B)$ .

On a les mêmes résultats pour  $A \times (B_1 \cap B_2)$  ou  $A \times (B_1 \cup B_2)$ .

## 2. Applications

### 2.1. Définition - Opérations

**Définition 1.8.**

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles.

1. **Définir une application  $f$  de  $E$  dans  $F$**  consiste à associer à tout élément  $x$  de  $E$  un unique élément  $y$  de  $F$ .  
Cet élément unique, noté  $f(x)$  est l'image de  $x$  par  $f$ .  
L'élément  $x$  est **un antécédent** de  $y$  par  $f$ .  
 $E$  est l'ensemble de départ de  $f$ ,  $F$  est son ensemble d'arrivée.
2. Une **application**  $f$  est entièrement définie par la donnée de :
  - son ensemble de départ  $E$ ;
  - son ensemble d'arrivée  $F$ ;
  - son **graphe**  $\Gamma$ , qui est le sous-ensemble du produit cartésien  $E \times F$  défini par :

$$\forall x \in E, \exists! y \in F, (x, y) \in \Gamma \text{ (ainsi } \Gamma = \{(x, f(x)), x \in E\}).$$

Une application  $f = (E, F, \Gamma)$  est alors notée :

$$\begin{array}{ccc} f : & E & \rightarrow & F \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

L'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$  est noté  $\mathcal{A}(E, F)$  ou  $F^E$ .

### Remarque

- Il arrive que  $\Gamma$  ne contienne pas d'éléments  $(x, y)$  pour certaines valeurs de  $x$ .  
On dit alors que  $f$  est une **fonction** de  $E$  dans  $F$ .  
Le sous-ensemble  $E'$  des éléments de  $E$  admettant une image par  $f$  est alors appelé **ensemble de définition de la fonction  $f$** .  
 $f$  est alors une application de  $E'$  dans  $F$  (tout élément de  $E'$  admettant une image par  $f$ ).
- Le nombre d'antécédents d'un élément  $y$  de  $F$  est variable. Celui-ci peut en admettre 0, 1, 2 ... ou une infinité.



### Définition 1.9. Restriction - Prolongements

Soient  $E, E', F$  trois ensembles, avec  $E' \subset E$ .  
Soient alors  $f$  une application de  $E$  dans  $F$  et  $g$  une application de  $E'$  dans  $F$ .  
Si pour tout  $x$  de  $E'$ , on a :  $f(x) = g(x)$ , on dit que  $g$  est **la restriction de  $f$  à  $E'$**  ou que  $f$  est **un prolongement de  $g$  à  $E$** .  
On note alors  $g = f|_{E'}$ .



### Définition 1.10. Image directe - Image réciproque

Soient  $E, F$  deux ensembles, et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .  
On considère alors un sous-ensemble  $A$  de  $E$  et un sous-ensemble  $B$  de  $F$ .  
1. L'**image directe de  $A$  par  $f$** , notée  $f(A)$ , est l'ensemble des images par  $f$  des éléments de  $A$ .  
$$f(A) = \{f(x), x \in A\}.$$
  
L'image directe de  $A$  est donc un sous-ensemble de  $F$ .  
2. L'**image réciproque de  $B$  par  $f$** , notée  $f^{-1}(B)$ , est l'ensemble des éléments de  $E$  dont l'image par  $f$  est dans  $B$ .

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}.$$

Cette notation  $f^{-1}$  est dangereuse, car elle pourrait laisser à penser que  $f$  est bijective. Ce n'est pas nécessairement le cas.  $f^{-1}(B)$  est l'ensemble des antécédents des éléments de  $B$  par  $f$ , que  $f$  soit bijective ou pas.

### Propriété 1.11.

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . Pour toutes parties  $A_1, A_2$  de  $E$ , pour toutes parties  $B_1, B_2$  de  $F$ , on a :

1.  $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$ .
2.  $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ .
3.  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ .
4.  $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ .
5.  $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ .
6.  $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ .

**Définition 1.12. Composition**

Soient  $E, F$  et  $G$  trois ensembles.

$f$  est une application de  $E$  dans  $F$ ,  $g$  une application de  $F$  dans  $G$ .

On note  $g \circ f$ , et on lit «  $g$  rond  $f$  », l'application de  $E$  dans  $G$  qui, à tout élément  $x$  de  $E$  associe l'élément  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  de  $G$ .

L'application  $g \circ f$  est la *composée de  $f$  par  $g$*  (ou composée de  $f$  suivie de  $g$ ).

**Remarques**

1. Il faut toujours vérifier qu'une composition est possible, c'est-à-dire que l'ensemble d'arrivée de la première application est inclus (égal convient aussi mais inclus suffit) dans l'ensemble de départ de la seconde.
2. L'ordre dans lequel on compose les applications est essentiel. On n'a pas en général  $g \circ f = f \circ g$ .

**Définition 1.13. Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble**

Soient  $E$  un ensemble, et  $A$  une partie de  $E$ .

On appelle **fonction indicatrice de  $A$** , et on note  $\mathbb{1}_A$ , l'application définie sur  $E$  par :

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

**Définition 1.14. Injection - Surjection - Bijection**

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

1. On dit que  $f$  est **injective** (ou est une injection) si tout élément  $y$  de  $F$  admet au plus un (soit 0 ou 1) antécédent dans  $E$  par  $f$ .
2. On dit que  $f$  est **surjective** (ou est une surjection) si tout élément  $y$  de  $F$  admet au moins un antécédent dans  $E$  par  $f$ .
3. On dit que  $f$  est **bijjective** (ou est une bijection) si tout élément  $y$  de  $F$  admet exactement un antécédent dans  $E$  par  $f$ .

**Proposition 1. 15.**

- La composée de deux applications injectives est injective.
- La composée de deux applications surjectives est surjective.

**Proposition 1. 16.**

$f \in \mathcal{A}(E, F)$  bijective  $\Leftrightarrow f$  est injective et surjective.



### Définition 1.17. Bijection réciproque

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application bijective.

Pour tout  $y \in F$ , il existe un unique  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ .

L'application qui, à tout  $y$  de  $F$ , associe cet élément  $x$  de  $E$ , est appelée **bijection réciproque de  $f$** , et notée  $f^{-1}$ .

Ainsi :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

$f^{-1}$  est elle aussi bijective, et admet pour bijection réciproque  $(f^{-1})^{-1} = f$ .

### Exemple

$f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & e^x \end{matrix}$  est bijective et admet pour bijection réciproque la fonction  $\ln$ .

### Proposition 1.18.

La composée de deux applications bijectives est bijective.

Si  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  sont bijectives, alors  $g \circ f$  est bijective, et sa bijection réciproque est donnée par :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

## MÉTHODES

Retrouvez ici toutes les méthodes indispensables pour mieux appréhender les exercices et utiliser le cours.

### Méthode 1. Utiliser un raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'une proposition  $\mathcal{P}$  est vraie, on peut montrer que sa négation est fausse (d'où l'importance de savoir écrire la négation d'une proposition).

On suppose donc  $\overline{\mathcal{P}}$  est vraie, et on aboutit à une contradiction.

Montrer que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

### Application de la méthode

On raisonne par l'absurde. On suppose donc que  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ .

Il existe donc  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  tels que  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  (\*).

Sachant que  $\sqrt{2} > 0$ , on peut même supposer que  $p \in \mathbb{N}^*$ . On suppose l'écriture  $\frac{p}{q}$ , irréductible, c'est-à-dire que  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux.

On a donc, en élevant l'égalité (\*) au carré,  $2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$  (\*').

$p^2$  est donc pair. Montrons qu'alors  $p$  est pair.

Si, par l'absurde,  $p$  est impair, il existe un entier naturel  $k$  tel que  $p = 2k + 1$ . Alors  $p^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$  est impair : contradiction.

Ainsi,  $p$  est pair. Il existe donc un entier naturel (non nul)  $p'$  tel que  $p = 2p'$ .

(\*') s'écrit alors  $4p'^2 = 2q^2 \Leftrightarrow q^2 = 2p'^2$  :  $q^2$  est donc pair, donc (cela a déjà été établi)  $q$  est pair.

$p$  et  $q$  sont donc pairs : la fraction n'est donc pas irréductible. C'est une contradiction.

L'hypothèse initiale est donc fautive : on conclut donc que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

## Méthode 2. Utiliser un raisonnement par récurrence

- On identifie tout d'abord la propriété de récurrence que l'on doit établir (qui ne doit **JAMAIS** comporter  $\forall n \dots$ ).
- On initialise (l'énoncé nous dit en général à quel(s) rang(s) le faire, selon la propriété à démontrer).
- On passe à l'hérédité. Attention : si vous ne voyez pas de lien vous permettant de passer du rang  $n$  au rang  $n + 1$ , c'est peut-être tout simplement qu'il ne s'agit pas d'une récurrence. Par exemple, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n^2 + 1 \geq 0$  ne nécessite pas de récurrence (et c'est évident, le carré d'un entier étant positif). Ne vous jetez donc pas sur une récurrence au moindre « pour tout  $n$  ».

Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n^3 - n$  est un multiple de 3.

### Application de la méthode

Posons, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}_n$  :  $n^3 - n$  est un multiple de 3.

- **Initialisation :** pour  $n = 0$ .  
 $n^3 - n = 0^3 - 0 = 3 \times 0$  est bien un multiple de 3 :  $\mathcal{P}_0$  est vraie;
- Supposons, que pour un entier naturel  $n$  fixé,  $\mathcal{P}_n$  est vraie.  
Il existe donc  $k_n \in \mathbb{N}$  tel que  $n^3 - n = 3k_n$ .  
On cherche donc à montrer que  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie, c'est-à-dire que  $(n + 1)^3 - (n + 1)$  est un multiple de 3.  
Or,  $(n + 1)^3 - (n + 1) = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1) = n^3 - n + 3n^2 + 3n = 3k_n + 3n^2 + 3n = 3(k_n + n^2 + n)$ .  
 $k_n + n^2 + n \in \mathbb{N}$ , donc  $(n + 1)^3 - (n + 1)$  est un multiple de 3 :  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie.

Finalement, on a bien établi que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $n^3 - n$  est un multiple de 3.

#### Remarque

On peut améliorer ce résultat : pour tout entier  $n$ ,  $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1)$  est le produit de trois entiers consécutifs. L'un est donc multiple de 3, et l'un au moins de ces entiers est pair.

$n^3 - n$  est donc un multiple de 6. On a même :

- si  $n$  est pair,  $n^3 - n$  est un multiple de 6;
- si  $n$  est impair,  $n^3 - n$  est un multiple... de 24 : en effet, dans ce cas,  $n - 1$  et  $n + 1$  sont deux entiers pairs consécutifs. L'un est multiple de 2, l'autre est multiple de 4.

### Méthode 3. Pour montrer que $E \subset F$ ou que $E = F$

1. Pour montrer que  $E \subset F$  : on considère un élément quelconque de  $E$  et on montre qu'il est aussi élément de  $F$ .
2. Pour montrer que  $E = F$ , on montre que  $E \subset F$  et que  $F \subset E$ .

Soient  $E$  un ensemble, et  $A, B$  et  $C \in \mathcal{P}(E)$ . Montrer que :

1.  $A \subset B \Leftrightarrow A = A \cap B$ .
2.  $A \cap B \subset (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap C)$ .

### Application de la méthode

1. Cette proposition est une équivalence. On raisonne donc par double implication.
  - $\Rightarrow$  : cette implication est immédiate (faites un dessin!).
  - $\Leftarrow$  : Soit  $x \in A$ .  
 Puisque  $A = A \cap B$ ,  $x \in A \cap B$ .  
 Ainsi  $x \in A$  et  $x \in B$ .  
 En particulier,  $x \in B$ .  
 On a donc montré que, pour tout élément  $x$  de  $A$ ,  $x \in B$  : ainsi,  $A \subset B$ .  
 Par double implication, on a bien l'équivalence demandée.
2. Il faut montrer ici une inclusion entre ensembles. Le point de départ est habituel : soit  $x \in A \cap B$ .  
 $x \in A$  et  $x \in B$ .  
 On a alors une disjonction de cas :
  - 1<sup>er</sup> cas :  $x \in C$ . On a  $x \in B$  et  $x \in C$ , donc  $x \in B \cap C$ . Ainsi,  $x \in (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap C)$ .
  - 2<sup>ème</sup> cas :  $x \notin C$ .  
 Alors  $x \in \overline{C}$ . Puisque  $x$  est aussi élément de  $A$ ,  $x \in A \cap \overline{C}$ .  
 Ainsi,  $x \in (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap C)$ .  
 Finalement, dans tous les cas, si  $x \in A \cap B$ ,  $x \in (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap C)$ .  
 On a donc bien l'inclusion demandée.

### Méthode 4. Pour montrer qu'une application est (ou n'est pas) injective/surjective

Soit  $f \in \mathcal{A}(E, F)$ .

1. Pour montrer que  $f$  est injective : on prend  $x$  et  $x'$  deux éléments de  $E$  tels que  $f(x) = f(x')$ , et on montre que  $x = x'$  (ainsi  $y = f(x)$  ne peut avoir plus d'un antécédent);
2. Pour montrer que  $f$  n'est pas injective : on trouve  $x$  et  $x'$ , éléments de  $E$  distincts et possédant la même image par  $f$ ;
3. Pour montrer que  $f$  n'est pas surjective : on trouve  $y \in F$  n'ayant aucun antécédent dans  $E$  par  $f$ ;
4. Pour montrer que  $f$  est surjective : on prend  $y \in F$  quelconque, et on détermine un antécédent de  $y$  dans  $E$  par  $f$ .

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ .  
 $f$  est-elle injective? surjective?

**Application de la méthode**

1. Injectivité : soient  $x, x'$  deux réels tels que  $f(x) = f(x')$ . On a :

$$\begin{aligned}\frac{e^x - 1}{e^x + 1} &= \frac{e^{x'} - 1}{e^{x'} + 1} \Leftrightarrow (e^x - 1)(e^{x'} + 1) = (e^{x'} - 1)(e^x + 1) \quad (e^x + 1 \neq 0, e^{x'} + 1 \neq 0) \\ &\Leftrightarrow e^x - e^{x'} = e^{x'} - e^x \\ &\Leftrightarrow e^x = e^{x'} \\ &\Leftrightarrow x = x' \quad (\text{exp bijective})\end{aligned}$$

Ainsi,  $f$  est injective.

2. On étudie la fonction  $f$ , dont la dérivée est donnée par :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$ .

$f'$  est donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Or,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ .

Il en découle que  $-2$ , par exemple, n'admet pas d'antécédent par  $f$  :  $f$  n'est pas surjective.

**Méthode 5.** Pour montrer que  $f$  est ou n'est pas bijective

- Pour montrer que  $f$  n'est pas bijective : on montre qu'elle n'est pas injective ou pas surjective (cf méthode précédente);
- Pour montrer que  $f$  est bijective :
  - On choisit  $y \in F$ , et on montre que cet élément admet un unique antécédent dans  $E$  par  $f$ ;
  - On montre que  $f$  est à la fois injective et surjective;
  - On détermine la bijection réciproque  $f^{-1}$ .

Soit  $f$  l'application qui à  $z$  associe  $f(z) = \frac{z-1}{z+i}$ .

- Déterminer l'ensemble de définition  $D$  de  $f$ .
- Déterminer  $f(D)$ .
- $f$  est-elle bijective de  $D$  dans  $f(D)$ ?

**Application de la méthode**

- Très simplement, et du fait du dénominateur, on a  $D = \mathbb{C} - \{-i\}$ .
- Naturellement,  $f(D) \subset \mathbb{C}$ . Mais a-t-on  $f(D) = \mathbb{C}$ ? Soient  $z \in D$  et  $y = f(z)$ .

$$\begin{aligned}y = f(z) &\Leftrightarrow y = \frac{z-1}{z+i} \Leftrightarrow y(z+i) = z-1 \\ &\Leftrightarrow yz + iy = z-1 \\ &\Leftrightarrow iy + 1 = z(1-y) \quad (E)\end{aligned}$$

Arrivés à cette étape, on constate que, si  $y = 1$  (ce qui donne  $1 - y = 0$ ), l'équation ci-dessus équivaut à  $i + 1 = 0$ ... ce qui est impossible. Dans tous les autres cas, on peut terminer la résolution et trouver  $y$ .

Ainsi,  $f(D) = \mathbb{C} - \{1\}$ .

- Méthode 1 :** toute application est surjective de  $D$  dans  $f(D)$ . Reste donc à établir l'injectivité. Soient alors  $z, z' \in D$  tels que  $f(z) = f(z')$ . On a :

$$\begin{aligned}\frac{z-1}{z+i} &= \frac{z'-1}{z'+i} \quad \Leftrightarrow_{z, z' \neq -i} (z-1)(z'+i) = (z'-1)(z+i) \\ &\Leftrightarrow iz - z' = iz' - z \\ &\Leftrightarrow (i+1)(z-z') = 0 \\ &\Leftrightarrow z = z'\end{aligned}$$

$f$  est donc injective, elle réalise donc une bijection de  $D$  dans  $f(D)$ .

- **Méthode 2 :** on poursuit la résolution de  $(E)$ .

Si  $y \neq 1$ ,  $(E) \Leftrightarrow z = \frac{iy+1}{y-1}$  (ce qui a un sens... car  $y \neq 1$ ).

L'équation  $y = f(z)$ , pour  $(y, z) \in f(D) \times D$  admet donc une unique solution :  $f$  est donc une bijection de  $D$  dans  $f(D)$ .

## ENTRAÎNEMENTS

### Exercices d'entraînement

#### EXERCICE 1

●○○ 10 min.

Soit  $f$  l'application définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$ . Déterminer :

1.  $f([0; 1])$ .
2.  $f(\mathbb{R})$ .
3.  $f([-1; 2])$ .
4.  $f^{-1}(\{5\})$ .
5.  $f^{-1}([1; 2])$ .
6.  $f^{-1}([-4; 3])$ .

#### EXERCICE 2

●●○ 15 min.

Soit  $f$  la fonction définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+1}$ .

1. Résoudre  $f(x) = \frac{1}{4}$ . Que peut-on en déduire ?
2. Résoudre  $f(x) = 2$ . Que peut-on en déduire ?
3. Déterminer une condition sur le réel  $a$  pour que l'équation  $f(x) = a$  admette des solutions dans  $\mathbb{R}$ .

En déduire un intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$  pour que  $g : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & J \\ x & \mapsto & f(x) \end{matrix}$  soit surjective.

4. Trouver un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  tel que  $h : \begin{matrix} I & \rightarrow & J \\ x & \mapsto & f(x) \end{matrix}$  soit bijective.

#### EXERCICE 3

●●○ 20 min.

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2.  $f$  est-elle injective ? Surjective ?
3. Montrer que  $f(\mathbb{R}) = [-1; 1]$ .
4. Montrer que la restriction  $g$  de  $f$  à  $[-1; 1]$  est une bijection.
5. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de  $f$ .

### EXERCICE 4

●●○ 15 min.

$$\begin{aligned} \text{Soit } f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{it} \end{aligned}$$

1. Que vaut, pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|f(t)|$ ? Que peut-on en déduire?
2.  $f$  est-elle injective?

## Exercices d'approfondissement

### EXERCICE A

●○○ 5 min.

Soit  $x_1, \dots, x_n$   $n$  nombres positifs, de somme nulle.  
Montrer que ces nombres sont tous nuls.

### EXERCICE B

●●○ 20 min.

Soient  $E, F, G$  trois ensembles.

On considère trois applications  $f : E \rightarrow F$ ,  $g : F \rightarrow G$  et  $h : G \rightarrow H$  telles que  $h \circ g$  et  $g \circ f$  sont bijectives.

Montrer que  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont toutes trois bijectives.

### EXERCICE C

●●○ 15 min.

Soient  $E$  un ensemble, et  $A, B$  et  $C \in \mathcal{P}(E)$ .

1. A-t-on  $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$ ?
2. A-t-on  $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$ ?

### EXERCICE D

●●○ 20 min.

On considère les applications  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  et  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} n &\mapsto n+1 & p &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } p=0 \\ p-1 & \text{si } p \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

1. Étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité de  $f$  et  $g$ .
2. Expliciter  $g \circ f$  et  $f \circ g$ .

### EXERCICE E

●●○ 15 min.

Soient  $A, B, C$  trois sous-ensembles d'un ensemble  $E$ .

Montrer que  $\begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases} \Rightarrow B \subset C$ .

### EXERCICE F

●●○ 20 min.

Soit  $\mathcal{D}$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{N}$  qui à  $x$  associe :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ q & \text{si } x \in \mathbb{Q}, q \text{ étant le dénominateur positif de la forme irréductible de } x \end{cases}$$

On conviendra que  $\mathcal{D}(0) = 1$ .

1.  $\mathcal{D}$  est-elle injective? Surjective? La restriction de  $\mathcal{D}$  à  $\mathbb{Q}$  est-elle surjective?
2. Déterminer l'image réciproque par  $\mathcal{D}$  de  $\{1\}$ .
3. Déterminer de même  $\mathcal{D}^{-1}(\{0; 1\})$ .

RAPPELS DE COURS

MÉTHODES

ENTRAÎNEMENTS CORRIGÉS

## CORRIGÉS

### EXERCICE 1

De manière générale, pour de tels exercices, il est de bon ton de construire le tableau de variations de la fonction.

Mais, ici, la fonction carré est suffisamment connue pour qu'on s'en dispense.

1.  $f$  étant croissante sur  $[0; 1]$ , on a :  $f([0; 1]) = [f(0); f(1)] = [0; 1]$ .

**Remarque**

Cet argument de monotonie est fondamental. Pour vous en convaincre, cherchez l'image de  $[-3; 3]$  (indication : ce n'est pas  $\{9\}!$ ).

2. Ce résultat est bien connu :  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$ .  
 3. On « découpe » l'intervalle en intervalles où  $f$  est monotone.

$$\begin{aligned} f([-1; 2]) &= f([-1; 0] \cup [0; 2]) \\ &= f([-1; 0]) \cup f([0; 2]) \\ &= [0; 1] \cup [0; 4] \quad (f \text{ décroissante sur } [-1; 0], \text{ croissante sur } [0; 2]) \\ &= [0; 4] \end{aligned}$$

4.  $f^{-1}(\{5\}) = \{x \in \mathbb{R}, x^2 = 5\} = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$ .  
 5.  $f^{-1}([1; 2]) = \{x \in \mathbb{R}, x^2 \in [1; 2]\} = ]-\sqrt{2}; -1] \cup [1; \sqrt{2}[$ .

6. 
$$\begin{aligned} f^{-1}([-4; 3]) &= f^{-1}([-4; 0] \cup [0; 3]) \\ &= f^{-1}([-4; 0]) \cup f^{-1}([0; 3]) \\ &= \emptyset \cup ]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[ \quad (\text{un carré est toujours positif}) \\ &= ]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[ \end{aligned}$$

### EXERCICE 2

- 1.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{4} &\Leftrightarrow 4(1 - x^2) = x^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow -5x^2 = -3 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{5} \\ &\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{5}} \end{aligned}$$

L'équation  $f(x) = \frac{1}{4}$  admet deux solutions distinctes,  $\frac{1}{4}$  admet donc deux antécédents dans  $\mathbb{R}$  par  $f$  :  $f$  n'est pas injective.

**Remarque**

L'étude de la fonction  $f$  nous aurait également mené à ce résultat, mais cette étude sera l'objet d'une question ultérieure.

Celle-ci éclairera le choix de la valeur  $\frac{1}{4}$  pour établir la non-injectivité.

2.  $f(x) = 2 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 2(x^2 + 1) \Leftrightarrow -3x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{3}$  **Impossible**  
 L'équation  $f(x) = 2$  n'admet pas de solution dans  $\mathbb{R}$ , 2 n'admet donc pas d'antécédent dans  $\mathbb{R}$  par  $f$  :  $f$  n'est donc pas surjective.  
 Naturellement,  $f$  n'est donc pas bijective.

**Remarque**

Le caractère bijectif de  $f$  est la conjonction des caractères injectif et surjectif. Pour que  $f$  ne soit pas bijective, il suffit donc qu'elle soit non injective ou non surjective. Ici, il se trouve que  $f$  n'est ni l'un ni l'autre. C'est plus que ce dont on avait besoin.

3. Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} f(x) = a &\Leftrightarrow 1 - x^2 = a(x^2 + 1) \\ &\Leftrightarrow (a + 1)x^2 = 1 - a \end{aligned}$$

Si  $a = -1$ , l'équation n'a pas de solution (on obtient  $0 = 2$ ). Sinon, on peut diviser par  $a + 1$ . On obtient :

$$f(x) = a \Leftrightarrow x^2 = \frac{1 - a}{1 + a}.$$

Cette équation n'a de solution que si  $\frac{1 - a}{1 + a} \geq 0$ . Une rapide étude de signe (avec ou sans tableau) nous donne :  $a \in ]-1; 1]$ .

Ainsi, l'équation  $f(x) = a$  n'a de solution que si  $a \in ]-1; 1]$ . Seuls les éléments de cet intervalle ont des antécédents dans  $\mathbb{R}$  par  $f$ .

On peut donc choisir  $J = ]-1; 1]$  (ou tout autre intervalle inclus dans celui-ci) pour que  $g$  soit surjective.

4.  $f$  est visiblement paire (pour tout réel  $x$ ,  $f(-x) = f(x)$ ). Ceci nous invite à envisager de considérer  $I = \mathbb{R}_+$ . Ceci est confirmé par le fait que la recherche d'antécédents par  $f$  se ramène à une résolution d'équation du type  $x^2 = k$ . Les solutions, lorsqu'il y en a, sont opposées. En ne considérant que les solutions positives, on obtient bien à chaque fois une unique solution :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}_+ &\rightarrow ]-1; 1] \text{ est bien bijective.} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

**Remarque**

On aurait tout à fait pu choisir  $I = \mathbb{R}_-$ . Et si on avait choisi non pas  $J$  mais un intervalle inclus dans  $J$  à la question précédente, il aurait fallu adapter  $I$  en conséquence.

**EXERCICE 3**

1. Le seul problème potentiel est lié au dénominateur, or celui-ci ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi,  $D_f = \mathbb{R}$ .  
 2. • Commençons par l'injectivité : soient  $x, x' \in \mathbb{R}$  tels que  $f(x) = f(x')$ .

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2x'}{1+x'^2} \\ &\Leftrightarrow 2x(1+x'^2) = 2x'(1+x^2) \quad (1+x^2 \neq 0, 1+x'^2 \neq 0) \\ &\Leftrightarrow x - x' + xx'^2 - x'x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x - x' - xx'(x - x') = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - x')(1 - xx') = 0 \end{aligned}$$

La condition  $x = x'$  apparaît, sans surprise. Mais il y a une autre possibilité : lorsque  $xx' = 1$ .

Calculons alors  $f(2)$  et  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ .

$$f(2) = \frac{4}{1+2^2} = \frac{4}{5}; f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}.$$

$f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ , alors que  $2 \neq \frac{1}{2}$  :  $f$  n'est pas injective.

- Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

$$f(x) = a \Leftrightarrow ax^2 - 2x + a = 0.$$

Le discriminant de cette équation est  $\Delta = 4(1 - a^2)$ . L'équation n'a donc de solutions dans  $\mathbb{R}$  que si :

$$1 - a^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq a \leq 1.$$

Par conséquent, 2 n'admet pas d'antécédent par  $f$  :  $f$  n'est pas surjective.

3. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 1 + x^2 \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$ .

On montre de même que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) \geq -1$ .

Ainsi, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) \in [-1; 1]$  : on a donc  $f(\mathbb{R}) \subset [-1; 1]$ .

Or, on a vu dans la question précédente que, si  $a \in [-1; 1]$ , l'équation  $f(x) = a$  a des solutions dans  $\mathbb{R}$ .

Ainsi, si  $x \in [-1; 1]$ ,  $x \in f(\mathbb{R})$ .

Par double inclusion, on a bien :  $f(\mathbb{R}) = [-1; 1]$ .

4. Puisque  $f(\mathbb{R}) = [-1; 1]$  et  $g = f|_{[-1; 1]}$ , considérons  $a \in [-1; 1]$ .

$$f(x) = a \Leftrightarrow ax^2 - 2x + a = 0.$$

Les solutions de cette équation, de discriminant positif, sont :

$$x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{1 - a^2}}{2} = 1 + \sqrt{1 - a^2}, \text{ et } x_2 = 1 - \sqrt{1 - a^2}.$$

- Si  $a = 1$  :  $x_1 = x_2 = 1$ , l'équation  $f(x) = a$  admet une unique solution dans  $[-1; 1]$  (qui est 1).

- Si  $a \neq 1$  :  $x_1 > 1$  ne convient pas (on cherche une solution dans  $[-1; 1]$ ), et  $x_2 \in [0; 1[$  convient.

Ainsi, tout élément  $a$  de  $[-1; 1]$  admet un unique antécédent par  $g$  dans  $[-1; 1]$  :  $g$  est bijective.

5. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , en tant que quotient de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ , le dénominateur ne s'y annulant pas.

$$\text{On a alors : } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2(1 + x^2) - 2x(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}.$$

Cette dérivée est du signe de  $(1 - x^2)$ , c'est-à-dire positive sur  $[-1; 1]$ , et négative sur  $]-\infty; -1]$  et sur  $[1; +\infty[$ .

On a donc le tableau de variations suivant :

|                   |                                                                                                                  |      |     |           |     |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|-----------|-----|
| $x$               | $-\infty$                                                                                                        | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |     |
| Signe de $f'$     | $-$                                                                                                              | $0$  | $+$ | $0$       | $-$ |
| Variations de $f$ | <div><math>0 \searrow \quad \nearrow 1 \searrow</math><br/><math>\quad \quad -1 \quad \quad \quad 0</math></div> |      |     |           |     |

D'après le tableau de variations :

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) &= f(]-\infty; -1] \cup [-1; 1] \cup [1; +\infty[) \\ &= [-1; 0] \cup [-1; 1] \cup [0; 1] \\ &= [-1; 1]. \end{aligned}$$

$g$  est continue (car dérivable) et strictement croissante sur  $[-1; 1]$  : elle réalise donc une bijection de  $[-1; 1]$  dans  $g([-1; 1]) = [-1; 1]$ .

**EXERCICE 4**

Notons qu'ici, la fonction est à valeurs dans  $\mathbb{C}$  : il est donc impossible d'assurer l'injectivité avec un argument du type  $f$  est strictement monotone, cette notion n'ayant pas de sens pour une fonction à valeurs complexes.

1. Soit  $t \in \mathbb{R}$ .  $|f(t)| = |e^{it}| = 1$ .

Puisque l'image de n'importe quel réel par  $f$  a pour module 1, on en déduit que tout complexe de module différent de 1 n'admet pas d'antécédent par  $f$  dans  $\mathbb{R}$ .

Par exemple, 2 n'admet pas d'antécédent dans  $\mathbb{R}$  par  $f$  :  $f$  n'est donc ni surjective, ni bijective.

2. Est-il besoin de construire le cercle trigonométrique pour répondre ?

$f(0) = f(2\pi) = 1$  :  $f$  n'est pas injective.

**EXERCICE A**

L'exercice n'est pas difficile, voire intuitivement évident (mais une intuition ne constitue pas une démonstration), mais permet de manipuler le raisonnement par l'absurde.

En outre, il sera fort utile en fin d'année, lors du chapitre 20. Espaces préhilbertiens.

Supposons par l'absurde que l'un des nombres  $x_1, \dots, x_n$  est non nul.

Quitte à échanger l'ordre de ces nombres, on peut supposer qu'il s'agit de  $x_1$ .

On a donc  $x_1 > 0$ .

Dès lors  $x_1 + \dots + x_n = 0 \Leftrightarrow x_1 = -(x_2 + \dots + x_n)$ .

Le membre de gauche de cette égalité est strictement positif, celui de droite négatif ou nul : contradiction.

Il est donc impossible qu'un des nombres  $x_1, \dots, x_n$  soit non nul.

Ainsi,  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ .

**EXERCICE B**

Ceci est un exercice de cours « déguisé ». Cela ne dispense pas de le rédiger convenablement.

Puisque,  $h \circ g$  est bijective, elle est en particulier injective. Ainsi,  $g$  est injective.

En effet, si  $x, x' \in F$  vérifient  $g(x) = g(x')$ , alors  $(h \circ g)(x) = (h \circ g)(x')$ .

$h \circ g$  étant injective, on en déduit  $x = x'$ .

De même, puisque  $g \circ f$  est bijective, elle est surjective, donc  $g$  est surjective.

En effet si  $y \in G$ , il existe  $x \in E$  tel que  $y = (g \circ f)(x)$ ,  $g \circ f$  étant surjective.

Posons alors  $z = f(x)$  :

- $z \in F$ ;
- $g(z) = y$

Il existe donc  $z \in F$  tel que  $y = g(z)$  :  $g$  est surjective.

Finalement,  $g$  est injective et surjective, donc bijective. Notons  $g^{-1}$  sa bijection réciproque.

$h = h \circ (g \circ g^{-1}) = (h \circ g) \circ g^{-1}$  est la composée de deux applications bijectives :  $h$  est bijective.

De même,  $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$  est bijective, en tant que composée de deux applications bijectives.

On a donc bien établi que  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont toutes trois bijectives.

**EXERCICE C**

1. Non. Il suffit de considérer  $C = A \cup B$ . Dans ce cas,

$$A \cup C = A \cup (A \cup B) = A \cup B,$$

et  $C \neq B$  en règle générale (question à toi, ami lecteur : à quelle condition  $A \cup B = B$ ?).

Plus généralement, il suffit que  $C$  « apporte à l'union » ce qu'apporte  $B$ , c'est-à-dire  $B \setminus A$ .

Toute partie  $C$  de la forme  $C = (B \setminus A) \cup C'$ ,  $C' \subset A$ , convient.

En effet, dans ce cas :

$$A \cup C = A \cup ((B \setminus A) \cup C') = A \cup ((B \cap \bar{A}) \cup C') = A \cup C' \cup (B \cap \bar{A}) = A \cup (B \cap \bar{A}) = A \cup B.$$

2. Non. Il suffit de choisir  $C = A \cap B$ .

Plus généralement, toute partie de la forme  $C = (A \cap B) \cup C'$ , où  $C' \subset \bar{A}$ , convient.

On a alors :  $A \cap C = A \cap ((A \cap B) \cup C') = (A \cap (A \cap B)) \cup (A \cap C') = (A \cap B) \cup \emptyset = A \cap B$ .

### EXERCICE D

1. •  $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n + 1 \geq 1 > 0$ . Ainsi, 0 n'a pas d'antécédent par  $f$  :  $f$  n'est pas surjective.

En revanche, si  $n$  et  $n'$  sont deux entiers naturels tels que  $f(n) = f(n')$ , on a  $n + 1 = n' + 1$ , donc  $n = n'$ .  
 $f$  est finalement injective, mais non surjective, donc non bijective.

•  $g(0) = g(1) = 0$  :  $g$  n'est donc pas injective, et donc pas bijective.

Soit  $p \in \mathbb{N}$ .  $g(p + 1) \underset{p \geq 1}{=} (p + 1) - 1 = p$ .

Tout entier naturel  $p$  admet un antécédent par  $g$  :  $g$  est surjective.

2. Soit  $p \in \mathbb{N}$ .

•  $(g \circ f)(p) = g(f(p)) = g(p + 1) = p$ . Ainsi,  $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$ .

• Pour  $f \circ g$ , il y a une disjonction de cas :

- Si  $p = 0$  :  $(f \circ g)(p) = (f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(0) = 1$ ;

- Si  $p \geq 1$  :  $(f \circ g)(p) = f(g(p)) = f(p - 1) = p - 1 + 1 = p$ .

Notons qu'alors  $h = f \circ g$  n'est ni injective ( $h(0) = h(1) = 1$ ), ni surjective (0 n'a pas d'antécédent par  $h$  dans  $\mathbb{N}$ ), alors que  $g \circ f$  est bijective.

### EXERCICE E

Le point de départ est habituel pour établir une inclusion d'ensembles : soit  $x \in B$ .

Puisque  $B \subset A \cup B \subset A \cup C, x \in A \cup C$ .

Deux cas se présentent alors :

• Premier cas :  $x \in A$

Dans ce cas,  $x \in A$  et  $x \in B$  donc  $x \in A \cap B$ .

Or,  $A \cap B \subset A \cap C$ . On a donc  $x \in A \cap C$ . En particulier,  $x \in C$ .

• Deuxième cas :  $x \notin A$

Dans ce cas,  $x \in A \cup B$  (puisque  $x \in B$ ). Or,  $A \cup B \subset A \cup C$  donc  $x \in A \cup C$ .

Puisque  $x \notin A, x \in C$ .

Ainsi, dans tous les cas, si  $x \in B$ , alors  $x \in C$  : on a donc bien  $B \subset C$ .

### EXERCICE F

1. •  $e$  et  $\pi \notin \mathbb{Q}$ . Ainsi  $\mathcal{D}(e) = \mathcal{D}(\pi) : \mathcal{D}$  n'est pas injective.

• Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

- Si  $n = 0$  :  $n = \mathcal{D}(\pi)$  (par exemple);

- Si  $n \neq 0$  :  $n = \mathcal{D}\left(\frac{1}{n}\right)$ .

Ainsi, tout élément de  $\mathbb{N}$  admet un antécédent par  $\mathcal{D}$  :  $\mathcal{D}$  est surjective.

• Si on considère la restriction de  $\mathcal{D}$  à  $\mathbb{G}$ , 0 n'admet pas d'antécédent (les seuls antécédents de 0 par  $\mathcal{D}$  étant les irrationnels) : cette application n'est pas surjective.

2.  $\mathcal{D}^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R}, \mathcal{D}(x) = 1\}$ .

Ces réels sont donc forcément des rationnels, l'image de tout irrationnel étant 0.

Ainsi,  $\mathcal{D}^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{Q}, \mathcal{D}(x) = 1\} = \left\{\frac{p}{1}, p \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{Z}$ .

3. Puisque  $\mathcal{D}$  ne prend que des valeurs dans  $\mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{-1}([0; 1]) &= \mathcal{D}^{-1}(\{0\} \cup \{1\}) \\ &= \mathcal{D}^{-1}(\{0\}) \cup \mathcal{D}^{-1}(\{1\}) \\ &= (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Z}\end{aligned}$$

## Sujets de colle

### SUJET I

●●● 30 min.

Soient  $E$  un ensemble et  $p : E \rightarrow E$  vérifiant  $p \circ p = p$ .  
Montrer que  $p$  est injective  $\Leftrightarrow p$  est surjective  $\Leftrightarrow p = id_E$ .

### SUJET II

●●● 30 min.

Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides d'un ensemble  $E$ .

$$\begin{aligned}\text{Soit } f : \mathcal{P}(E) &\rightarrow (\mathcal{P}(E))^2 \\ X &\mapsto (X \cup A, X \cup B)\end{aligned}$$

1. Montrer que  $f$  n'est pas surjective.
2. Montrer que  $f$  injective  $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ .

## CORRIGÉS

### SUJET I

Notons (1), (2), (3) les trois propositions dont on veut montrer qu'elles sont équivalentes.

- (1)  $\Rightarrow$  (2) : Soit  $y \in E$ .  $p(y) = p(p(y))$ .  
 $p$  étant injective, on en déduit que  $p(y) = y$ .  
 $y$  admet donc un antécédent dans  $E$  par  $p$  (qui est  $y$ , mais c'est sans importance ici) :  $p$  est surjective.
- (2)  $\Rightarrow$  (3) : Soit  $y \in E$ .  
 $p$  étant surjective, il existe  $x \in E$  tel que  $p(x) = y$ .  
Dès lors,  $p(y) = p \circ p(x) \underset{p \circ p = p}{=} p(x) = y$ .  
Finalement, pour tout élément  $y$  de  $E$ ,  $p(y) = y$  :  $p = id_E$ .
- (3)  $\Rightarrow$  (1) : évident (l'application  $id_E$  est même bijective).

RAPPELS DE COURS

MÉTHODES

ENTRAÎNEMENTS CORRIGÉS

## SUJET II

### ► Conseils du prof :

Cet exercice n'est pas simple, et peut vous déstabiliser.

Mais être déstabilisé ne signifie pas ne rien faire. Il ne faut donc laisser aucun doute à l'examineur (ou au colleur) : vos difficultés viennent de l'exercice, non de votre connaissance insuffisante du cours.

Donc, si vous êtes bloqués, montrez au moins que les définitions des notions intervenant dans l'exercice sont connues : ici, vous devez savoir comment on montre qu'une application est injective ou surjective (méthode 3) ou comment on montre une équivalence.

1. On cherche un élément de  $(\mathcal{P}(E))^2$  n'admettant pas d'antécédent dans  $\mathcal{P}(E)$  par  $f$ .

Considérons alors le couple  $(\emptyset, \emptyset)$ .

$$f(X) = (\emptyset, \emptyset) \Leftrightarrow X \cup A = X \cup B = \emptyset.$$

Ceci est impossible, sauf si  $A = B = X = \emptyset$ , ce qui est exclu.

Ainsi,  $f$  n'est pas surjective.

### Remarque

Tout couple du type  $(A', B')$ , où  $A'$  est une partie de  $A$ , incluse strictement dans  $A$  et/ou  $B'$  est une partie de  $B$ , strictement incluse dans  $B$ , aurait fourni un contre-exemple.

2. On raisonne ici par double implication.

- $\Leftarrow$  : Soient  $X, X' \in E$  telles que  $f(X) = f(X')$ .

$$\text{Alors } X \cup A = X' \cup A \text{ et } X \cup B = X' \cup B \quad (*).$$

$$\text{On en déduit : } X = X \cup \emptyset = X \cup (A \cap B) \quad (\text{par hypothèse})$$

$$= (X \cup A) \cap (X \cup B)$$

$$= (X' \cup A) \cap (X' \cup B) \quad (\text{d'après } (*))$$

$$= X' \cup (A \cap B)$$

$$= X' \cup \emptyset$$

$$= X'$$

Dès lors,  $f$  est bien injective.

- $\Rightarrow$  :

$$\text{D'une part, } f(\emptyset) = (\emptyset \cup A; \emptyset \cup B) = (A; B).$$

$$\text{D'autre part, } f(A \cap B) = ((A \cap B) \cup A; (A \cap B) \cup B) = (A; B).$$

$$f \text{ étant injective, on en déduit : } A \cap B = \emptyset.$$

On a donc bien :  $f$  injective  $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ .

# CHAPITRE 2

## Sommes et produits - Inégalités dans $\mathbb{R}$

### Objectifs et compétences du programme

| Capacités principales à maîtriser                                                                                 | Méthodes associées | Exercices associés |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|--------------------|
| Sommes et produits d'une famille finie de nombres réels - Sommes et produits télescopiques - Changements d'indice |                    | 1-2-A-B-C-H        |
| Sommes doubles                                                                                                    | 1                  | F                  |
| Inégalités dans $\mathbb{R}$ - Relation d'ordre - Intervalles - Valeur absolue                                    | 2-4                | 3-D-G              |
| Partie entière d'un nombre réel                                                                                   | 3                  | E                  |

## RAPPELS DE COURS

### Sommes et produits

#### Sommes

##### Proposition 2. 1. Sommes

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

La somme des  $n$  nombres (ou vecteurs)  $x_1 + \dots + x_n$  est notée  $\sum_{k=1}^n x_k$ .

On a également :  $\sum_{k=m}^p x_k = x_m + \dots + x_p$  (somme comportant  $p - m + 1$  termes.)

2. L'indice est muet :  $\sum_{k=m}^p x_k = \sum_{j=m}^p x_j$ .

3. On peut effectuer un changement d'indice.

Par exemple, en posant  $i = k + 1$ , on a :  $\sum_{k=1}^{10} (k + 1)^2 = \sum_{i=2}^{11} i^2$ .

### Proposition 2. 2. Sommes classiques

1.  $\sum_{k=1}^n 1 = n$ .
2. Somme des termes d'une suite géométrique :  $\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$ .
3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

### Propriété 2.3.

1. **Factorisation** : Soient  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $m \leq p \in \mathbb{N}$ . Alors  $\sum_{i=m}^p \lambda x_i = \lambda \sum_{i=m}^p x_i$ .  
On peut donc "sortir" un facteur s'il ne dépend pas de l'indice de sommation.
2.  $\sum_{k=m}^p x_k + \sum_{k=m}^p y_k = \sum_{k=m}^p (x_k + y_k)$  : on peut donc "regrouper" des sommes pour peu que l'indice de sommation varie entre les mêmes bornes.
3. **Sommes télescopiques** :  
Soient  $m \leq p \in \mathbb{N}$ . On a  $\sum_{k=m}^p (x_{k+1} - x_k) = x_{p+1} - x_m$ .

## Produits

### Proposition 2. 4. Produits

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
Le produit de  $n$  nombres complexes  $x_1, \dots, x_n$  est noté  $\prod_{k=1}^n x_k$ .
2. Le produit classique :  $\prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times \dots \times n = n!$ . Le nombre  $n!$  est appelé factorielle de  $n$ .  
Par convention,  $0! = 1$ .

### Propriété 2.5.

Soient  $m, p$  deux entiers naturels, avec  $m \leq p$ ,  $x_0, \dots, x_p, y_0, \dots, y_p \in \mathbb{C}$ . Alors :

1. **Factorisation** :  $\prod_{k=m}^p \lambda x_k = \lambda^{p-m+1} \prod_{k=m}^p x_k$ .
2.  $\prod_{k=m}^p x_k \prod_{k=m}^p y_k = \prod_{k=m}^p x_k y_k$ .
3. **Produit télescopique** : si pour tout  $i$  de  $\{m, \dots, p\}$ ,  $x_i \neq 0$ , alors  $\prod_{i=m}^p \frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{x_{p+1}}{x_m}$ .
4. **Transformation de produits en sommes** : si l'on suppose les  $x_i > 0$ , on a :  $\ln \prod_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \ln x_i$ .

## Sommes doubles

**Propriété 2.6. Sommes doubles : interversion, effet sur les indices**

Soit  $(u_{i,j})$  une famille de nombres complexes dépendant des deux indices  $i$  et  $j$ .

1.  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{i,j}$
2.  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} u_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j u_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n u_{i,j}$
3.  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n u_{i,j} = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} u_{i,j}$

## Formules de Bernoulli - Coefficients binomiaux - Binôme de Newton

**Proposition 2.7.**

1. Soient  $a, b \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

On a :

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \end{aligned}$$

2. Cas particuliers :

- Pour  $n = 2$  : pour tous complexes  $a, b$ ,  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ .
- Pour  $n = 3$  : pour tous complexes  $a, b$ ,  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$  et  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ .

**Proposition 2.8. Coefficients binomiaux**

1. Soient  $n, p \in \mathbb{N}$ .

Le coefficient binomial  $\binom{n}{p}$  désigne le nombre de branches comportant  $p$  succès dans la répétition de  $n$  épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

- Si  $0 \leq n \leq p$ ,  $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
- Si  $p < n$ ,  $\binom{n}{p} = 0$

2. Propriétés

- $P_1$  :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ ,  $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ .
- $P_2$  : Symétrie. Si  $0 \leq p \leq n$ ,  $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ .
- $P_3$  : Triangle de Pascal. Si  $1 \leq p \leq n$ ,  $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ .

RAPPELS DE COURS

MÉTHODES

ENTRAÎNEMENTS CORRIGÉS

### Théorème 2.9. Formule du binôme de Newton

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

### Conséquence 2.10.

Cas particuliers :

- Pour  $n = 3$ , on a :  $\forall a, b \in \mathbb{C}, (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ .
- Pour  $n = 4$ , on a :  $\forall a, b \in \mathbb{C}, (a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ .
- On a également, pour tous complexes  $a, b$   
 $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$  et  $(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$ .

Les coefficients intervenant dans  $(a + b)^n$  peuvent être obtenus à l'aide du triangle de Pascal.

## Inégalités dans $\mathbb{R}$ - Valeur absolue - Partie entière d'un nombre réel

### Manipulation des inégalités

$\mathbb{R}$  est muni d'une **relation d'ordre**, notée  $\leq$ .

Elle vérifie les propriétés suivantes :

- $\leq$  est **réflexive** :  $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$ .
- $\leq$  est **antisymétrique** :  $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$ .
- $\leq$  est **transitive** :  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ .

### Proposition 2. 11.

Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

1. Si  $a \leq b$ , alors  $a + c \leq b + c$ .
2. Si, en outre,  $c \geq 0$ , alors  $ac \leq bc$ .  
En revanche, si  $c \leq 0$ ,  $ac \geq bc$ .
3. Si  $a, b, c, d$  sont 4 réels positifs tels que  $a \leq b$  et  $c \leq d$ , alors  $ac \leq bd$ .

### Remarque

1. Attention, on ne soustrait jamais des encadrements ! Pour encadrer une différence, on encadre le premier terme, l'opposé du deuxième, et on ajoute.
2. Le deuxième point soulève un problème délicat : il faut être très attentif lorsqu'on multiplie une inégalité par un nombre. Si celui-ci est de signe constant, positif ou négatif, on sait comment procéder. Lorsque ce nombre n'est pas de signe constant (par exemple  $x$ ), il faut effectuer une disjonction de cas, selon que ce nombre est positif ou négatif.

## Valeur absolue d'un nombre réel

**Définition 2.12.**

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

La **valeur absolue de  $x$** , notée  $|x|$ , est le nombre réel défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}.$$

**Proposition 2.13.**

Sur une droite graduée  $d(O; \vec{t})$ , si  $A$  et  $B$  ont pour abscisse respective  $x_A$  et  $x_B$ , alors  $AB = |x_B - x_A|$ .

**Propriété 2.14. Règles**

Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ . Alors :

1.  $|x| \geq 0$ .
2.  $\sqrt{x^2} = |x|$ .
3.  $x \leq |x|$ .
4.  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .
5.  $|-x| = |x|$ .
6.  $|x| = |y| \Leftrightarrow y = x \text{ ou } y = -x$ .
7.  $|xy| = |x||y|$ . On en déduit par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, |x^n| = |x|^n$ .
8. Si  $y \neq 0$ ,  $\left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{|y|}$  et  $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ .

**Propriété 2.15.**

1. Si  $a > 0$ ,  $|x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a; a] \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ .
2. **Inégalité triangulaire** : pour tous réels  $x$  et  $y$ ,
  - $|x + y| \leq |x| + |y|$ .
  - $|x - y| \leq |x| + |y|$ .

## Partie entière d'un nombre réel

**Définition 2.16.**

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

On appelle **partie entière de  $x$** , et on note  $\lfloor x \rfloor$ , le plus grand entier relatif inférieur ou égal à  $x$ , c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

**Exemples**

$$\lfloor \pi \rfloor = 3 \text{ et } \lfloor -3,1 \rfloor = -4.$$

RAPPELS DE COURS

MÉTHODES

ENTRAÎNEMENTS CORRIGÉS

### Remarque

On a également, pour tout réel  $x$ , l'encadrement :  $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ .

Selon que la question posée porte sur  $x$  ou sa partie entière, on utilisera plutôt l'un ou l'autre des deux encadrements.

## Parties majorées, minorées, bornées de $\mathbb{R}$ - Borne supérieure

### Majorant - Minorant



#### Définition 2.17.

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ .

1. On dit que  $M$  est un **majorant de  $A$**  si  $\forall a \in A, a \leq M$ .  
On dit alors que  $A$  est **majorée**.  
Une partie de  $A$  est dite **majorée** si elle admet un majorant.
2. On dit que  $m$  est un **minorant de  $A$**  si  $\forall a \in A, a \geq m$ .  
On dit alors que  $A$  est **minorée**.  
Une partie de  $A$  est dite **minorée** si elle admet un minorant.
3. Une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  est dite **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire s'il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que :

$$\forall a \in A, m \leq a \leq M.$$

On peut aussi montrer que  $A$  est bornée s'il existe  $K \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $a \in A$ ,  $|a| \leq K$  (naturellement,  $K \geq 0$ ).

En outre, ce critère est aussi valable dans  $\mathbb{C}$  (et sera l'an prochain généralisable aux espaces vectoriels normés).

### Exemples

1.  $A = ]0 ; 2[$  est bornée, car minorée par 0 et majorée par 2.
2.  $B = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$  est minorée par 0 et majorée par 1 (donc bornée).
3.  $C = \left\{ \frac{1}{x}, x \in ]0 ; 1] \right\}$  est minorée par 0, mais n'est pas majorée.
4.  $\mathbb{R}$  n'est ni majoré, ni minoré.

### Remarque

Une partie majorée admet une infinité de majorants. En effet, si  $M$  est un majorant de  $A$ , tout réel supérieur ou égal à  $M$  l'est également.

Par exemple, si  $A = [-2 ; 1]$ , 1 est un majorant de  $A$ ... 27 aussi! Bien entendu, ce n'est pas le « meilleur » des majorants, mais dans certaines situations, avoir un majorant suffit, sans qu'on ait à optimiser ce choix.

Intervalles de  $\mathbb{R}$ **Proposition 2. 18. Les intervalles bornés de  $\mathbb{R}$** 

Les divers intervalles bornés de  $\mathbb{R}$  sont de la forme :

1.  $[a; b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . On parle d'intervalle fermé ou de segment  $[a; b]$ .
2.  $[a; b[$  ou  $]a; b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . On parle d'intervalle semi-ouvert.
3.  $]a; b[$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . On parle alors d'intervalle ouvert  $]a; b[$ .

**Proposition 2. 19. Les intervalles non bornés de  $\mathbb{R}$** 

Les divers intervalles non bornés de  $\mathbb{R}$  sont de la forme :

1.  $[a; +\infty[$  ou  $]-\infty; b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . On parle d'intervalle fermé.
2.  $]a; +\infty[$  ou  $]-\infty; b[$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . On parle d'intervalle ouvert.

## Plus grand élément, borne supérieure - Plus petit élément, borne inférieure

**Définition 2.20.**

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ .

1. On dit que  $M$  est le **plus grand élément de  $A$** , et on note  $M = \max(A)$  si  $M \in A$  et

$$\forall x \in A, x \leq M.$$

2. On dit que  $m$  est le **plus petit élément de  $A$** , et on note  $m = \min(A)$  si  $m \in A$  et

$$\forall x \in A, x \geq m.$$

**Exemples**

1.  $A = [-1; 2]$  admet pour plus petit élément  $-1$  et pour plus grand élément  $2$ .
2.  $A = ]-1; 2[$  admet pour minorant  $-1$ , mais  $-1$  n'est pas un plus petit élément puisque  $-1 \notin A$ .  
Reste à établir qu'il n'y a pas un autre élément de  $A$  qui soit le plus petit élément de  $A$ .  
Si  $x > -1$  est le plus petit élément de  $A$ , alors  $x$  est un minorant de  $A$ .  
Or, si on pose  $y = \frac{-1+x}{2}$ , on a :
  - $-1 < y < 2$  donc  $y \in A$ ;
  - $y < x$ .
 Ainsi,  $x$  n'est pas un minorant de  $A$ .  
 $-1$  n'est pas le plus petit élément de  $A$  et si  $x \in A$  est strictement supérieur à  $-1$ ,  $x$  ne peut être le plus petit élément de  $A$  :  $A$  n'a pas de plus petit élément.  
De même,  $A$  n'a pas de plus grand élément.
3.  $\mathbb{N}$  admet un plus petit élément, qui est  $0$ , mais pas de plus grand élément (ni de majorant d'ailleurs).

RAPPELS DE COURS

MÉTHODES

ENTRAÎNEMENTS CORRIGÉS



### Définition 2.21. Borne supérieure, borne inférieure

Soit  $A \subset \mathbb{R}$ .

1. Si l'ensemble des majorants de  $A$  admet un plus petit élément, cet élément est appelé **borne supérieure** de  $A$  et noté  $\sup A$ .
2. Si l'ensemble des minorants de  $A$  admet un plus grand élément, cet élément est appelé **borne inférieure** de  $A$  et noté  $\inf A$ .

Ces notions seront revues ultérieurement dans les chapitres 7 et 8, avec le théorème de la limite monotone.

## MÉTHODES

Retrouvez ici toutes les méthodes indispensables pour mieux appréhender les exercices et utiliser le cours.

### Méthode 1. Calculer une somme double

1. Les deux sommes sont finies, on peut donc les permuter, de façon à commencer par la plus simple (ou celle qu'on sait calculer);
2. Si la somme est définie par une expression du type  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n}$ , on écrit ceci comme une somme double

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n$ , que l'on intervertit éventuellement.

Calculer :

1.  $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n 2^{i+j}$
2.  $\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \frac{j}{i}$ .

### Application de la méthode

1. Pour tout  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ ,  $2^{i+j} = 2^i 2^j$ .

Dès lors,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n 2^{i+j} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n 2^i 2^j = \sum_{i=0}^n 2^i \sum_{j=0}^n 2^j \\ &= \left( \sum_{i=0}^n 2^i \right) \left( \sum_{j=0}^n 2^j \right) = \left( \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \right)^2 \\ &= (2^{n+1} - 1)^2 \end{aligned}$$

2. On réécrit cette somme en somme double.  $1 \leq j \leq i \leq n \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \end{cases}$ . La somme s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \frac{j}{i} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{j}{i} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i j = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \frac{i(i+1)}{2} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (i+1) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{n(n+1)}{2} + n \right) \\ &= \frac{n(n+3)}{4} \end{aligned}$$

### Méthode 2. Quelques méthodes pour établir des inégalités

1. Étudier le signe de la différence (éventuellement de la fonction différence);
2. Élever les nombres à comparer (si les deux nombres à comparer sont positifs, et notamment si l'un d'eux comporte une racine carrée);
3. Composer par une fonction usuelle strictement croissante (essentiellement  $\ln$  ou  $\exp$ ).

Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$ .

#### Application de la méthode

Soit  $f : x \mapsto e^x - (1 + x)$

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = e^x - 1$ .

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$  (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur  $\mathbb{R}$ ).

$f$  est donc strictement croissante sur  $[0; +\infty[$  et strictement décroissante sur  $] -\infty; 0]$ .

Elle admet son minimum en 0, qui vaut  $f(0) = e^0 - 1 = 0$ .

Ainsi, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) \geq 0$ . On a donc bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x.$$

#### Remarque

Cette inégalité peut également être établie en utilisant la convexité de la fonction exponentielle (cf chapitre 5.).

### Méthode 3. Équations et inéquations comportant une valeur absolue

La manipulation des valeurs absolues est délicate : on cherche, autant que faire se peut, à s'en débarrasser.

Pour cela, on utilise notamment les résultats suivants, pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $a \geq 0$  :

- $|x| = a \Leftrightarrow x = a$  ou  $x = -a$ .
- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ .

Résoudre :

1.  $|x^2 - x| = |-4x - 2|$ .
2.  $(E) : |-5x + 3| < 2$ .

### Application de la méthode

1. Cette équation équivaut à :

$$x^2 - x = -4x - 2 \text{ ou } x^2 - x = 4x + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \text{ ou } x^2 - 5x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = -2 \text{ ou } x = \frac{5 - \sqrt{33}}{2} \text{ ou } x = \frac{5 + \sqrt{33}}{2}.$$

$$\text{Ainsi, } S = \left\{ -1, -2, \frac{5 - \sqrt{33}}{2}, \frac{5 + \sqrt{33}}{2} \right\}.$$

2.  $(E) \Leftrightarrow -2 < -5x + 3 < 2 \Leftrightarrow -5 < -5x < -1 \Leftrightarrow \frac{1}{5} < x < 1$ .

$$\text{Ainsi, } S = \left] \frac{1}{5}; 1 \right[.$$

### Méthode 4. Comment traiter un exercice portant sur les parties entières

1. Ceci repose essentiellement sur la connaissance des deux caractérisations les plus fréquemment utilisées de la partie entière :

- La partie entière de  $x$ , notée  $\lfloor x \rfloor$  est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à  $x$ . Ainsi, pour tout réel  $x$  :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

- On a également l'encadrement, pour tout réel  $x$  :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

La résolution des exercices sur les parties entières repose essentiellement sur ces deux encadrements. Selon le contexte de l'exercice, on choisit plutôt l'un ou l'autre.

2. Ne pas oublier non plus que les parties entières, comme leur nom l'indique, sont des entiers. Ainsi,  $0 < \lfloor x \rfloor < 3 \Leftrightarrow 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq 2$ , ce qui est absolument faux pour des réels quelconques ( $3 < \pi$ , mais on n'a pas  $4 \leq \pi$ ).

Questions :

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction  $f : x \mapsto x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ .
2. Déterminer, de même, la limite en 0 de  $g : x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ .

### Application de la méthode

1. Soit  $x \neq 0$ . Écrivons l'un des encadrements caractéristiques de la partie entière (on cherche un renseignement sur la partie entière, le terme « central » de l'encadrement sera donc  $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ ) :

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}.$$

On multiplie cet encadrement par  $x^2$ , qui est strictement positif car  $x \neq 0$  : on ne change donc pas le sens des inégalités. On obtient :

$$x - x^2 < x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq x.$$

Les deux fonctions  $x \mapsto x$  et  $x \mapsto x - x^2$  tendent vers 0 en 0 donc (théorème des gendarmes)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0.$$

2. Là, c'est un peu plus délicat. On part du même encadrement de  $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ , mais cette fois on doit le multiplier par  $x$ , qui peut être positif ou négatif.

On est donc conduit à une disjonction de cas :

- 1<sup>er</sup> cas :  $x > 0$ . On ne change donc pas le sens des inégalités et on obtient : pour  $x > 0$ ,

$$1 - x < x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1.$$

Les deux termes « extérieurs » tendent vers 0 quand  $x$  tend vers 0 par voie positive : par théorème d'encadrement, on obtient  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$ .

- 2<sup>e</sup> cas :  $x < 0$ . Cette fois, multiplier l'inégalité par un nombre négatif change le sens des inégalités. On obtient :

$$1 \leq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor < 1 - x \quad (\text{rien de choquant dans le fait que } 1 - x > 1, \text{ puisque } x < 0).$$

Le raisonnement est identique à celui du premier cas et nous conduit à  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$ .

La limite quand  $x$  tend vers 0, que ce soit par voie positive ou négative, de  $x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$  vaut 1. Finalement :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1.$$

#### Remarque

Pour  $x \neq 0$ ,  $x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \frac{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}{\frac{1}{x}}$ .

Ce quotient tend vers 1 quand  $x$  tend vers 0 : on dit (on verra ceci dans un chapitre ultérieur) que  $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$ , qui se lit «  $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$  est équivalent en 0 à  $\frac{1}{x}$  ».

## ENTRAÎNEMENTS

### Exercices d'entraînement

#### EXERCICE 1

●●○ 20 min.

1. Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout  $x \notin \{-1; 0\}$  :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

2. En déduire la valeur de la somme  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$  et sa limite quand  $n \rightarrow +\infty$ .

### EXERCICE 2

●●○ 10 min.

Pour  $a \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n k a^k$ .

1. Calculer  $S_n$  lorsque  $a = 1$ .
2. Lorsque  $a \neq 1$ , calculer  $aS_n - S_n$  et en déduire la valeur de  $S_n$ .

### EXERCICE 3

●●○ 10 min.

Montrer que :  $\forall x \in I = [0; 2\pi], \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ .

## Exercices d'approfondissement

### EXERCICE A

●●○ 10 min.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Calculer, pour  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $(k+1)^3 - k^3$ .
2. En déduire, en supposant connue  $\sum_{k=1}^n k$ , la valeur de  $\sum_{k=1}^n k^2$  (on pourra penser aux sommes télescopiques).
3. Adapter cette méthode pour trouver la valeur de  $\sum_{k=1}^n k^3$ .

### EXERCICE B

●●● 20 min.

1. Déterminer trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que :

$$\forall k \geq 2, \frac{1}{k^3 - k} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}.$$

2. En déduire la valeur de  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^3 - k}$ .

### EXERCICE C

●●○ 25 min.

1. Énoncer la formule du binôme de Newton.
2. Soient  $n$  et  $p$  deux entiers tels que  $1 \leq p \leq n$ . Montrer que  $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$ .
3. En déduire les valeurs des sommes  $S_n = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$  et  $S'_n = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$ .

### EXERCICE D

●●● 20 min.

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1.  $\sqrt{x^2 - x - 2} \leq |3x + 2|$ .
2.  $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 3x + 2$ .

**EXERCICE E**

●●● 20 min.

1. Montrer que, pour tout réel
- $x$
- :

$$0 \leq \lfloor 3x \rfloor - 3\lfloor x \rfloor \leq 2.$$

2. Soit la fonction
- $f : x \mapsto \lfloor 3x \rfloor - 3\lfloor x \rfloor$
- .

- (a) Montrer que  $f$  est 1-périodique.  
 (b) Tracer  $C_f$ , courbe représentative de  $f$  sur  $[-2; 2]$ .

**EXERCICE F**

●●● 20 min.

1. Montrer que
- $\sum_{(i,j) \in [1;n]^2} \min(i,j) = \sum_{j=1}^n j^2$
- .

2. Que vaut
- $\max(i,j) + \min(i,j)$
- ? En déduire que
- $\sum_{(i,j) \in [1;n]^2} \max(i,j) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$
- .

**EXERCICE G**

●●● 20 min.

1. Montrer que la fonction
- $f : x \mapsto x(1-x)$
- est bornée sur
- $[0; 1]$
- .

2. Soient
- $a, b, c \in [0; 1]$
- . Montrer que l'un au moins des nombres
- $4a(1-b)$
- ,
- $4b(1-c)$
- ,
- $4c(1-a)$
- est inférieur ou égal à 1.

**EXERCICE H**

●●○ 10 min.

**ATTENTION!** Cet exercice ne pourra être abordé qu'après avoir vu le chapitre 4 sur les nombres complexes. Mais il est toujours bon de reprendre les chapitres antérieurs...

Soient  $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$  et  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Calculer  $S_n = \sum_{k=1}^n \omega^k$  et  $P_n = \prod_{k=1}^n \omega^k$ .

**CORRIGÉS****EXERCICE 1**

1. Nous verrons dans le chapitre 10 sur les polynômes comment réaliser une telle décomposition en éléments simples. Vous pourrez à ce moment-là appliquer une autre méthode.

En attendant, utilisons les outils dont nous disposons :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 0\}, \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{(a+b)x + a}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

On identifie (attention, on identifie seulement les coefficients des polynômes situés au numérateur) :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}.$$

Ainsi,  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 0\}, \quad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$

RAPPELS DE COURS

MÉTHODES

ENTRAÎNEMENTS CORRIGÉS

2. On utilise naturellement la question précédente (ce qui est possible car, puisque  $k$  varie entre 1 et  $n$ , il ne peut valoir ni 0 ni  $-1$ ), et on reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1$ .

**Remarque**

On peut utiliser tel quel le résultat portant sur les sommes télescopiques. Reprenons la justification, pour ceux ayant besoin de se clarifier les idées (il n'est pas nécessaire de le refaire à chaque fois, mais important de comprendre le mécanisme) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} \quad (\text{en posant } j = k+1 \text{ dans la deuxième somme}) \\ &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \left( \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} + \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

**Remarque**

On verra dans un chapitre ultérieur que la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)}$  est convergente, et de somme 1.

**EXERCICE 2**

1. Lorsque  $a = 1$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n k = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  (c'est du cours!)  
 2. Supposons  $a \neq 1$ .

$$\begin{aligned} aS_n - S_n &= a \sum_{k=0}^n ka^k - \sum_{k=0}^n ka^k \\ &= \sum_{k=0}^n ka^{k+1} - ka^k \\ &= \sum_{k=0}^n ((k+1) - 1)a^{k+1} - ka^k \\ &= \sum_{k=0}^n (k+1)a^{k+1} - ka^k - \sum_{k=0}^n a^{k+1} \\ &= (n+1)a^{n+1} - a \sum_{k=0}^n a^k \quad (\text{somme télescopique}) \\ &= (n+1)a^{n+1} - a \times \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \end{aligned}$$

**EXERCICE 3**

Soit  $g : x \mapsto \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ .

$g$  est dérivable sur  $I$  et, pour tout  $x$ ,  $g'(x) = -\sin x + x$ .

On peut connaître le signe de cette fonction ou pas. Mettons que non.

On dérive à nouveau  $g'$ , qui est dérivable sur  $I$ , et, pour tout réel  $x \in I$ ,  $g''(x) = 1 - \cos x \geq 0$ .

$g'$  est donc croissante sur  $I$ . Or,  $g'(0) = 0$ . On a donc, pour tout  $x \in I$ ,  $g'(x) \geq 0$  :  $g$  est donc croissante sur  $I$ .

Or,  $g(0) = \cos 0 - 1 = 0$ . Finalement  $g$  est positive sur  $I$ , c'est-à-dire :

$$\forall x \in [0; 2\pi], \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

**Remarque**

En fait, cette dernière inégalité est vraie sur  $\mathbb{R}$  tout entier. On peut remarquer que  $2\pi$  ne joue aucun rôle ici. On aurait donc pu établir cette inégalité sur  $\mathbb{R}_+$  et, du fait de la parité de la fonction  $g$ , l'étendre à  $\mathbb{R}$ .

**EXERCICE A**

1. Soit  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ .  $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$  (binôme de Newton).

2. Sommons l'égalité précédente entre 0 et  $n$  :

$$\sum_{k=0}^n (k+1)^3 - k^3 = 3 \sum_{k=0}^n k^2 + 3 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=0}^n 1.$$

On reconnaît à gauche une somme télescopique. On a donc :

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - 0^3 &= (n+1)^3 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Leftrightarrow 3 \sum_{k=1}^n k^2 = (n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1) \\ &\Leftrightarrow 3 \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)}{2} \\ &\Leftrightarrow 3 \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(n+1)(2(n+1)^2 - 3n - 2)}{2} \\ &\Leftrightarrow 3 \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(n+1)(2n^2 + n)}{2} \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

3. On « calque » la méthode sur la question précédente.

Pour  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ .

On somme cette égalité de 1 à  $n$ , pour obtenir :

$$\begin{aligned} (n+1)^4 &= 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=0}^n 1 \\ &= 4 \sum_{k=1}^n k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + (n+1) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 4 \sum_{k=1}^n k^3 &= (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) \\ &= (n+1)((n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1) \\ &= (n+1)((n+1)^3 - (2n+1)(n+1)) \\ &= (n+1)^2((n+1)^2 - (2n+1)) \\ &= n^2(n+1)^2 \end{aligned}$$

On retrouve bien  $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ .

**Remarque**

On peut ainsi, de proche en proche, calculer toutes les sommes  $\sum_{k=1}^n k^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ .

**EXERCICE B**

**1. Remarque**

Là encore, vous pourrez reprendre cette décomposition en éléments simples en fin de semestre, une fois le chapitre 10 traité.

$$\begin{aligned} \forall k \geq 2, \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1} &= \frac{ak(k+1) + b(k-1)(k+1) + ck(k-1)}{k(k-1)(k+1)} \\ &= \frac{(a+b+c)k^2 + (a-c)k - b}{k^3 - k} \end{aligned}$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - c = 0 \\ -b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Finalement,  $\forall k \geq 2, \frac{1}{k^3 - k} = \frac{1}{2} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \frac{1}{k+1}$ .

**2. D'après la question précédente :**

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^3 - k} &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{j=3}^{n+1} \frac{1}{j} \quad (\text{changements d'indice}) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \sum_{j=3}^{n-1} \frac{1}{j} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \sum_{j=3}^{n-1} \frac{1}{j}\right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=3}^{n-1} \frac{1}{j} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2} + \sum_{j=3}^{n-1} \frac{1}{j} \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2} \end{aligned}$$

**Remarque**

Le télescopage est moins évident ici, mais bien réel : tous les termes de la « plage commune » aux trois sommes, c'est-à-dire entre 3 et  $n-1$ , disparaissent, la clé de ceci étant le fait que la somme des trois coefficients  $a, b$  et  $c$  est nulle.

## EXERCICE C

## Remarque

Cet exercice n'est pas un exercice « gratuit » : les calculs du 3. reviendront régulièrement lorsqu'il sera question de variables aléatoires suivant une loi binomiale (chapitre 19).

1. Pour tous  $a, b \in \mathbb{C}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

2. Ce résultat repose sur deux points essentiellement :

- pour tout entier naturel  $p$ ,  $(p + 1)! = p! \times (p + 1)$ ;
- pour tous entiers naturels  $n$  et  $p$ ,  $n - p = (n - 1) - (p - 1)$ .

Si  $1 \leq p \leq n$  :

$$p \binom{n}{p} = p \times \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{p \times n \times (n-1)!}{p \times (p-1)! \times ((n-1) - (p-1))!} = n \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1) - (p-1))!} = n \binom{n-1}{p-1}.$$

## Remarque

Ce résultat peut également être montré à l'aide de raisonnements ensemblistes. Cette technique, très calculatoire, correspond aux outils à notre disposition en début d'année.

3. • En utilisant la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} \quad (\text{d'après 1.}) \\ &= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \quad (\text{en posant } j = k - 1) \\ &= n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} 1^j 1^{n-1-j} = n 2^{n-1} \quad (\text{binôme de Newton}) \end{aligned}$$

- On utilise deux fois la formule du 2. (appelée parfois « formule sans nom » ou « formule du capitaine »). Pour cela, remarquons que : pour tout entier naturel  $k$ ,  $k^2 = k(k-1) + k$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} S'_n &= \sum_{k=1}^n k(k-1) \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \quad (\text{le premier terme de la première somme est nul}) \\ &= \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} + S_n \quad (\text{on applique deux fois la question 2}) \\ &= n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} + S_n \\ &= n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} + S_n \quad (\text{on pose } j = k - 2) \\ &= n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} 1^j 1^{n-2-j} + S_n \\ &= n(n-1) 2^{n-2} + n 2^{n-1} \quad (\text{binôme de Newton}) \\ &= n(n-1) 2^{n-2} + 2n 2^{n-2} \\ &= n(n+1) 2^{n-2} \end{aligned}$$

### EXERCICE D

- Commençons par le domaine de définition de cette inéquation.  
On résout  $x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$ .  
Ainsi  $D = ]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$ .  
Lorsque  $x \in D$ , les deux membres de l'inégalité sont positifs et donc rangés dans le même ordre que leurs carrés (la fonction carré étant croissante sur  $\mathbb{R}_+$ ).  
Ainsi,  $(I) \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq (3x + 2)^2 \Leftrightarrow 8x^2 + 13x + 6 \geq 0$ .  
Le discriminant est  $\Delta = -23 < 0$ . On en déduit :  $8x^2 + 13x + 6 > 0$ , pour tout réel  $x$ .  
L'inéquation obtenue est donc toujours vérifiée. Il ne faut cependant pas oublier le domaine de définition de l'inéquation.  
On a finalement :  $S = D$ .
- On a, naturellement, envie, là encore, d'élever au carré. Mais on ne sait, cette fois, si les deux membres de l'inéquation sont positifs (on n'a plus de valeur absolue).  
Le domaine de définition, lui, n'a pas changé.  
On fait alors une disjonction de cas :
  - 1<sup>er</sup> cas** :  $3x + 2 \leq 0, x \in D$   
Ceci équivaut à  $x \leq -\frac{2}{3}$  et  $x \in D$ , c'est-à-dire  $x \in ]-\infty; -1]$ .  
Dans ce cas, le membre de gauche est positif, celui de droite est négatif : l'inégalité est toujours vraie, sans qu'on ait à poursuivre la résolution.
  - 2<sup>e</sup> cas** :  $3x + 2 > 0, x \in D$   
Ceci équivaut à  $x \geq 2$ .  
Les deux membres sont alors positifs, et donc rangés dans le même ordre que leurs carrés.  
L'inéquation équivaut à  $x^2 - x - 2 \geq (3x + 2)^2 \Leftrightarrow 8x^2 + 13x + 6 \leq 0$ .  
Cette inéquation n'a pas de solution (voir question 1).  
Finalement,  $S = ]-\infty; -1]$ .

### EXERCICE E

- Utilisons l'un des encadrements caractérisant la partie entière. Puisque le résultat demandé porte sur la partie entière, on utilise :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < [x] \leq x.$$

On obtient alors :

- $\forall x \in \mathbb{R}, 3x - 1 < [3x] \leq 3x$  (en substituant  $3x$  à  $x$  dans l'encadrement précédent);
- $\forall x \in \mathbb{R}, 3x - 3 < 3[x] \leq 3x \Leftrightarrow -3x \leq -3[x] < 3 - 3x$  (en multipliant l'encadrement initial par  $3 > 0$ ).

#### Remarque

- Ne pas oublier qu'on ne peut soustraire des encadrements, seulement les ajouter.
- Lorsqu'on ajoute une inégalité stricte et une inégalité large, on obtient une inégalité stricte.  
Si  $a \leq b$  et  $c < d$ , alors  $a + c < b + d$ .

On ajoute les encadrements obtenus pour obtenir :  $\forall x \in \mathbb{R}, -1 < [3x] - 3[x] < 3$ .

On n'aboutit pas à l'encadrement demandé. Mais, il faut remarquer que, puisqu'une partie entière est un entier relatif, nécessairement  $[3x] - 3[x] \in \mathbb{Z}$ .

Or, un entier relatif compris strictement entre  $-1$  et  $3$  vaut forcément  $0, 1$  ou  $2$ .

Ainsi,  $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq [3x] - 3[x] \leq 2$ .

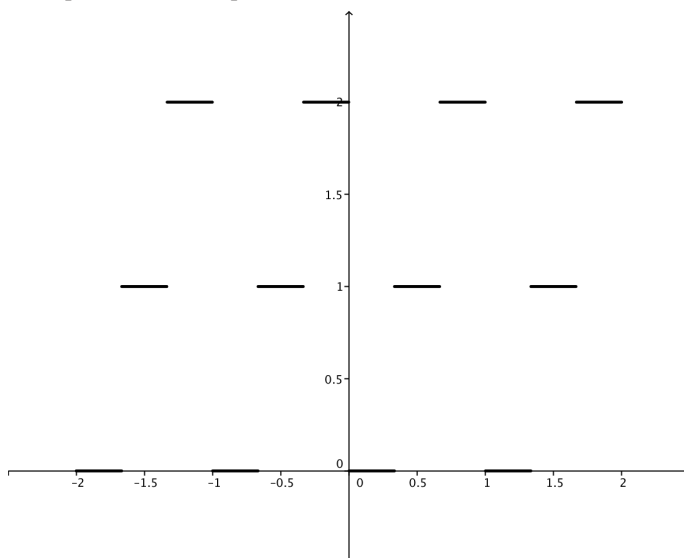
- (a) Montrons que, pour tout réel  $x$ ,  $[x + 1] = [x] + 1$ .  
Pour tout  $x$ ,  $[x] \leq x < x + 1 \Leftrightarrow [x] + 1 \leq x + 1 < [x] + 1$ .  
Ainsi,  $[x] + 1$  est le plus grand entier inférieur ou égal à  $x + 1$  : on a donc  $[x] + 1 = [x + 1]$ .  
En itérant ceci (ceci se montre « proprement » par récurrence), on a :  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, [x + n] = [x] + n$ .  
En utilisant ceci, on a, pour tout réel  $x$  :

$$f(x + 1) = [3(x + 1)] - 3[x + 1] = [3x] + 3 - 3([x] + 1) = [3x] - 3[x] = f(x).$$

$f$  est bien 1-périodique. On peut donc se contenter de l'étudier sur  $[0; 1]$ . Dans ce cas,  $[x] = 0$  et  $f(x) = [3x]$  (sauf pour  $x = 1$ , où  $f(x) = 3 - 3 = 0$ ).

- (b) • Si  $x \in \left[0; \frac{1}{3}\right[ : 3x \in [0; 1[$  donc  $f(x) = 0$ .
- Si  $x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right[ : 3x \in [1; 2[$  donc  $f(x) = 1$ .
- Si  $x \in \left[\frac{2}{3}; 1\right[ : 3x \in [2; 3[$  donc  $f(x) = 2$ .
- $f(1) = f(0) = 0$

On répète ce « motif » pour obtenir la courbe sur  $[-2; 2]$ .



### EXERCICE F

1. La première somme s'écrit :  $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \min(i, j)$ . Or, cette somme vaut, puisque le minimum de  $i$  et  $j$  vaut  $i$  si  $i \leq j$  et  $j$  sinon :

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \min(i, j) &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^j i + \sum_{i=j+1}^n j \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{j(j+1)}{2} + (n-j)j \right) \quad (\text{dans la deuxième somme, } j \text{ ne dépend pas de l'indice de sommation}) \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{(2n+1)j - j^2}{2} \\
 &= \frac{2n+1}{2} \sum_{j=1}^n j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j^2 \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j^2 \\
 &= n(n+1)(2n+1) \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \sum_{j=1}^n j^2
 \end{aligned}$$

RAPPELS DE COURS

MÉTHODES

ENTRAÎNEMENTS CORRIGÉS

2. De manière évidente, pour tous réels (et donc pour tous entiers naturels  $i$  et  $j$ ,  $\max(i, j) + \min(i, j) = i + j$ .  
On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in [1;n]^2} \max(i, j) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i + j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( ni + \frac{n(n+1)}{2} \right) - \sum_{j=1}^n j^2 \\ &= n \sum_{i=1}^n i + \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= n^2(n+1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(6n - (2n+1))}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} \end{aligned}$$

### EXERCICE G

1. Remarquons tout d'abord que, si  $x \in I = [0; 1]$ ,  $x \geq 0$  et  $1 - x \geq 0$  donc  $f(x) \geq 0$ .

Ainsi  $f$  est minorée sur  $I$  par 0.

Reste à obtenir un majorant de  $f$  sur  $I$ .

On peut bien entendu dériver  $f$ . On obtient :  $\forall x \in [0; 1], f'(x) = 1 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$ .

$f$  est donc croissante sur  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$  et décroissante sur  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .

Son maximum est donc atteint en  $\frac{1}{2}$  et vaut  $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ .

#### Remarque

On aurait pu reconnaître en  $f$  une fonction trinôme du second degré, dont les racines sont 0 et 1, et dont le coefficient dominant  $-1$  est strictement négatif : le sommet a donc pour abscisse  $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$  et est un maximum.

2. Comme souvent, lorsque deux questions consécutives semblent étrangères l'une à l'autre, il y a en fait un lien. Il faudrait donc faire coexister  $x$  et  $1 - x$ ... ce qui nous invite à multiplier les trois quantités  $4a(1 - b)$ ,  $4b(1 - c)$  et  $4c(1 - a)$ .

Supposons, par l'absurde, que ces trois nombres sont strictement supérieurs à 1.

Ils sont donc *a fortiori* strictement positifs.

Leur produit (l'ordre est conservé lorsqu'on multiplie des nombres positifs) est donc lui aussi strictement supérieur à 1.

Or, ce produit vaut  $64a(1 - a)b(1 - b)c(1 - c)$ .

D'après le 1.,  $a(1 - a)$ ,  $b(1 - b)$ ,  $c(1 - c)$  sont compris entre 0 et  $\frac{1}{4}$ .

Là encore, on a affaire à des nombres positifs, on peut donc multiplier les encadrements.

On obtient  $0 \leq 64a(1 - a)b(1 - b)c(1 - c) \leq 1$ . Ceci est en contradiction avec le fait que les trois nombres sont strictement supérieurs à 1.

Ainsi, l'un des trois nombres  $4a(1 - b)$ ,  $4b(1 - c)$ ,  $4c(1 - a)$  est inférieur ou égal à 1.

**EXERCICE H**

- On reconnaît en  $S_n$  la somme des termes d'une suite géométrique de raison  $\omega \neq 1$  :

$$\sum_{k=1}^n \omega^k = \omega \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \omega \cdot \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = 0.$$

$$\text{En effet, } \omega^n = \exp\left(n \times \frac{2i\pi}{n}\right) = e^{2i\pi} = 1.$$

**Remarque**

On aurait pu (mais c'est plus une astuce propre aux racines  $n^{\text{èmes}}$  de l'unité qu'une méthode générale) utiliser le fait que  $\omega^n = 1$  et l'isoler.

$$\text{De ce fait, } S_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \omega^k\right) + 1 = 1 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \omega^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k\right) = 0.$$

- Lorsqu'on multiplie les puissances d'un même nombre, les exposants s'ajoutent. Ainsi :

$$P_n = \exp\left(\frac{2i\pi}{n} \sum_{k=1}^n k\right) = \exp\left(\frac{2i\pi}{n} \times \frac{n(n+1)}{2}\right) = e^{i(n+1)\pi} = (-1)^{n+1}.$$

Ce dernier résultat peut aisément être montré par récurrence (cette démonstration est laissée au lecteur).

**Sujets de colle****Question de cours :**

Donner, sans démonstration, les valeurs, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , de  $\sum_{k=1}^n k$  et  $\sum_{k=1}^n k^2$ .

**Exercices****SUJET I**

●●● 30 min.

On désigne par  $d$  (respectivement  $\delta$ ) la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $d(t) = t - 1 + \cos t$  (respectivement  $\delta(t) = \frac{t^2}{2} - 1 + \cos t$ ).

- Étudier la fonction  $d$ . En déduire l'existence d'un réel  $\alpha$  tel que :  $\forall t > 0 : 0 \leq \frac{1 - \cos t}{t} \leq \alpha$ .
- Étudier la fonction  $\delta$ . En déduire l'existence d'un réel  $\beta$  tel que :  $\forall t > 0 : 0 \leq \frac{1 - \cos t}{t^2} \leq \beta$ .

**SUJET II**

●●● 30 min.

- Montrer que pour tous réels  $a, b$  et  $c$  :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

- Étudier les cas d'égalité.

RAPPELS DE COURS

MÉTHODES

ENTRAÎNEMENTS CORRIGÉS

## CORRIGÉS

### SUJET I

1.  $d$  est évidemment dérivable, et, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $d'(t) = 1 - \sin t \geq 0$  (naturellement cette question sera plus facile à traiter une fois vu le chapitre trigonométrie).

La fonction  $d$  est donc croissante sur  $\mathbb{R}_+$  : ainsi, pour tout  $t \geq 0$ ,  $d(t) \geq d(0)$ .

Or,  $g(0) = -1 + \cos 0 = 0$ .

Dès lors, pour tout  $t \geq 0$ ,  $t - 1 + \cos t \geq 0$ .

Ceci est donc également vrai pour tout  $t > 0$ ... ce qui va nous permettre de diviser.

On a :  $\forall t > 0, t - 1 + \cos t \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \cos t \leq t \Leftrightarrow \frac{1 - \cos t}{t} \leq 1$ .

La positivité de  $\frac{1 - \cos t}{t}$  étant évidente sur  $\mathbb{R}_+^*$  (pour tout  $t > 0$ ,  $\cos t \leq 1$ ), on a bien :

$$\forall t > 0 : 0 \leq \frac{1 - \cos t}{t} \leq 1.$$

On a donc le résultat voulu, avec  $\alpha = 1$ .

2. Là encore,  $\delta$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  (et même  $\mathbb{R}$ ), et on a :

$$\forall t \geq 0, \delta'(t) = t - \sin t.$$

Rien de très concluant quant au signe de  $\delta'$  : on redérive.

$$\forall t \geq 0, \delta''(t) = 1 - \cos t \geq 0.$$

$\delta'$  est donc croissante (et même strictement croissante, mais c'est inutile ici) sur  $\mathbb{R}_+$  : ainsi, pour tout  $t \geq 0$ ,  $\delta'(t) \geq \delta'(0) = 0$ .

On en déduit la croissance de  $\delta$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

Ainsi, pour tout  $t \geq 0$ ,  $\delta(t) \geq \delta(0) = 0$  (\*).

On raisonne alors comme dans la question précédente.

(\*) est vraie sur  $\mathbb{R}_+$ , donc sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$$\forall t > 0, \delta(t) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \cos t \leq \frac{t^2}{2} \Leftrightarrow \frac{1 - \cos t}{t^2} \leq \frac{1}{2}.$$

La positivité de la quantité étant évidente (même justification qu'en 1.), on a bien :

$$\forall t > 0, 0 \leq \frac{1 - \cos t}{t^2} \leq \frac{1}{2}.$$

On a bien le résultat voulu, avec  $\beta = \frac{1}{2}$ .

### SUJET II

1. L'inégalité comporte des carrés et des « double-produits » (mais sans le 2), et fait à ce titre penser à des identités remarquables.

On multiplie les deux membres par 2, et on compare les deux termes de l'inégalité. On étudie pour cela le signe de la différence.

On étudie donc le signe de  $2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + ac + bc)$ .

$$\text{Or, } 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + ac + bc) = (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \geq 0.$$

On a donc bien, pour tous réels  $a, b, c$  :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

2. On a égalité si et seulement si la différence calculée dans la question précédente est nulle. Or, celle-ci vaut  $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2$ , qui est la somme de trois carrés de réels. Elle est donc nulle si et seulement si chacun de ces carrés est nul.

Ainsi, il y a égalité si et seulement si  $a = b = c$ .

## CHAPITRE 3

# Trigonométrie

### Objectifs et compétences du programme

| Capacités principales à maîtriser         | Méthodes associées | Exercices associés |
|-------------------------------------------|--------------------|--------------------|
| Formules d'addition et de duplication     | 1-2                | 1-2-B-C            |
| Fonctions cosinus et sinus                | 2                  | A-D-E              |
| Équations et inéquations trigonométriques | 1                  | 1-B                |
| Fonction tangente                         |                    | 3-D                |

## RAPPELS DE COURS

### 1. Repérage sur le cercle trigonométrique - Définition de $\cos \theta$ et $\sin \theta$

#### 1.1. Définition - Obtention des lignes trigonométriques sur le cercle trigonométrique

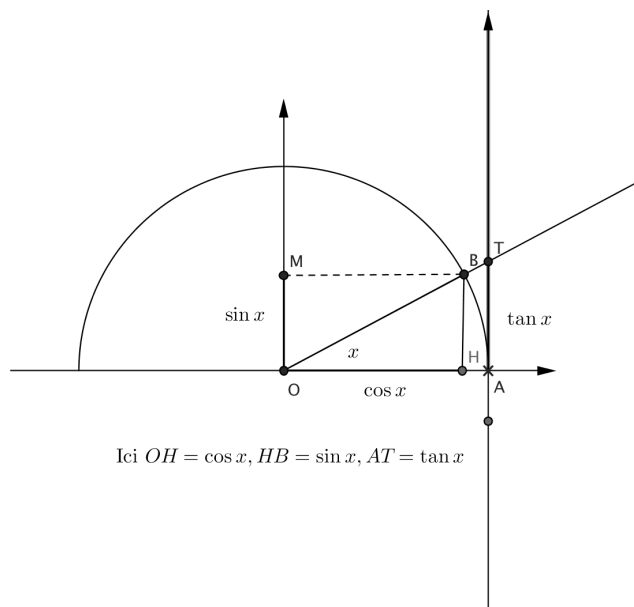
On se place dans un repère orthonormal direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

On repère tout point du cercle trigonométrique, de centre  $O$  et de rayon 1, par l'angle  $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OB})$ .

Alors, les coordonnées de  $B$  dans le repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  sont  $(\cos \theta; \sin \theta)$ .

On peut alors définir, pour tout réel  $\theta$  tel que  $\cos \theta \neq 0$ , la tangente de l'angle  $\theta$ , noté  $\tan \theta$  par  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ .

La tangente est un peu moins évidente à repérer sur le cercle : elle est à chercher sur la tangente au cercle trigonométrique au point  $A$  (la figure devrait vous rappeler le collège).



L'appartenance de  $B$  au cercle trigonométrique nous permet de rappeler la relation fondamentale de la trigonométrie :

**Théorème 3.1.**

Pour tout réel  $x$ ,  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ .

## 2. Congruence modulo $2\pi$



**Définition 3.2.**

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ .

On dit que  $a$  et  $b$  sont **congrus modulo  $2\pi$** , et on note  $a \equiv b[2\pi]$ , s'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que :

$$b = a + 2k\pi.$$

**Remarque**

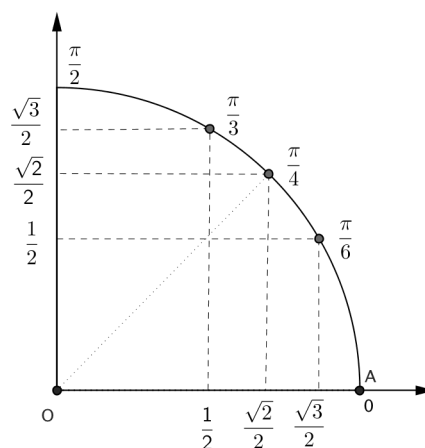
$2k\pi = k \times 2\pi$ . Autrement dit,  $a$  et  $b$  sont congrus modulo  $2\pi$  si leur différence est un nombre entier de tours (le signe de  $k$  donnant le sens de rotation).

Ainsi, si  $a \equiv b[2\pi]$ , les angles  $a$  et  $b$  sont représentés par le même point sur le cercle :  $a$  et  $b$  auront donc même cosinus, même sinus, même tangente.

## 3. Valeurs remarquables

### 3.1. Dans le « premier cadran »

| $x$      | 0 | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
|----------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| $\tan x$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | NON DÉFINI      |



# PRÉPAS SCIENTIFIQUES PCSI-PTSI

CONFORME AU  
PROGRAMME

## Maths

**Un entraînement intensif aux épreuves de concours pour être prêt le jour J**

→ **RAPPELS DE COURS**

Toutes les **notions essentielles** à acquérir pour mieux appréhender les exercices

→ **FICHES MÉTHODES**

65 fiches pour maîtriser les **techniques et astuces** de résolution des exercices

→ **ENTRAÎNEMENT INTENSIF**

Plus de **240 exercices d'application, d'approfondissement et sujets de colles** pour s'entraîner progressivement, se mettre en situation d'épreuve et être prêt le jour J

→ **TOUS LES CORRIGÉS DÉTAILLÉS**

Pour **comprendre** les étapes de résolution des exercices et **acquérir** les bons réflexes

**Toutes les thématiques indispensables abordées :**

- **Algèbre** : nombres complexes, polynômes à une indéterminée, base de l'algèbre linéaire...
- **Analyse** : fonctions, primitives, équations différentielles, suites, analyse asymptotique...
- **Probabilités** : variables aléatoires, dénombrement...

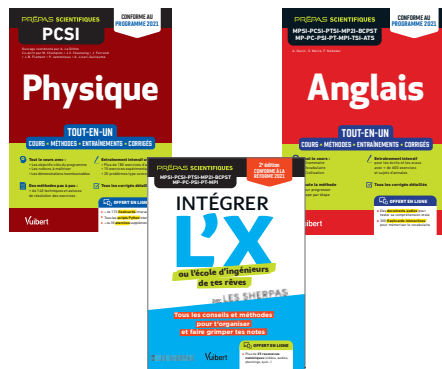


**OFFERT EN LIGNE**

- **Toutes les fiches méthodes à télécharger** pour des révisions nomades avant les épreuves

**Un auteur au cœur de l'enseignement et des attentes des élèves en CPGE**

**Dans la même collection**



Retrouvez notre collection  
complète ici :

ISBN : 978-2-311-21595-3



9 782311 215953

32,90 €

