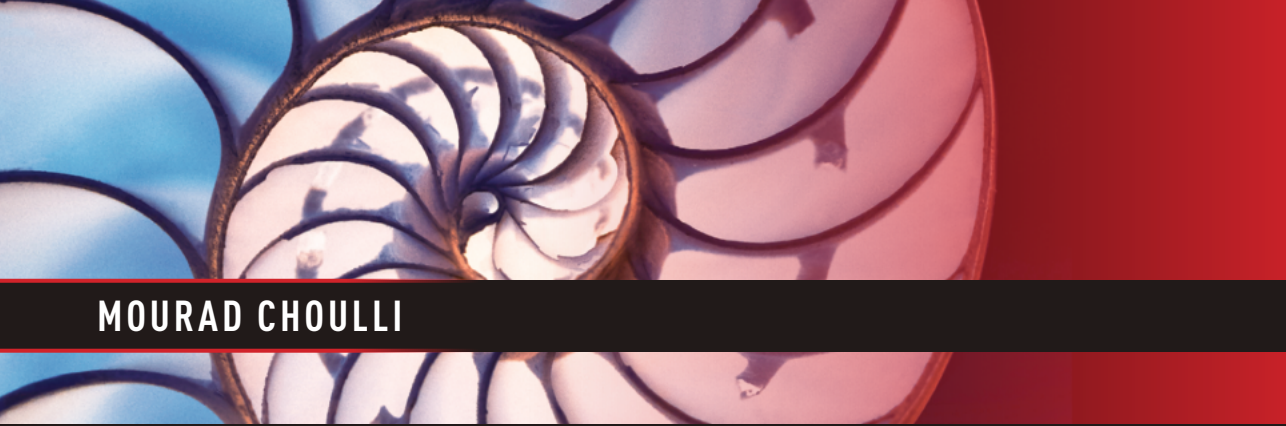




MOURAD CHOULLI

Analyse fonctionnelle

**LICENCE 3 & MASTER 1
MATHÉMATIQUES
ÉCOLES D'INGÉNIEURS**

- Cours complet
- Plus de 100 exercices
- Tous les corrigés détaillés



MOURAD CHOULLI

Analyse fonctionnelle

deboeck **B**
SUPÉRIEUR

Chez le même éditeur (extrait du catalogue)

BELHAJ S., *Mathématiques pour l'économie et la gestion*
BELHAJ S., BEN AISSA A., *Mathématiques pour l'informatique*
BRIANE M., PAGÈS G., *Analyse. Théorie de l'intégration* – 7^e édition
BURG P., *Mathématiques. Les fondamentaux en Licence 1*
CANON É., *Analyse numérique*
CARASSUS L., PAGÈS G., *Finance de marché. Modèles mathématiques à temps discret*
CARTON O., *Langages formels. Calculabilité et complexité*
CHOUILLI M., *Analyse complexe*
COTTET-EMARD F., *36 problèmes corrigés pour le CAPES de mathématiques*
COTTET-EMARD F., *Probabilités et tests d'hypothèses*
COTTET-EMARD F., *Algèbre linéaire et bilinéaire*
COTTET-EMARD F., *Analyse*
COTTET-EMARD F., *Toutes les maths – Analyse en 40 fiches*
COTTET-EMARD F., *Toutes les maths – Algèbre et probabilités en 62 fiches*
DARRACQ M.-C. & ROMBALDI J.-É., *Analyse pour la Licence*
DARRACQ M.-C. & ROMBALDI J.-É., *Algèbre et géométrie pour la Licence*
DARRACQ M.-C. & ROMBALDI J.-É., *Probabilités pour la Licence*
DEPAUW J., *Statistiques*
GIRARDIN V., LIMNIOS N., *Probabilités et introduction à la statistique*
MANSUY R., MNEIMNÉ R., *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes* – 3^e édition
PAGÈS G., *101 quizz qui banquent. Mathématiques et finances sont-elles indépendantes ?*
WASSEF P., *Algèbre., Arithmétique pour l'informatique*

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine
de spécialisation, consultez notre site web :

www.deboecksuperieur.com

En couverture : Coupe d'un nautille © AdrianHancu/Getty Images

Maquette intérieure : Hervé Soulard/Nexeme

Mise en pages de l'auteur

Maquette de couverture : Primo&Primo

Couverture : SCM, Toulouse

Dépôt légal :

Bibliothèque royale de Belgique : 2022/13647/005

Bibliothèque nationale, Paris : février 2022

ISBN : 978-2-8073-3492-2

Tous droits réservés pour tous pays.

Il est interdit, sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, de reproduire (notamment par photocopie) partiellement ou totalement le présent ouvrage, de le stocker dans une banque de données ou de le communiquer au public, sous quelque forme ou de quelque manière que ce soit.

© De Boeck Supérieur SA, 2022 - Rue du Bosquet 7, B1348 Louvain-la-Neuve

De Boeck Supérieur - 5 allée de la 2^e DB, 75015 Paris

Sommaire

Avant-propos	v
1 Exemples d'espaces normés	1
2 Espaces métriques complets	15
3 Éléments de topologie	25
4 Valeurs d'adhérence	33
5 Applications continues	39
6 Ensembles compacts	45
7 Continuité et compacité	55
8 Topologie produit et topologie quotient	61
9 Topologies initiales et topologies finales	69
10 Espaces connexes	75
11 Applications linéaires continues	83
12 Théorèmes associés aux fonctions continues	105
13 Théorèmes fondamentaux relatifs aux espaces de Banach	121
14 Espaces séparables et espaces réflexifs	135
15 Topologies faibles	143
16 Espaces de Hilbert	161
17 Exemples d'espaces vectoriels topologiques localement convexes	187
Bibliographie	199
Index	201

Avant-propos

Il existe une littérature riche et des ouvrages d'une très grande qualité sur le thème de l'analyse fonctionnelle. L'objectif principal du présent ouvrage est une introduction à l'analyse fonctionnelle, présentée de manière assez simple et actuelle. J'ai donc choisi délibérément de ne pas traiter le sujet ni dans toute sa généralité, ni de suivre la structure habituelle adoptée dans une majorité d'ouvrages sur le sujet. La topologie joue un rôle fondamental en analyse fonctionnelle. Différentes topologies sont introduites au fur et à mesure. D'autre part, les propriétés des espaces fonctionnels étudiés seront enrichies à chaque fois que de nouvelles notions sont introduites.

J'ai essayé de garder une présentation assez généraliste avec une ouverture vers des applications comme la théorie spectrale, la théorie des distributions, qui sont des outils fondamentaux dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

Une bonne partie de cet ouvrage est accessible dès la troisième année de Licence et certaines écoles d'ingénieurs. Il est toutefois recommandé d'avoir, en plus des acquis fondamentaux des deux premières années d'une licence de mathématique, une bonne connaissance des corps des réels et des complexes et une connaissance minimale de la théorie des ensembles. Je n'ai pas souhaité inclure ces prérequis dans cet ouvrage afin de lui garder une taille raisonnable.

J'introduis dès le Chapitre 1 les espaces classiques de suites et les espaces de fonctions qui ont une puissance p -ième intégrable (par rapport à une mesure positive), où p est un réel compris entre un et l'infini. Les espaces de fonctions continues et les théorèmes associés ne seront abordés de manière détaillée qu'au Chapitre 12 dans le cas où l'on dispose d'une structure d'espace normé. D'autres espaces de fonctions continues et de fonctions continues avec des dérivées partielles, jusqu'à un certain ordre, continues seront étudiés au Chapitre 17 dans le cadre des espaces vectoriels topologiques localement convexes.

Un des intérêts majeurs d'affaiblir la topologie de la norme est d'enrichir les parties compactes. La compacité joue un rôle essentiel dans la résolution de certaines équations fonctionnelles, issues par exemple d'une formulation abstraite d'équations aux dérivées partielles. Les topologies faibles et préfaibles feront l'objet d'une étude détaillée au chapitre 15.

Toujours dans le souci de garder une taille raisonnable à l'ouvrage, je n'ai inclus qu'un nombre limité d'exercices corrigés à la fin de chaque chapitre. Je renvoie le

lecteur qui souhaite enrichir ses connaissances en topologie et analyse fonctionnelle aux références que je cite à la fin de l'ouvrage. Parmi ces références figurent plusieurs ouvrages dédiés aux exercices, le plus souvent avec des corrigés détaillés.

Le contenu de cet ouvrage consiste en une version augmentée de la fusion d'un cours d'analyse fondamentale, que j'ai enseigné en troisième année de licence de mathématique, et d'un cours d'analyse fonctionnelle, que j'ai enseigné en première année de master de mathématique.

Chapitre 1

Exemples d'espaces normés

Les espaces vectoriels qu'on considère sont bâtis sur le corps $\mathbb{K}$ qui est égal soit à $\mathbb{R}$ ou bien à $\mathbb{C}$.

Soit E un espace vectoriel. Une application $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est dite sous-additive si elle vérifie :

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad x, y \in E.$$

Cette application p sera dite positivement homogène si elle satisfait à la condition suivante :

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad x \in E, \lambda > 0.$$

On observe que toute application $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ positivement homogène et sous-additive est convexe. En d'autres termes, on a

$$p(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda p(x) + (1-\lambda)p(y), \quad x, y \in E, 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Une application sous-additive $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ sera dite une semi-norme si elle satisfait à la condition

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \quad x \in E, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Il n'est pas difficile de voir qu'une semi-norme $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie nécessairement $p(0) = 0$.

Si une semi-norme $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est telle que $p(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$, alors on dira que p est une norme.

Une norme sur E est usuellement notée $\|\cdot\|_E$ ou tout simplement, s'il n'y pas de risque de confusion, $\|\cdot\|$.

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Les propriétés suivantes sont immédiates :

- (i) $\|-x\| = \|x\|, x \in E$.
- (ii) $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|, x, y \in E$.
- (iii) $\|x_1 + \dots + x_k\| \leq \|x_1\| + \dots + \|x_k\|, x_1, \dots, x_k \in E$.

On peut munir tout sous-espace vectoriel E_0 d'un espace normé E de la norme induite par celle sur E tout simplement en posant

$$\|x\|_{E_0} = \|x\|_E, \quad x \in E_0.$$

Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ seront dites équivalentes s'il existe deux constantes $0 < \mu \leq \nu$ telles que

$$\mu\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \nu\|x\|_1, \quad x \in E.$$

A toute norme $\|\cdot\|$ sur E , on peut associer l'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in E.$$

Cette application satisfait aux trois conditions suivantes :

(d1) $d(x, y) = 0$, $x, y \in E$, si et seulement si $x = y$.

(d2) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $x, y, z \in E$.

(d3) $d(x, y) = d(y, x)$, $x, y \in E$.

Clairement, on peut définir sur tout ensemble E une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions (d1) à (d3), sans que E soit muni d'une structure d'espace vectoriel. Dans ce cas, on dira que d est une distance et que E muni de cette distance est un espace métrique.

Il est utile de noter qu'une distance d possède les propriétés suivantes :

(i) $|d(x, y) - d(z, y)| \leq d(x, z)$, $x, y, z \in E$.

(ii) $d(x_1, x_k) \leq d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{k-1}, x_k)$, $x_1, \dots, x_k \in E$.

Une distance d sur un ensemble E induit une distance d_0 sur tout sous-ensemble E_0 de E en posant

$$d_0(x, y) = d(x, y), \quad x, y \in E_0.$$

On remarque qu'une distance d , associée à une norme $\|\cdot\|$, vérifie les deux conditions supplémentaires suivantes :

(d4) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y)$, $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

(d5) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$, $x, y, z \in E$.

Bien entendu, les propriétés (d4) et (d5) n'ont pas forcément un sens si E n'est pas un espace vectoriel.

Deux distances d_1 et d_2 sont équivalentes s'il existe deux constantes $0 < \mu \leq \nu$ telles que

$$\mu d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \nu d_1(x, y), \quad x, y \in E.$$

On remarque que si deux normes sont équivalentes alors les distances associées le sont aussi.

Exemple 1.1. (a) Deux normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ sont définies par

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n.$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n.$$

(b) Soit E l'espace vectoriel, sur $\mathbb{K}$, des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$ qui sont intégrables au sens de Riemann. On vérifie que

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad f \in E,$$

est une norme sur E .

(c) Soit E un ensemble quelconque. On définit $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ par

$$d(x, x) = 0 \quad \text{et} \quad d(x, y) = 1 \text{ si } x \neq y.$$

Cette application définit une distance sur E . On l'appelle la distance discrète.

(d) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone. Alors $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$, $x, y \in \mathbb{R}$, est une distance sur $\mathbb{R}$. Par exemple, $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$, $x, y \in \mathbb{R}$, est une distance sur $\mathbb{R}$.

(e) Soit E_j un espace métrique pour une distance d_j , $1 \leq j \leq p$. Alors le produit cartésien $E = E_1 \times \dots \times E_p$ est un espace métrique pour l'une des deux distances suivantes :

$$d_1(x, y) = \sum_{j=1}^p d_j(x_j, y_j), \quad x = (x_1, \dots, x_p), y = (y_1, \dots, y_p) \in E,$$

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq j \leq p} d_j(x_j, y_j), \quad x = (x_1, \dots, x_p), y = (y_1, \dots, y_p) \in E.$$

On appelle E le produit des espaces métriques $E_1, \dots, E_p$.

(f) Les espaces ℓ^1 et ℓ^∞ : On désigne par ℓ^1 l'ensemble des suites complexes (x_k) dont les séries associées sont absolument convergentes :

$$\sum_{k \geq 1} |x_k| < \infty.$$

Soient $x = (x_k), y = (y_k)$ deux éléments de ℓ^1 et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors

$$|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|, \quad k \geq 0, \quad (1.1)$$

$$|\lambda x_k| = |\lambda| |x_k|, \quad k \geq 0. \quad (1.2)$$

Il en résulte que $x + y \in \ell^1$ et $\lambda x \in \ell^1$. Donc ℓ^1 est un espace vectoriel pour les opérations

$$(x_k) + (y_k) = (x_k + y_k), \quad (x_k), (y_k) \in \ell^1, \quad (1.3)$$

$$\lambda(x_k) = (\lambda x_k), \quad (x_k) \in \ell^1, \lambda \in \mathbb{K}. \quad (1.4)$$

(1.1) et (1.2) permettent de nouveau de conclure que

$$x = (x_k) \in \ell^1 \mapsto \sum_{k \geq 1} |x_k|$$

est une norme sur ℓ^1 .

Soit ℓ^∞ l'ensemble des suites complexes bornées. Une nouvelle fois, grâce aux inégalités (1.1) et (1.2), ℓ^∞ , muni des opérations (1.3) et (1.4), est un espace vectoriel. Aussi, l'application

$$x = (x_k) \in \ell^\infty \mapsto \|x\|_\infty = \sup_{k \geq 0} |x_k|$$

est une norme sur ℓ^∞ .

On voit aisément que $\ell^1 \subset \ell^\infty$.

En fait, il existe toute une famille d'espaces de suites entre ℓ^1 et ℓ^∞ . Pour $1 \leq p < \infty$, on note par ℓ^p l'ensemble des suites complexes (x_k) telles que $\sum |x_k|^p < \infty$. Mais cette fois c'est un peu plus délicat de prouver que ℓ^p muni des opérations (1.3) et (1.4) est un espace vectoriel et l'application

$$x = (x_k) \in \ell^p \mapsto \|x\|_p = \left(\sum_{k \geq 0} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

est une norme sur ℓ^p . On aura besoin pour cela d'une inégalité de convexité.

Pour $1 < p < \infty$, on appelle exposant conjugué de p le nombre p^* défini par

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1.$$

C'est-à-dire

$$p^* = \frac{p}{p-1}.$$

Quand $p = 1$ (resp. $p = \infty$), on pose $p^* = \infty$ (resp. $p^* = 1$).

Lemme 1.1. (*Inégalité de Young*) Soient $1 < p < \infty$, $a > 0$ et $b > 0$. Alors, on a

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p^*}b^{p^*}.$$

Preuve. La fonction $\ln$ étant concave sur $]0, +\infty[$, on a

$$\ln \left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p^*}b^{p^*} \right) \geq \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{p^*} \ln b^{p^*} = \ln a + \ln b.$$

D'où

$$\ln \left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p^*}b^{p^*} \right) \geq \ln(ab).$$

Le résultat s'ensuit en appliquant à cette inégalité la fonction croissante $x \rightarrow e^x$. $\square$

Pour $1 < p < \infty$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on utilise, ci-dessous, la notation

$$\|x\|_{n,p} = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}.$$

Proposition 1.1. (*Inégalité de Hölder*) Soient $1 < p < \infty$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. Alors, on a

$$\sum_{j=1}^n |x_j| |y_j| \leq \|x\|_{n,p} \|y\|_{n,p^*}.$$

Preuve. Si $x = 0$ ou $y = 0$ le résultat est évident. On suppose donc que $x \neq 0$ et $y \neq 0$. On obtient, en appliquant l'inégalité de Young, avec $a = |x_j|/\|x\|_{n,p}$ et $b = |y_j|/\|y\|_{n,p^*}$,

$$\frac{|x_j||y_j|}{\|x\|_{n,p}\|y\|_{n,p^*}} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_j|^p}{\|x\|_{n,p}^p} + \frac{1}{p^*} \frac{|y_j|^{p^*}}{\|y\|_{n,p^*}^{p^*}}.$$

Il en résulte aisément que

$$\sum_{j=1}^n \frac{|x_j||y_j|}{\|x\|_{n,p}\|y\|_{n,p^*}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1,$$

ce qui donne l'inégalité recherchée. $\square$

Proposition 1.2. (*Inégalité de Minkowski*) Soient $1 < p < \infty$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. Alors, on a

$$\|x + y\|_{n,p} \leq \|x\|_{n,p} + \|y\|_{n,p}.$$

Preuve. On note d'abord que

$$|x_j + y_j|^p = |x_j + y_j|^{p-1} |x_j + y_j| \leq |x_j + y_j|^{p-1} |x_j| + |x_j + y_j|^{p-1} |y_j|.$$

Donc

$$\|x + y\|_{n,p}^p \leq \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{p-1} |x_j| + \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{p-1} |y_j|.$$

Mais, d'après l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{p-1} |x_j| &\leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{(p-1)p^*} \right)^{1/p^*} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} \\ &= \|x + y\|_{n,p}^{p/p^*} \|x\|_{n,p}, \\ \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{p-1} |y_j| &\leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{(p-1)p^*} \right)^{1/p^*} \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^{p^*} \right)^{1/p} \\ &= \|x + y\|_{n,p}^{p/p^*} \|y\|_{n,p}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $(p-1)p^* = p$. D'où

$$\|x + y\|_{n,p}^p \leq \|x + y\|_{n,p}^{p/p^*} \|x\|_{n,p} + \|x + y\|_{n,p}^{p/p^*} \|y\|_{n,p},$$

ce qui donne le résultat car $p(1 - 1/p^*) = 1$. $\square$

Théorème 1.1. (a) Pour $1 \leq p < \infty$, ℓ^p est un espace vectoriel pour les opérations (1.3) et (1.4) et $\|\cdot\|_p$ est une norme sur ℓ^p .

(b) Si $1 \leq p \leq q < \infty$ alors $\ell^p \subset \ell^q \subset \ell^\infty$, avec

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_q \leq \|x\|_p, \quad x \in \ell^p.$$

(c) Si $x = (x_k) \in \ell^p$ et $y = (y_k) \in \ell^{p^*}$ alors $xy = (x_k y_k) \in \ell^1$ et

$$\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_{p^*}.$$

Preuve. (a) Soient $x = (x_j), y = (y_j) \in \ell^p$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour tout entier positif k , d'après l'inégalité de Minkowski, on a

$$\sum_{j=1}^k |x_j + y_j|^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)^p.$$

Donc la série $\sum |x_j + y_j|^p$ est convergente et

$$\sum_{j \geq 1} |x_j + y_j|^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)^p.$$

C'est-à-dire

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

On a aussi $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p$. On en déduit aisément que ℓ^p est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_p$ est une norme sur ℓ^p .

(b) Soit $x = (x_k) \in \ell^p$. Si $p < q$, comme $|x_k|/\|x\|_p \leq 1$, pour chaque k , on a

$$\left(\frac{|x_k|}{\|x\|_p} \right)^{q-p} \leq 1,$$

ou de façon équivalente

$$\left(\frac{|x_k|}{\|x\|_p} \right)^q \leq \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_p} \right)^p.$$

Il en résulte, en prenant la somme sur k ,

$$\frac{\|x\|_q^q}{\|x\|_p^q} \leq \frac{\|x\|_p^p}{\|x\|_p^p} = 1.$$

Par suite $\ell^p \subset \ell^q$ et $\|x\|_q \leq \|x\|_p$. Le reste de la preuve est évidente.

(c) Pour $x \in \ell^p$ et $y \in \ell^{p^*}$, grâce l'inégalité de Hölder, on a, pour chaque k ,

$$\sum_{j=1}^k |x_j| |y_j| \leq \|x\|_p \|y\|_{p^*}.$$

On en déduit que la série $\sum |x_k| |y_k|$ est convergente et

$$\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_{p^*},$$

ce qui achève la preuve. $\square$

Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré, avec μ une mesure positive σ -finie. On désigne par $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ l'espace vectoriel fonctions positives intégrables par rapport à la mesure μ .

Pour $1 \leq p < \infty$ on désigne par $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{B}$ -mesurables f à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que $|\Re f|^p$ et $|\Im f|^p$ sont dans $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$.

Dans le reste de ce texte, sauf si on a besoin de spécifier l'espace mesuré ambiant, on notera tout simplement $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ par $\mathcal{L}^p$.

Pour $1 < p < \infty$, en procédant comme pour les ℓ^p (voir aussi Exercice 1.5), on montre que $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel (sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de Ω dans $\mathbb{K}$) et que l'application

$$\|\cdot\|_p : f \in \mathcal{L}^p \rightarrow \|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p$. Le cas $p = 1$ est évident. Mais $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme car $\|f\|_p = 0$ signifie seulement que $f = 0$ μ -pp. On considère alors le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^p$ défini par

$$\mathcal{L}_0 = \{f \in \mathcal{L}^p; f = 0 \mu - \text{pp}\}.$$

Il est alors intéressant de noter que

$$\|f\|_p = \|g\|_p \quad \text{si } f - g \in \mathcal{L}_0,$$

ce qui garantit que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur l'espace vectoriel quotient $L^p = \mathcal{L}^p / \mathcal{L}_0$ et que $\|f\|_p$ est invariante si on remplace f par une fonction qui lui est égale μ -pp, ce permet dans la pratique d'identifier une fonction avec sa classe d'équivalence.

On définit de même $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ l'ensemble des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ mesurables telles qu'il existe $C > 0$ pour lequel $|f(x)| \leq C$ μ -pp sur Ω . On pose alors

$$\|f\|_\infty = \inf\{C; |f(x)| \leq C \mu - \text{pp sur } \Omega\}.$$

On montre aisément que $\mathcal{L}^\infty$ est un espace vectoriel et que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $L^\infty = \mathcal{L}^\infty / \mathcal{L}_0$.

Exercices

1.1. Soit E un espace vectoriel semi-normé.

(a) Montrer que

$$\|x\| + \|y\| \leq 2 \max(\|x+y\|, \|x-y\|), \quad x, y \in E.$$

(b) Montrer que $F = \{x \in E; \|x\| = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E .

1.2. Pour $1 \leq p < \infty$, on définit sur ℓ^p l'application

$$N(x) = \sup \left\{ \left| \sum_{k \geq 1} x_k \overline{y_k} \right| ; y = (y_k) \in \ell^{p*}, \|y\|_{p*} = 1 \right\}, \quad x = (x_k) \in \ell^p.$$

Démontrer que $N = \|\cdot\|_p$.

1.3. Soient d une métrique sur un ensemble E et $\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante vérifiant $\rho(0) = 0$, $\rho(t) > 0$ si $t > 0$ et

$$\rho(t+s) \leq \rho(t) + \rho(s), \quad t, s \in \mathbb{R}_+.$$

$\rho(t) = \min(1, t)$, $t \geq 0$, et $\rho(t) = t/(1+t)$, $t \geq 0$, sont deux exemples de fonctions qui vérifient les conditions ci-dessus. De plus, ces deux fonctions sont continues sur $[0, +\infty[$.

On pose

$$d_\rho(x, y) = \rho(d(x, y)), \quad x, y \in E.$$

Démontrer que d_ρ est une distance sur E .

1.4. Soit E un espace vectoriel normé.

(a) Soient $C \subset E$ un ensemble convexe et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Démontrer, où $s \in \mathbb{R}$, que l'ensemble

$$C_s = \{x \in C; f(x) \leq s\}$$

est convexe.

(b) Soit $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ positivement homogène. Montrer que p est sous-additive si et seulement si l'ensemble

$$\mathcal{C}_p = \{x \in E; p(x) \leq 1\}$$

est convexe. En particulier, $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une semi-norme si $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$, pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$ et si $\{x \in E; p(x) \leq 1\}$ est convexe.

1.5. Soit $1 < p < \infty$ et on pose

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad f \in L^p.$$

(a) Démontrer l'inégalité de Hölder

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p*}, \quad f \in L^p, g \in L^{p*}.$$

(b) En déduire que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur E .

1.6. Soit E l'espace vectoriel des polynômes réels. On considère sur E les deux normes suivantes :

$$N_\infty(P) = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)| \quad \text{et} \quad N_1(P) = \int_0^1 |P(x)| dx, \quad P \in E.$$

Si $P(x) = \sum_{j=0}^k a_j x^j$, on pose

$$N(P) = \sum_{j=0}^k |a_j|.$$

(a) Montrer que N est une norme sur E et que $N_1 \leq N_\infty \leq N$.

(b) Vérifier que N_1 n'est équivalente ni à N_∞ , ni à N .

(c) (i) Soit (P_k) la suite de polynômes

$$P_k(x) = \sum_{j=0}^k \left(\frac{x^{2j+1}}{2j+1} - \frac{x^{2j+2}}{2j+2} \right), \quad k \geq 1.$$

Vérifier que, pour chaque k , P_k est croissant sur $[0, 1]$. En déduire que $\lim_k N_\infty(P_k) < \infty$.

(ii) N_∞ et N sont-elles équivalentes ?

1.7. On munit $E = C([0, 1], \mathbb{K})$ de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \quad f \in E.$$

Soient $f_1, \dots, f_p \in E$ et

$$N : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{R}_+ : x = (x_1, \dots, x_p) \mapsto \|x_1 f_1 + \dots + x_p f_p\|_\infty.$$

A quelle condition N définit-elle une norme sur $\mathbb{K}^p$?

1.8. (Distance ultramétrique) On considère sur un ensemble donné E une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui satisfait aux conditions suivantes :

(α) $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.

(β) $d(x, y) = d(y, x)$, $x, y \in E$.

(γ) $d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z))$, $x, y, z \in E$.

(a) (i) Montrer que d est une distance sur E . On appelle une telle application une distance ultramétrique.

(i) Soient $x, y, z \in E$. Vérifier que si $d(x, y) \neq d(y, z)$ alors

$$d(x, z) = \max(d(x, y), d(y, z)).$$

(b) Soit p un nombre premier fixé. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mu(n)$ l'exposant de p dans la décomposition de n en nombres premiers. Si $x = \pm n/m$, avec $n, m \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mu(x) = \mu(n) - \mu(m)$.

(i) Vérifier que $\mu(x)$ ne dépend pas de la décomposition de x sous la forme $x = \pm n/m$.

(ii) Démontrer que $\mu(xy) = \mu(x) + \mu(y)$, $x, y \in \mathbb{Q}$.

(iii) Montrer que $\mu(x+y) \geq \min(\mu(x), \mu(y))$, d'abord pour $x, y \in \mathbb{Z}$ et ensuite pour $x, y \in \mathbb{Q}$.

(iv) On définit sur $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ l'application d par $d(x, x) = 0, x \in \mathbb{Q}$, et

$$d(x, y) = p^{-\mu(x-y)}, \quad x, y \in \mathbb{Q}, \quad x \neq y.$$

Démontrer que d est une distance ultramétrique sur $\mathbb{Q}$.

1.9. Soit $E = \{f \in C^1([0, 1]; \mathbb{R}); f(0) = 0\}$. On définit sur E l'application

$$N_0(f) = \sup\{|f(x) + f'(x)|; x \in [0, 1]\}, \quad f \in E.$$

(a) Vérifier que N_0 est une norme sur E .

(b) Démontrer que N_0 est équivalente à la norme N_1 donnée par

$$N_1(f) = \sup\{|f(x)| + |f'(x)|; x \in [0, 1]\}, \quad f \in E.$$

Solutions des exercices

1.1 (a) Pour $x, y \in E$, on écrit

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}.$$

On en déduit que

$$\|x\| \leq \|x+y\|/2 + \|x-y\|/2.$$

En intervertissant les rôles de x et y , on a aussi

$$\|y\| \leq \|x+y\|/2 + \|x-y\|/2.$$

Par conséquence

$$\|x\| + \|y\| \leq \|x+y\| + \|x-y\| \leq 2 \max(\|x+y\|, \|x-y\|).$$

(b) Soient $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. D'où $\|x\| = \|y\| = 0$. Mais $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ et $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$. Par suite, $\|x+y\| = 0$ et $\|\lambda x\| = 0$, c'est-à-dire $x+y \in F$ et $\lambda x \in F$. Ceci prouve bien que F est un sous-espace vectoriel de E .

1.2 Soient $x = (x_k) \in \ell^p$ et $y = (y_k) \in \ell^{p^*}$ vérifiant $\|y\|_{p^*} = 1$. On obtient, en appliquant l'inégalité de Hölder,

$$\left| \sum_{k \geq 1} x_k \overline{y_k} \right| \leq \|x\|_p \|y\|_{p^*} = \|x\|_p.$$

Par conséquence $N(x) \leq \|x\|_p$.

On fixe maintenant $x \in \ell^p$, $x \neq 0$ et on pose $z_k = \bar{x}_k |x_k|^{p-2}$ si $x_k \neq 0$ et $z_k = 0$ sinon. En tenant compte de la relation $p^*(p-1) = p$, un simple calcul donne, où $z = (z_k)$,

$$\|z\|_{p^*}^{p^*} = \|x\|_p^p.$$

Donc $y = (y_k) = z/\|x\|_p^{p/p^*} \in \ell^{p^*}$ et $\|y\|_{p^*} = 1$. Il en résulte

$$N(x) \geq \left| \sum_{k \geq 1} x_k \bar{y}_k \right| = \frac{\|x\|_p^p}{\|x\|_p^{p/p^*}} = \|x\|_p.$$

1.3 On note d'abord que $d_p(x, y) = 0$ signifie $\rho(d(x, y)) = 0$ et ceci est vérifié si et seulement si $d(x, y) = 0$, donc si et seulement si $x = y$ car d est une distance. Par ailleurs, pour $x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned} d_p(x, y) &= \rho(d(x, y)) \leq \rho(d(x, y) + d(y, z)) \\ &\leq \rho(d(x, y)) + \rho(d(y, z)) = d_p(x, y) + d_p(y, z). \end{aligned}$$

Donc d_p est bien une métrique sur E car on a trivialement $d_p(x, y) = d_p(y, x)$, pour tous $x, y \in E$.

1.4 (a) Soient $x, y \in C_s$ et $\lambda \in [0, 1]$. On a alors

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq \lambda s + (1 - \lambda)s = s.$$

D'où $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C_s$.

(b) Quand p est sous-additive, on a vu plus haut que p est convexe. Donc $\mathcal{C}_p$ est convexe par (a). Inversement, on suppose que $\mathcal{C}_p$ est convexe. Soient $x, y \in E$ et on se donne $\alpha > p(x)$ et $\beta > p(y)$. Donc $\tilde{x} = \alpha^{-1}x$ et $\tilde{y} = \beta^{-1}y$ sont dans $\mathcal{C}_p$. Grâce à la convexité de $\mathcal{C}_p$, on a

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \tilde{x} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \tilde{y} = \frac{x + y}{\alpha + \beta} \in \mathcal{C}_p.$$

Puisque p est positivement homogène, il s'ensuit que

$$\frac{p(x + y)}{\alpha + \beta} \leq 1,$$

ou de façon équivalente

$$p(x + y) \leq \alpha + \beta.$$

Il suffit de faire tendre α vers $p(x)$ et β vers $p(y)$ pour avoir $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

1.5 (a) On suppose que f et g sont non identiquement nulles car sinon la résultat est immédiat. On applique alors l'inégalité de Young, avec $a = |f(x)|/\|f\|_p$ et $b = |g(x)|/\|g\|_{p^*}$, pour tout $x \in \Omega$ tel que $|f(x)| < \infty$ et $|g(x)| < \infty$. On obtient

$$\frac{|f(x)| |g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_{p^*}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p^*} \frac{|g(x)|^{p^*}}{\|g\|_{p^*}^{p^*}}.$$

En intégrant sur Ω et en tenant compte du fait $|f(x)| < \infty$ et $|g(x)| < \infty$ μ -pp sur Ω , il vient

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_{p^*}} \leq \frac{1}{p} \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p^*} \frac{\|g\|_{p^*}^{p^*}}{\|g\|_{p^*}^{p^*}} = 1.$$

D'où le résultat.

(b) Il suffira de montrer $\|\cdot\|_p$ est sous-additive. Les deux autres propriétés sont évidentes. Pour $f, g \in L^p$, on a, comme dans la preuve de l'inégalité de Minkowski,

$$|f(x) + g(x)|^p \leq |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| + |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)|, \quad \mu\text{-pp}.$$

Après intégration et application de l'inégalité de Hölder, à chacun des deux termes du membre de l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\|f + g\|_p^p \leq \| |f(\cdot) + g(\cdot)|^{p-1} \|_{p^*} \|f\|_p + \| |f(\cdot) + g(\cdot)|^{p-1} \|_{p^*} \|g\|_p$$

et donc

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f + g\|_p^{p/p^*} \|f\|_p + \|f + g\|_p^{p/p^*} \|g\|_p.$$

On en déduit, comme on l'a fait dans la preuve l'inégalité de Minkowski,

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

ce qui termine la preuve.

1.6 (a) Il est évident que N définit une norme sur E et que $N_1 \leq N_\infty$. D'autre part, si $P \in E$ alors

$$|P(x)| = \left| \sum_{j=0}^k a_j x^j \right| \leq \sum_{j=0}^k |a_j|, \quad x \in [0, 1].$$

D'où $N_\infty \leq N$.

(b) Si $P_k(x) = kx^{k-1}$, $k \geq 1$, un simple calcul donne

$$N_1(P_k) = 1 \quad \text{et} \quad N_\infty(P_k) = N(P_k) = k.$$

Donc N_1 ne peut pas être équivalente ni à N_∞ , ni à N .

(c) (i) On a

$$P'_k(x) = \sum_{j=0}^k (x^{2j} - x^{2j+1}) \geq 0, \quad x \in [0, 1].$$

Donc P_k est croissant sur $[0, 1]$. Comme $P_k(0) = 0$, on a donc

$$N_\infty(P_k) = P_k(1) = \sum_{j=0}^k \left(\frac{1}{2j+1} - \frac{1}{2j+2} \right) = \sum_{j=1}^{2k+2} \frac{(-1)^{j+1}}{j}. \quad (1.5)$$

(ii) D'après (1.5),

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} N_\infty(P_k) = \sum_{j \geq 1} \frac{(-1)^{j+1}}{j} < \infty.$$

D'autre part,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} N(P_k) = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} = +\infty.$$

On en déduit que N_∞ et N ne sont pas équivalentes.

1.7 Clairement N est une semi-norme. Par ailleurs, $\|\cdot\|_\infty$ étant elle-même une norme, on a $N(x) = 0$ si et seulement si $x_1 f_1 + \dots + x_p f_p = 0$. Donc pour que $N(x) = 0$ entraîne $x = 0$ il faut et il suffit que $(f_1, \dots, f_p)$ soit une famille libre.

1.8 (a) (i) Il n'y a que l'inégalité triangulaire à vérifier. Soient $x, y, z \in E$. On a trivialement

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, y) + d(y, z), \\ d(y, z) &\leq d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

D'où, d'après (γ) ,

$$d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z)) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

(ii) On suppose par exemple que $d(x, y) < d(y, z)$. Dans ce cas, on a

$$d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z)) = d(y, z).$$

On a aussi

$$d(y, z) \leq \max(d(x, y), d(x, z)).$$

Par ailleurs, si on avait $d(x, y) \geq d(x, z)$ alors on aurait $d(y, z) \leq \max(d(x, y), d(x, z)) = d(x, y)$, ce qui est impossible. Ainsi

$$d(x, z) = d(y, z) = \max(d(x, y), d(y, z)).$$

Dans le cas $d(y, z) < d(x, y)$ on obtient, en intervertissant les rôles de x et z ,

$$d(x, z) = d(x, y) = \max(d(x, z), d(y, x)).$$

Ceci termine la preuve puisque les deux dernières identités sont les mêmes.

(b) (i) Comme $\mu(-x) = \mu(x)$, on peut supposer que $x > 0$. Si $x = n/m = n'/m'$, avec $n, m, n', m' \in \mathbb{N}^*$, et si $n = p^\alpha n_1$, $m = p^\beta m_1$, $n' = p^{\alpha'} n'_1$ et $m' = p^{\beta'} m'_1$. Puisque $nm' = n'm$, on a la relation $\alpha + \beta' = \alpha' + \beta$, ce qui donne

$$\mu(x) = \alpha - \beta = \alpha' - \beta'.$$

(ii) On écrit $x = p^\alpha x_1$ et $y = p^\beta y_1$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, et on suppose que ni les numérateurs, ni les dénominateurs de x_1 et y_1 ne sont divisibles par p . Dans ce cas, on a $xy = p^{\alpha+\beta} x_1 y_1$. On en déduit que $\mu(x+y) = \alpha + \beta = \mu(x) + \mu(y)$.

(iii) Soient $x = p^\alpha x_1 \in \mathbb{Z}$ et $y = p^\beta y_1 \in \mathbb{Z}$. On suppose par exemple que $\alpha \leq \beta$. On peut alors écrire

$$x + y = p^\alpha (x_1 + p^{\beta-\alpha} y_1).$$

Puisque $x_1 + p^{\beta-\alpha}y_1 \in \mathbb{Z}$, il vient

$$\mu(x+y) \geq \alpha = \min(\mu(x), \mu(y)).$$

On suppose à présent que $x = n/m \in \mathbb{Q}$ et $y = n'/m' \in \mathbb{Q}$. On a alors $x+y = (nm' + n'm)/(mm')$. D'où

$$\mu(x+y) = \mu(nm' + n'm) - \mu(mm').$$

Mais, d'après le cas de la somme de deux entiers, on a

$$\mu(nm' + n'm) \geq \min(\mu(nm'), \mu(n'm)) = \min(\mu(n) + \mu(m'), \mu(n') + \mu(m)).$$

Par suite

$$\begin{aligned} \mu(x+y) &\geq \min(\mu(n) + \mu(m'), \mu(n') + \mu(m)) - \mu(m) - \mu(m') \\ &= \min(\mu(n) - \mu(m), \mu(n') - \mu(m')) = \min(\mu(x), \mu(y)). \end{aligned}$$

(iv) Il est évident que d satisfait à (α) et (β) . Il reste donc à vérifier (γ) . Pour $x, y, z \in \mathbb{Q}$, on a

$$d(x, z) = p^{-\mu(x-z)} = p^{-\mu((x-y)+(y-z))},$$

ce qui, combiné avec (iii), implique

$$d(x, z) \leq p^{-\min(\mu(x-y), \mu(y-z))} \leq \max(p^{-\mu(x-y)}, p^{-\mu(y-z)}).$$

Autrement dit, on a

$$d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z)).$$

1.9 (a) Il est facile de voir que N_0 est une semi-norme. Il reste à montrer que $N_0(f) = 0$, $f \in E$, entraîne $f = 0$. Ici $f \in E$ vérifiant $N_0(f) = 0$ signifie que

$$f'(x) + f(x) = 0, \quad x \in [0, 1] \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

La solution de l'équation différentielle $f' + f = 0$ est de la forme $f(x) = \lambda e^{-x}$. Donc $\lambda = 0$ si f doit satisfaire $f(0) = 0$. Ainsi, $f = 0$.

(b) On a trivialement $N_0(f) \leq N_1(f)$, pour tout $f \in E$. Inversement, soit $f \in E$. Si $|f|$ atteint son maximum en $x_0 \in]0, 1[$ alors $f'(x_0) = 0$. Dans ce cas

$$\max\{|f(x)|; x \in [0, 1]\} = |f(x_0)| = |f(x_0) + f'(x_0)| \leq N_0(f).$$

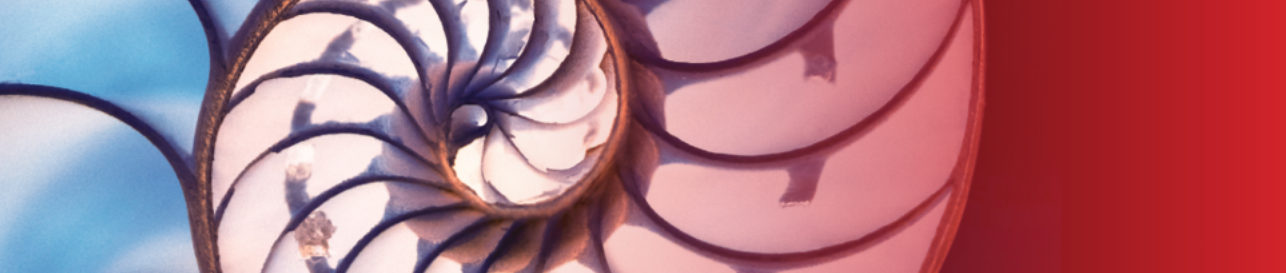
Par ailleurs, comme

$$|f'(x)| \leq |f(x)| + |f(x) + f'(x)|, \quad x \in [0, 1],$$

on conclut $N_1(f) \leq 3N_0(f)$. Si $|f|$ atteint son maximum en $x = 1$ alors f et f' sont de même signe en $x = 1$. On en déduit que

$$\max\{|f(x)|; x \in [0, 1]\} = |f(1)| \leq |f(1) + f'(1)| \leq N_0(f),$$

et on complète la preuve comme pour le cas précédent. Finalement, si $|f|$ atteint son maximum en 0 alors $f = 0$ et le résultat est trivial.



Analyse fonctionnelle

Ce manuel couvre à la fois le programme d'analyse enseigné en L3 et le programme de l'analyse fonctionnelle enseignée en M1 comme en première année des écoles d'ingénieurs.

Pour la partie accessible dès la L3, les prérequis sont minimaux : maîtrise des éléments d'analyse acquis durant les deux premières années de licence, avec une bonne connaissance des corps des réels et des complexes ainsi que de la théorie des ensembles. Chaque chapitre accueille une série d'exercices intégralement corrigés. De nombreux exemples d'espaces vectoriels topologiques localement convexes viennent enrichir l'ensemble.

1. Exemples d'espaces normés
 2. Espaces métriques complets
 3. Éléments de topologie
 4. Valeurs d'adhérence
 5. Applications continues
 6. Ensembles compacts
 7. Continuité et compacité
 8. Topologie produit et topologie quotient
 9. Topologies initiales et topologies finales
 10. Espaces connexes
 11. Applications linéaires continues
 12. Théorèmes associés aux fonctions continues
 13. Théorèmes fondamentaux relatifs aux espaces de Banach
 14. Espaces séparables et espaces réflexifs
 15. Topologies faibles
 16. Espaces de Hilbert
 17. Exemples d'espaces vectoriels topologiques localement convexes
- Bibliographie – Index

LES PLUS

- **Toutes les démonstrations sont rédigées de façon claire et détaillée**
- **Les exercices et problèmes sont intégralement corrigés**
- **Une introduction aux espaces vectoriels topologiques localement convexes**

Mourad Choulli est Professeur des universités. Il est spécialisé dans l'étude des équations aux dérivées partielles, spécialement dans l'analyse mathématique des problèmes inverses. Il a une longue expérience d'enseignement en licence et master de mathématiques.

ISBN : 978-2-8073-3492-2



deboeck
SUPÉRIEUR

www.deboecksuperieur.com