

Jean-Étienne ROMBALDI

Agrégation
externe
Mathématiques

Mathématiques pour l'agrégation externe

Analyse



ÉLÉMENTS DE COURS

- Applications transversales
- Plus de 200 exercices corrigés

Jean-Étienne Rombaldi

Mathématiques
pour
l'agrégation externe

Analyse

Chez le même éditeur [extrait du catalogue]

Agrégation de mathématiques :

APPEL W., *Mathématiques pour l'agrégation externe. Probabilités*

ROMBALDI J.-É., *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*

ROMBALDI J.-É., *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie – 2^e édition*

ROMBALDI J.-É., *Exercices et problèmes corrigés pour l'agrégation de mathématiques*

ROMBALDI J.-É., *Leçons d'oral pour l'agrégation de mathématiques. Première épreuve : les exposés*

ROMBALDI J.-É., *Leçons d'oral pour l'agrégation de mathématiques. Seconde épreuve : les exercices*

Capes de mathématiques :

DARRACQ M.-C. & ROMBALDI J.-É., *Mathématiques pour le Capes. Analyse*

DARRACQ M.-C. & ROMBALDI J.-É., *Mathématiques pour le Capes. Algèbre et géométrie*

DARRACQ M.-C. & ROMBALDI J.-É., *Mathématiques pour le Capes. Probabilités*

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web :

www.deboecksuperieur.com

En couverture : Coupe d'un nautille © Bereta/Getty Images

Maquette et mise en page de l'auteur

Maquette de couverture : Primo&Primo

Couverture : SCM, Toulouse

Dépôt légal :

Bibliothèque royale de Belgique : 2024/13647/076

Bibliothèque nationale, Paris : septembre 2024

ISBN : 978-2-8073-6082-2

Tous droits réservés pour tous pays.

Il est interdit, sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, de reproduire (notamment par photocopie) partiellement ou totalement le présent ouvrage, de le stocker dans une banque de données ou de le communiquer au public, sous quelque forme ou de quelque manière que ce soit.

© De Boeck Supérieur SA, 2024 – Rue du Bosquet 7, B1348 Louvain-la-Neuve
De Boeck Supérieur – 5 allée de la 2^e DB, 75015 Paris

Table des matières

	Page
Avant-propos	vii
1 Théorie de la mesure	1
1.1 Préliminaires sur les ensembles	1
1.2 Tribus	5
1.3 Tribu de Borel sur un espace métrique	10
1.4 Mesures	12
1.5 Mesures sur un espace métrique	17
1.6 Mesures extérieures	21
1.7 Un théorème de prolongement	27
1.8 La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}^n$	31
1.9 Propriétés vraies presque partout	43
1.10 Exercices	44
2 Fonctions mesurables et intégrables	57
2.1 Fonctions mesurables entre espaces mesurables	57
2.2 Fonctions mesurables à valeurs réelles	59
2.3 Intégrabilité par rapport à une mesure des fonctions positives	64
2.4 Théorème de Beppo-Levi et applications	68
2.5 Fonctions numériques intégrables par rapport à une mesure	75
2.6 Théorème de convergence dominée	83
2.7 Intégrales de Riemann et de Lebesgue sur $\mathbb{R}$	92
2.8 Exercices	98
3 Intégration sur un espace produit	119
3.1 Théorèmes de Fubini pour les fonctions continues de deux variables réelles	119
3.2 Une version simple du théorème de Fubini	127
3.3 Classes monotones	128
3.4 Tribus et mesures produits	131
3.5 Théorèmes de Tonelli et de Fubini	139
3.6 Formules d'intégration par parties	141
3.7 Exercices	143

4	Espaces $\mathbb{L}^p$	151
4.1	Espaces $\mathcal{L}^p$ pour $1 \leq p \leq +\infty$	151
4.2	Inégalités de Hölder et de Minkowski	155
4.3	Espaces $\mathbb{L}^p$	159
4.4	Théorèmes de densité dans $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \lambda_n)$ pour $p \in [1, +\infty[$	162
4.5	Produit de convolution	167
4.6	Suites régularisantes	175
4.7	Construction de fonctions plateau	180
4.8	Transformation de Fourier	183
4.9	Transformée de Fourier des fonctions à décroissance rapide	192
4.10	Formule sommatoire de Poisson	193
4.11	Exercices	200
5	Espaces de Hilbert	223
5.1	Produit scalaire	223
5.2	Orthogonalité, bases hilbertiennes	227
5.3	Le théorème de projection orthogonale	239
5.4	Polynômes orthogonaux	244
5.5	Dual topologique d'un espace de Hilbert	250
5.6	Convergence faible	256
5.7	Opérateurs de Hilbert-Schmidt	258
5.8	Exercices	264
6	Fonctions presque périodiques	281
6.1	Polynômes trigonométriques généralisés	282
6.2	Fonctions presque périodiques	286
6.3	Exercices	301
7	Fonctions différentiables	309
7.1	Différentielle	310
7.2	Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	317
7.3	Dérivée directionnelles, dérivées partielles	324
7.4	Fonctions d'une variable réelle continues et nulle part dérivables	330
7.5	Exercices	339
8	Différentielles d'ordre supérieur	363
8.1	Différentielle d'ordre deux	363
8.2	Formules de Taylor à l'ordre deux	369
8.3	Fonctions convexes	371
8.4	Différentielles d'ordre $p \geq 2$	373
8.5	Différentiabilité et problèmes d'extrema	378
8.6	Exercices	383
9	Inversion locale, fonctions implicites	389
9.1	Difféomorphismes	389
9.2	Théorème d'inversion locale	393
9.3	Théorème des fonctions implicites	400
9.4	Extrema liés	404

9.5 Exercices	406
10 Fonctions holomorphes	419
10.1 Dérivation complexe	419
10.2 Les conditions de Cauchy-Riemann	423
10.3 Déterminations du logarithme complexe	426
10.4 Intégrales curvilignes	428
10.5 Indice par rapport à un lacet	435
10.6 Primitives des fonctions holomorphes	439
10.7 Théorème des résidus pour les fonctions rationnelles	450
10.8 Exercices	452
11 Fonctions analytiques	467
11.1 Fonctions développables en série entière	467
11.2 Transformée de Fourier des fonctions rationnelles	478
11.3 Prolongement analytique et zéros isolés	481
11.4 Le principe du maximum	483
11.5 Exercices	489
12 Suites de fonctions holomorphes	501
12.1 Suites et séries de fonctions holomorphes	501
12.2 Produits infinis de fonctions holomorphes	504
12.3 Fonctions holomorphes définies par une intégrale	509
12.4 Exercices	513
13 Homotopie	521
13.1 Chemins et lacets homotopes	521
13.2 Le théorème de Cauchy	524
13.3 Développement en série de Laurent sur une couronne	531
13.4 Exercices	534
14 Fonctions méromorphes	541
14.1 Singularités isolées d'une fonction holomorphe	541
14.2 Fonctions méromorphes	547
14.3 Théorème des résidus	548
14.4 Exercices	554
15 Transformation de Laplace	561
15.1 Abscisse de convergence	561
15.2 Propriétés de la transformée de Laplace	565
15.3 Transformée de Laplace sur l'axe réel	569
15.4 Transformée de Laplace sur le bord du domaine de convergence	573
15.5 Transformation de Laplace et produit de convolution	576
15.6 Exercices	578

16 Fonctions usuelles et spéciales	595
16.1 Fonctions exponentielles	595
16.2 Fonctions hyperboliques et trigonométriques	602
16.3 L'exponentielle complexe et le nombre π	602
16.4 Le logarithme complexe	608
16.5 L'exponentielle matricielle	612
16.6 Fonctions eulériennes gamma et bêta	614
16.7 Fonction zêta de Riemann	628
16.8 Fonction θ de Jacobi	637
16.9 Exercices	641
 Références	 655
 Index	 657

Avant-propos

Ce cours fait suite à celui destiné aux candidats à l'agrégation interne et externe de mathématiques, à savoir [36], qui est basé sur quelques parties communes des programmes d'analyse de ces concours. Avec ce deuxième volume, on développe quelques compléments à [36] et des parties du programme de l'agrégation externe non exigibles pour l'agrégation interne, en particulier les notions relatives à la théorie de la mesure et à l'intégrale de Lebesgue, aux fonctions holomorphes et aux espaces de Hilbert.

Le niveau de connaissance suffisant pour la lecture de cet ouvrage est celui d'une licence de mathématiques. Les notions de base sur les espaces normés, les espaces métriques, les suites et séries à valeurs dans un espace normé, les suites et séries de fonctions, les séries entières et de Fourier sont supposées acquises. La théorie de l'intégration au sens de Riemann sur un segment ou sur un intervalle avec la notion d'intégrale impropre est également supposée connue. On pourra se reporter à [36] pour ces notions.

Ce cours est l'occasion de revoir les points importants précédemment cités du programme d'analyse de l'agrégation externe et les quelques 200 exercices proposés, tous corrigés en détail, peuvent constituer un bon entraînement pour les épreuves écrites et certains d'entre eux peuvent être utilisés pour des développements dans les leçons d'oral.

Avec les 4 premiers chapitres de ce livre, on expose les notions de base sur la théorie de la mesure et de l'intégration au sens de Lebesgue.

Le chapitre 5 est consacré à une introduction aux espaces de Hilbert réels ou complexes. Avec le chapitre qui suit, on s'intéresse à titre d'application aux fonctions presque périodiques de Bohr.

Les trois chapitres qui suivent sont consacrés au calcul différentiel sur un espace de Banach.

Vient ensuite l'étude des fonctions holomorphes et méromorphes avec le théorème des résidus.

Les derniers chapitres sont consacrés à quelques applications des notions précédentes. On s'y intéresse à la transformation de Laplace, à l'étude de quelques fonctions usuelles comme les fonctions exponentielle et logarithme sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou sur une algèbre de Banach, aux fonctions eulériennes gamma et bêta ainsi qu'à la fonction zêta de Riemann.

L'étude de la théorie des probabilités qui est une suite naturelle des chapitres consacrés à la théorie de la mesure est faite par Walter Appel dans [1].

Comme dans le livre de Walter Appel consacré aux probabilités pour l'agrégation externe publié dans la même collection par Deboeck Supérieur, on pourra exploiter dans cet ouvrage une vingtaine de « Thèmes ». Il ne s'agit pas de développements prêts à l'emploi, mais plutôt de suggestions qu'il est possible d'intégrer à certaines leçons d'oral. La liste de ces thèmes figure à la page suivante.

Pour conclure, je tiens à remercier les éditions Deboeck et en particulier Alain Luguët pour la confiance qu'ils m'accordent en publiant ce travail. Un grand merci à Walter Appel qui a corrigé de nombreuses coquilles et réalisé quelques figures d'illustrations.

Liste de quelques thèmes

1. L'équation fonctionnelle de Cauchy $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour f mesurable sur $\mathbb{R}$ (exercice 2.10, page 106).
2. Densité de l'ensemble des fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ dans l'espace normé $(\mathbb{L}^p, \|\cdot\|_p)$ (théorème 4.9, page 164).
3. Approximations de l'unité dans $\mathcal{L}^p$ pour $p \in [1, +\infty[$ et densité de l'ensemble $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{L}^p$ (théorème 4.19, page 176 et corollaire 4.3, page 179).
4. Construction de fonctions plateau : si K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ qui contient K , il existe alors $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ à support compact telle $\varphi(x) = 1$ pour tout $x \in K$ et $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$ (théorème 4.21, page 182).
5. Formule d'inversion de Fourier : si $f \in \mathcal{L}^1$ est telle que $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1$, on a alors $f(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \widehat{\widehat{f}}(-t)$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}^n$ (théorème 4.24, page 191).
6. Formules sommatoires de Poisson théorème 4.27, page 197 et théorème 4.28, page 198 desquelles on déduit une formule d'inversion de Fourier dans un cas particulier (théorème 4.29, page 199 et exercice 4.17, page 220) ainsi qu'une équation fonctionnelle pour la fonction θ de Jacobi (corollaire 16.1, page 638).
7. Inégalité de Hardy : pour tout réel $p \in]1, \infty[$ et toute fonction $f \in \mathcal{L}^p$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{x^p} \left| \int_0^x f(t) dt \right|^p dx \leqslant q^p \int_{\mathbb{R}_+^*} |f(x)|^p dx$$

(exercice 4.7, page 205).

8. Existence de base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(]a, b[, \pi)$ où $\pi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une fonction poids pour laquelle il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\int_a^b e^{\alpha|t|} \pi(t) dt < +\infty$ (théorème 5.18, page 248).
9. Applications du théorème de représentation de Riesz (théorème 5.19, page 250) : le théorème de Hahn-Banach sur un espace de Hilbert (théorème 5.20, page 252), de Stampachia (théorème 5.21, page 254) et de Lax-Milgram (théorème 5.6, page 255).
10. Opérateurs de Hilbert-Schmidt (paragraphe 5.7, page 258).
11. Caractérisation des normes sur un espace vectoriel normé complexe déduite d'un produit scalaire (exercice 5.5, page 266).
12. Fonctions presque périodiques (chapitre 6, page 281). Ce thème permet de revoir les notions de compacité, précompacité et relative compacité ; de continuité et uniforme continuité ; de fonctions périodiques et polynômes trigonométriques ; de projection orthogonale dans le cadre hermitien.
13. Fonctions d'une variable réelle continues et nulle part dérivables (paragraphe 7.4, page 330).
14. Fonctions quasi-différentiables sur un espace de Banach (exercice 7.5, page 344).

15. Différentielle de l'exponentielle sur une algèbre de Banach (exercice 7.12, page 356).
16. Caractérisation des isométries affines sur un espace de Hilbert (exercices 7.11, page 354 et 8.5, page 387).
17. Lemme de Morse (exercices 8.4, page 385 et 9.4, page 407).
18. Le théorème d'Hadamard-Levy dans un cas particulier (théorème 9.7, page 399).
19. Transformée de Fourier des fonctions rationnelles en utilisant la formule de Cauchy (paragraphe 11.2, page 478).
20. Bi-holomorphismes du disque unité complexe (théorème 11.14, page 487) et bi-holomorphismes du demi-plan de Poincaré (corollaire 11.5, page 488).
21. Formule de Lie-Trotter-Kato pour l'exponentielle sur une algèbre de Banach (théorème 16.4, page 599).
22. Théorème de Weilandt donnant une caractérisation de la fonction Gamma complexe par son équation fonctionnelle et une condition de majoration (théorème 16.15, page 623).

1 Théorie de la mesure

Pour ce chapitre, X est un ensemble non vide et $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble de toutes les parties de X .

1.1 Préliminaires sur les ensembles

Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de X , on note respectivement :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k \text{ et } \liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k$$

l'ensemble des $x \in X$ qui appartiennent à une infinité de A_n et l'ensemble des $x \in X$ qui appartiennent à tous les A_n sauf au plus un nombre fini d'entre eux.

On a $\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n$ et :

$$X \setminus \limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = X \setminus \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{k \geq n} (X \setminus A_k) \right) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} (X \setminus A_n)$$

$$X \setminus \liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n = X \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k \right) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} (X \setminus A_n)$$

Dans le cas où la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (*i. e.* telle que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), on a $\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et dans le cas où

cette suite est décroissante (*i. e.* telle que $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), on a $\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

À toute partie A de X , on associe sa *fonction indicatrice* (ou fonction caractéristique) $\mathbf{1}_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ définie par $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

Les fonctions indicatrices permettent de transformer des opérations ensemblistes en opérations algébriques.

Avec le théorème qui suit, on résume les principales propriétés des fonctions indicatrices où $\{0, 1\}^X$ désigne l'ensemble des applications de X dans $\{0, 1\}$.

Théorème 1.1.

L'application $\chi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \{0, 1\}^X$ qui associe à une partie A de X sa fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ est bijective d'inverse

$$\begin{aligned} \chi^{-1} : \{0, 1\}^X &\rightarrow \mathcal{P}(X) \\ \gamma &\mapsto \gamma^{-1}\{1\} \end{aligned}$$

Pour toutes parties A, B de X , on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{X \setminus A} &= 1 - \mathbf{1}_A, \quad \mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = \min(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) \\ \mathbf{1}_{A \cup B} &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = \max(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) \\ \mathbf{1}_{B \setminus A} &= \mathbf{1}_B (1 - \mathbf{1}_A) = \max(\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A, 0), \quad \mathbf{1}_{A \Delta B} = |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B| \end{aligned}$$

où $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ est la différence symétrique de A et B . Pour toute suite finie $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ de parties de X , on a :

$$\mathbf{1}_{\bigcap_{k=1}^n A_k} = \prod_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k} = \min_{1 \leq k \leq n} \mathbf{1}_{A_k}, \quad \mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \max_{1 \leq k \leq n} \mathbf{1}_{A_k}$$

Démonstration Si A, B dans $\mathcal{P}(X)$ sont tels que $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$, on a alors pour tout $x \in X$:

$$(x \in A) \Leftrightarrow (\mathbf{1}_A(x) = 1) \Leftrightarrow (\mathbf{1}_B(x) = 1) \Leftrightarrow (x \in B)$$

soit $A = B$. L'application χ est donc injective. Pour toute application $\gamma \in \{0, 1\}^X$, en notant $A = \gamma^{-1}\{1\}$, on a $\mathbf{1}_A = \gamma$, donc χ est surjective. En conclusion, χ est bijective d'inverse :

$$\begin{aligned} \chi^{-1} : \{0, 1\}^X &\rightarrow \mathcal{P}(X) \\ \gamma &\mapsto \gamma^{-1}\{1\} \end{aligned}$$

En utilisant la partition $X = A \cup (X \setminus A)$, on déduit que pour tout $x \in X$, on a $\mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_{X \setminus A}(x) = 1$, donc $\mathbf{1}_{X \setminus A} = 1 - \mathbf{1}_A$.

Pour tout $x \in X$, on a :

$$\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \text{ et } x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin A \text{ ou } x \notin B \end{cases} = \mathbf{1}_A(x) \mathbf{1}_B(x) = \min(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x))$$

donc $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = \min(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$.

De ces deux formules, on déduit toutes les autres.

Avec $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$, on déduit que $\mathbf{1}_{X \setminus (A \cup B)} = \mathbf{1}_{X \setminus A} \mathbf{1}_{X \setminus B}$, soit $1 - \mathbf{1}_{A \cup B} = (1 - \mathbf{1}_A)(1 - \mathbf{1}_B)$ ou encore :

$$\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = \max(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$$

Avec $B \setminus A = (X \setminus A) \cap B$, on déduit que :

$$\mathbf{1}_{B \setminus A} = \mathbf{1}_B (1 - \mathbf{1}_A) = \max(\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A, 0)$$

Avec $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, on déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A\Delta B} &= \mathbf{1}_{A \cup B} (1 - \mathbf{1}_{A \cap B}) = (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B) (1 - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B) \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = (\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)^2 = |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B| \end{aligned}$$

Pour tout $x \in X$, on a :

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{1}_{\bigcap_{k=1}^n A_k}(x) = 1 \right) &\Leftrightarrow \left(x \in \bigcap_{k=1}^n A_k \right) \Leftrightarrow (\forall k \in \{1, \dots, n\}, x \in A_k) \\ &\Leftrightarrow (\forall k \in \{1, \dots, n\}, \mathbf{1}_{A_k}(x) = 1) \\ &\Leftrightarrow \left(\prod_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}(x) = 1 \right) \Leftrightarrow \left(\min_{1 \leq k \leq n} \mathbf{1}_{A_k}(x) = 1 \right) \end{aligned}$$

donc $\mathbf{1}_{\bigcap_{k=1}^n A_k} = \prod_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k} = \min_{1 \leq k \leq n} \mathbf{1}_{A_k}$ puisque ces fonctions sont à valeurs dans $\{0, 1\}$.

Avec $X \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcap_{k=1}^n (X \setminus A_k)$, on déduit que :

$$1 - \mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \min_{1 \leq k \leq n} (1 - \mathbf{1}_{A_k}) = 1 - \max_{1 \leq k \leq n} \mathbf{1}_{A_k}(x)$$

soit $\mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \max_{1 \leq k \leq n} \mathbf{1}_{A_k}$. ■

Le résultat qui suit sur les fonctions symétriques élémentaires peut être utilisé pour généraliser la formule $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}^*$ les *fonctions symétriques élémentaires* sont les fonctions $\sigma_{n,k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, où l'entier k est compris entre 0 et n , définies pour tout $\alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ par $\sigma_{n,0}(\alpha) = 1$ et $\sigma_{n,k}(\alpha) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_k}$ pour $1 \leq k \leq n$. Ces expressions sont qualifiées de « symétriques », car pour toute permutation τ de $\{1, \dots, n\}$, on a $\sigma_{n,k}(\alpha_{\tau(1)}, \dots, \alpha_{\tau(n)}) = \sigma_{n,k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Lemme 1.1 Si $P(X) = \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$ est un polynôme scindé unitaire de degré

$n \geq 1$ dans $\mathbb{R}[X]$, on a alors $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^{n-k}$ où $a_k = (-1)^k \sigma_{n,k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ pour tout entier k compris entre 0 et n .

Démonstration On procède par récurrence sur $n = \deg(P) \geq 1$.

Pour $n = 1$, on a $P(X) = X - \alpha_1 = a_0 X + a_1$ avec $a_0 = 1 = \sigma_{1,0}(\alpha_1)$ et $a_1 = -\alpha_1 = -\sigma_{1,1}(\alpha_1)$.

Supposons le résultat acquis pour les polynômes scindés unitaires de degré $n - 1 \geq 1$ et soit $P(X) = \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$ un polynôme scindé unitaire de degré n . En notant $\alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha' = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$, on a :

$$\sigma_{n,0}(\alpha) = \sigma_{n-1,0}(\alpha') = 1, \quad \sigma_{n,n}(\alpha) = \prod_{i=1}^n \alpha_i = \alpha_n \sigma_{n-1,n-1}(\alpha')$$

et pour k entier compris entre 1 et $n - 1$:

$$\begin{aligned} \sigma_{n,k}(\alpha) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n-1} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k} + \alpha_n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n-1} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_{k-1}} \\ &= \sigma_{n-1,k}(\alpha') + \alpha_n \sigma_{n-1,k-1}(\alpha') \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $\prod_{k=1}^{n-1} (X - \alpha_k) = \sum_{k=0}^{n-1} a'_k X^{n-1-k}$ avec $a'_k = (-1)^k \sigma_{n-1,k}(\alpha')$ pour $0 \leq k \leq n - 1$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} P(X) &= (X - \alpha_n) \prod_{k=1}^{n-1} (X - \alpha_k) = (X - \alpha_n) \sum_{k=0}^{n-1} a'_k X^{n-1-k} \\ &= (X - \alpha_n) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sigma_{n-1,k}(\alpha') X^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sigma_{n-1,k}(\alpha') X^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \alpha_n \sigma_{n-1,k}(\alpha') X^{n-(k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sigma_{n-1,k}(\alpha') X^{n-k} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \alpha_n \sigma_{n-1,k-1}(\alpha') X^{n-k} \\ &= X^n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (\sigma_{n-1,k}(\alpha') + \alpha_n \sigma_{n-1,k-1}(\alpha')) X^{n-k} + (-1)^n \alpha_n \sigma_{n-1,n-1}(\alpha') \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma_{n,k}(\alpha) X^{n-k} = \sum_{k=0}^n a_k X^{n-k} \end{aligned}$$

avec $a_k = (-1)^k \sigma_{n,k}(\alpha)$ pour tout entier k compris entre 0 et n . ■

Théorème 1.2. Formule de Poincaré

Pour toute suite finie $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ de parties de X , on a :

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_k}}$$

Démonstration Avec $X \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcap_{k=1}^n (X \setminus A_k)$, on déduit que :

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^n A_k} = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{1}_{A_k})$$

avec :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{1}_{A_k}) &= 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1}} \mathbf{1}_{A_{i_2}} \dots \mathbf{1}_{A_{i_k}} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_k}} \end{aligned}$$

ce qui nous donne $\mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_k}}$. ■

1.2 Tribus

Si A, B sont deux parties de X , on note $B \setminus A = B \cap (X \setminus A)$ la différence de B et A .

Définition 1.1. Une *algèbre de Boole* (ou un *clan*) sur X est une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(X)$ telle que :

- $X \in \mathcal{B}$;
- $\forall (A, B) \in \mathcal{B}^2, B \setminus A \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ est stable par différence).

Théorème 1.3.

Une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(X)$ est une algèbre de Boole si, et seulement si, elle vérifie les propriétés suivantes :

- $X \in \mathcal{B}$;
- $\forall A \in \mathcal{B}, X \setminus A \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ est stable par passage au complémentaire) ;
- $\forall (A, B) \in \mathcal{B}^2, A \cup B \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ est stable par réunions finies).

Démonstration Supposons que $\mathcal{B}$ soit une algèbre de Boole. Par définition on a $X \in \mathcal{B}$ et comme $\mathcal{B}$ est stable par différence, on a $X \setminus A \in \mathcal{B}$ pour tout $A \in \mathcal{B}$.

Pour A, B dans $\mathcal{B}$, on a $X \setminus B \in \mathcal{B}$ et $A \cap B = A \setminus (X \setminus B) \in \mathcal{B}$, ce qui implique que $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \in \mathcal{B}$ et $A \cup B = X \setminus (X \setminus (A \cup B)) \in \mathcal{B}$.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{B}$ contenant X soit stable par passage au complémentaire et par réunions finies.

Pour tous A et B dans $\mathcal{B}$, on a $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \in \mathcal{B}$ et $A \cap B = X \setminus (X \setminus (A \cap B)) \in \mathcal{B}$, ce qui implique que $B \setminus A = B \cap (X \setminus A) \in \mathcal{B}$. ■

Corollaire 1.1. Une algèbre de Boole sur X contient $\emptyset$ et est stable par passage au complémentaire, intersections et réunions finies.

Démonstration On a $\emptyset = X \setminus X \in \mathcal{B}$.

Par récurrence sur l'entier $n \geq 1$, on vérifie facilement que pour toute suite $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ on a $\bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{B}$, donc $B = X \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcap_{k=1}^n (X \setminus A_k)$ est dans $\mathcal{B}$ et $\bigcup_{k=1}^n A_k = X \setminus B \in \mathcal{B}$. ■

Théorème 1.4.

L'intersection d'une famille quelconque d'algèbres de Boole sur X est une algèbre de Boole sur X . Pour toute partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}(X)$, l'intersection $\bigcap_{\substack{\mathcal{B} \text{ algèbre sur } X \\ \mathcal{C} \subset \mathcal{B}}} \mathcal{B}$ est la plus petite algèbre de Boole qui contient $\mathcal{C}$.

Démonstration Soient $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ une famille d'algèbres de Boole sur l'ensemble X et $\mathcal{B} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{B}_i$ dans $\mathcal{P}(X)$. Pour tout $i \in I$, on a $X \in \mathcal{B}_i$, donc $X \in \mathcal{B}$. Pour $(A, B) \in \mathcal{B}^2$ et tout $i \in I$, on a $B \setminus A \in \mathcal{B}_i$, donc $B \setminus A \in \mathcal{B}$. On a donc ainsi montré que $\mathcal{B}$ est une algèbre de Boole sur X .

Comme $\mathcal{P}(X)$ est une algèbre de Boole sur X qui contient $\mathcal{C}$, il existe bien de telles algèbres de Boole et l'algèbre de Boole $\bigcap_{\substack{\mathcal{B} \text{ algèbre sur } X \\ \mathcal{C} \subset \mathcal{B}}} \mathcal{B}$ contient $\mathcal{C}$ et est contenue dans toute algèbre de Boole contenant $\mathcal{B}$, c'est donc la plus petite. ■

Définition 1.2. Si $\mathcal{C}$ est une partie de $\mathcal{P}(X)$, on dit alors que l'intersection de toutes les algèbres de Boole sur X qui contiennent $\mathcal{C}$ est l'*algèbre de Boole engendrée* par $\mathcal{C}$.

Exemple 1.1 Si $\mathcal{C}$ est une partie de $\mathcal{P}(X)$ qui contient X , qui est stable par intersections finies et telle que pour tout $A \in \mathcal{C}$, le complémentaire $X \setminus A$ est une

réunion finie d'éléments de $\mathcal{C}$ deux à deux disjoints, alors l'algèbre de Boole engendrée par $\mathcal{C}$ est l'ensemble de toutes les réunions finies d'éléments de $\mathcal{C}$ deux à deux disjoints (exercice 1.3). On peut prendre pour famille $\mathcal{C}$ celle des intervalles réels ou plus généralement celle des pavés de $\mathbb{R}^n$, ce qui nous sera utile pour construire la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ au paragraphe 1.8.

Définition 1.3. Une *tribu* (ou σ -algèbre) sur X est une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(X)$ telle que :

- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- $\forall A \in \mathcal{A}, X \setminus A \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire) ;
- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par réunions dénombrables).

La condition $\emptyset \in \mathcal{A}$ peut être remplacée par $X \in \mathcal{A}$ puisque $X = X \setminus \emptyset$ ou par A non vide puisque $A \in \mathcal{A}$ entraîne $X = A \cup (X \setminus A) \in \mathcal{A}$.

Exemples 1.1 $\{\emptyset, X\}$ est la tribu grossière, c'est la plus petite des tribus sur X ; $\mathcal{P}(X)$ est la tribu triviale, c'est la plus grande des tribus sur X .

Théorème 1.5.

Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur X , alors :

- $X \in \mathcal{A}$;
- si A et B sont deux éléments de $\mathcal{A}$, alors $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ et $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ sont dans $\mathcal{A}$;
- si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par intersections dénombrables), $\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n$ et $\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n$ sont dans $\mathcal{A}$.

Démonstration On a $X = X \setminus \emptyset \in \mathcal{A}$; $A \cup B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ en posant $A_0 = A$, $A_1 = B$ et $A_n = \emptyset$ pour tout entier $n \geq 2$; $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \in \mathcal{A}$, donc $A \cap B = X \setminus (X \setminus (A \cap B)) \in \mathcal{A}$; $A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{A}$ et en conséquence $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{A}$.

Pour une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = X \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X \setminus A_n \right) \in \mathcal{A}$$

et le dernier point s'en déduit facilement. ■

Pour une tribu, la stabilité par réunions et intersections dénombrables impliquent la stabilité par réunions et intersections finies en prenant les A_n respectivement vides pour la réunion ou égaux à X pour l'intersection à partir d'un certain rang.

Une tribu est une algèbre de Boole, mais la réciproque est fautive. Par exemple la famille des parties dénombrables de $\mathbb{R}$ est une algèbre de Boole mais pas une tribu ($\{0\}$ est dénombrable, mais pas $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

Théorème 1.6.

Soit $\mathcal{B}$ une algèbre de Boole sur X . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{B}$ est une tribu ;
2. si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{B}$, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$
($\mathcal{B}$ est stable par unions dénombrables croissantes) ;
3. si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{B}$, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$
($\mathcal{B}$ est stable par intersections dénombrables décroissantes).

Démonstration De la définition d'une tribu et du théorème 1.5, on déduit que (1) implique (2) et (3).

Si $\mathcal{B}$ est une algèbre de Boole, le théorème 1.1 nous dit alors qu'elle contient $\emptyset$ et qu'elle est stable par passage au complémentaire et réunions finies. Si elle est stable par unions dénombrables croissantes et si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{B}$, en écrivant que $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ où $B_n = \bigcup_{k=0}^n A_k \in \mathcal{B}$, on déduit que $A \in \mathcal{B}$ puisque $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. On a donc l'équivalence entre (1) et (2). Si elle est stable par intersections dénombrables décroissantes et si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{B}$, la suite $(X \setminus A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors décroissante, donc $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus A_n) \in \mathcal{B}$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X \setminus B \in \mathcal{B}$. Donc (3) implique (2) et on a l'équivalence entre (1) et (3). ■

Théorème 1.7.

Soit X' un sous-ensemble de X . Pour toute tribu $\mathcal{A}$ sur X , la famille $\mathcal{A}' = \{A \cap X', A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur X' (tribu trace de $\mathcal{A}$ sur X').

Démonstration On a $\emptyset = \emptyset \cap X' \in \mathcal{A}'$. Pour tout $A' = A \cap X' \in \mathcal{A}'$ où $A \in \mathcal{A}$, on a $X' \setminus A' = X' \setminus (A \cap X') = (X \setminus A) \cap X'$ avec $X \setminus A \in \mathcal{A}$, donc $X' \setminus A' \in \mathcal{A}'$. Si $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}} = (A_n \cap X')_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}'$ où $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une

suite d'éléments de $\mathcal{A}$, on a alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \cap X'$ avec $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n \in \mathcal{A}'$. En conclusion, $\mathcal{A}'$ est une tribu sur X' . ■

Théorème 1.8.

Soient Y un ensemble non vide et une application $f : X \rightarrow Y$. Pour toute tribu $\mathcal{B}$ sur Y , la famille $\mathcal{A} = \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$ est une tribu sur X (image réciproque de la tribu $\mathcal{B}$ par f notée $f^{-1}(\mathcal{B})$).

Démonstration $\emptyset \in \mathcal{B}$, donc $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in \mathcal{A}$. Si $A = f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ avec B dans $\mathcal{B}$, on a alors $Y \setminus B \in \mathcal{B}$ et $X \setminus A = X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B) \in \mathcal{A}$. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} = (f^{-1}(B_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ où $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{B}$, on a alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \in \mathcal{A}$. ■

La tribu trace sur $X' \subset X$ d'une tribu $\mathcal{A}$ sur X est l'image réciproque de $\mathcal{A}$ par l'injection canonique $i : X' \rightarrow X$.

Théorème 1.9.

L'intersection d'une famille quelconque de tribus sur l'ensemble X est une tribu sur X . Pour toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(X)$, la tribu $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \text{ tribu sur } X \\ \mathcal{A} \subset \mathcal{B}}} \mathcal{B}$ est la plus petite tribu sur X (pour l'ordre de l'inclusion) qui contient $\mathcal{A}$.

Démonstration Soient $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille de tribus sur X et $\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ dans $\mathcal{P}(X)$. Pour tout $i \in I$, on a $\emptyset \in \mathcal{A}_i$, donc $\emptyset \in \mathcal{A}$. Pour $A \in \mathcal{A}$ et tout $i \in I$, on a $A \in \mathcal{A}_i$, donc $X \setminus A \in \mathcal{A}_i$ et $X \setminus A \in \mathcal{A}$. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, on a alors $A_n \in \mathcal{A}_i$ pour tout $i \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_i$ pour tout $i \in I$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. On a donc ainsi montré que $\mathcal{A}$ est une tribu sur X .

Comme $\mathcal{P}(X)$ est une tribu sur X qui contient $\mathcal{A}$, il existe bien de telles tribus et la tribu $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \text{ tribu sur } X \\ \mathcal{A} \subset \mathcal{B}}} \mathcal{B}$ contient $\mathcal{A}$ et est contenue dans toute tribu contenant $\mathcal{A}$, c'est donc la plus petite. ■

Définition 1.4. Si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathcal{P}(X)$, on dit alors que l'intersection $\sigma(\mathcal{A})$ de toutes les tribus sur X qui contiennent $\mathcal{A}$ est la *tribu engendrée* par $\mathcal{A}$.

Dans le cas où $\mathcal{A}$ est une tribu, on a $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Si $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ sont deux parties de $\mathcal{P}(X)$, on a alors $\sigma(\mathcal{A}_1) \subset \sigma(\mathcal{A}_2)$. En effet, on a $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \sigma(\mathcal{A}_2)$, donc $\sigma(\mathcal{A}_2)$ est une tribu sur X qui contient $\mathcal{A}_1$ et en conséquence $\sigma(\mathcal{A}_1) \subset \sigma(\mathcal{A}_2)$ puisque $\sigma(\mathcal{A}_1)$ est la plus petite tribu sur X qui contient $\mathcal{A}_1$.

Exemples 1.2

1. Pour $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$, on a $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, X \setminus A, X\}$ (tribu de Bernoulli associé à A).
2. La réunion de deux tribus n'est pas nécessairement une tribu comme le montre l'exemple de deux tribus de Bernoulli associées à deux sous-ensembles distincts.
3. Si l'ensemble X est dénombrable, la tribu engendrée par les singletons est alors $\mathcal{P}(X)$ et si X est non dénombrable, cette tribu est alors :

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(X), A \text{ ou } X \setminus A \text{ est dénombrable}\}$$

(exercice 1.4).

Théorème 1.10. De transport

Si Y est un ensemble non vide, f est une fonction de X dans Y et $\mathcal{E}$ est une partie de $\mathcal{P}(Y)$, on a alors $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$ où on a noté $f^{-1}(\mathcal{E}) = \{f^{-1}(E), E \in \mathcal{E}\}$.

Démonstration De l'inclusion $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E})$, on déduit que $f^{-1}(\mathcal{E})$ est contenu dans la tribu $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$, donc $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$.

La famille $\mathcal{T} = \{E \in \mathcal{P}(Y), f^{-1}(E) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))\}$ étant une tribu qui contient $\mathcal{E}$, elle contient $\sigma(\mathcal{E})$, donc $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \subset f^{-1}(\mathcal{T})$ où $f^{-1}(\mathcal{T}) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$ par définition de $\mathcal{T}$, d'où l'égalité $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$. ■

1.3 Tribu de Borel sur un espace métrique

Pour ce paragraphe, (X, d) est un espace métrique.

Définition 1.5. La tribu de Borel sur l'espace métrique X est la tribu engendrée par les ouverts de X . On la note $\mathcal{B}(X)$ et ses éléments sont les boréliens de X .

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne est notée $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.

La tribu de Borel $\mathcal{B}(X)$ est aussi la tribu engendrée par les fermés de X . En effet, en notant $\mathcal{O}_X$ l'ensemble des ouverts de X et $\mathcal{F}_X$ l'ensemble des fermés de X , tout fermé F qui est le complémentaire de l'ouvert $X \setminus F$ est dans la tribu $\sigma(\mathcal{O}_X)$, donc $\mathcal{F}_X \subset \sigma(\mathcal{O}_X)$ et $\sigma(\mathcal{F}_X) \subset \sigma(\mathcal{O}_X)$. De même tout ouvert O qui est

le complémentaire du fermé $X \setminus O$ est dans la tribu $\sigma(\mathcal{F}_X)$, donc $\mathcal{O}_X \subset \sigma(\mathcal{F}_X)$ et $\sigma(\mathcal{O}_X) \subset \sigma(\mathcal{F}_X)$. D'où l'égalité $\sigma(\mathcal{O}_X) = \sigma(\mathcal{F}_X)$.

Si X' est une partie non vide de l'espace métrique (X, d) muni de la métrique induite, la tribu des boréliens de X' est alors la tribu trace de $\mathcal{B}(X)$ sur X' , à savoir $\mathcal{B}(X') = \{A \cap X', A \in \mathcal{B}(X)\}$. L'inclusion $\mathcal{B}(X') \subset \mathcal{B}(X)$ est réalisée si, et seulement si, X' est un borélien de X et dans ce cas, on a $\mathcal{B}(X') = \{A \in \mathcal{B}(X), A \subset X'\}$.

Lemme 1.2 *Si $\mathcal{C}$ est une partie de $\mathcal{B}(X)$ telle que tout ouvert de X est réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$, on a alors $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{C})$.*

Démonstration Comme $\mathcal{C}$ est inclus dans $\mathcal{B}(X)$, on a $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(X)$. Si tout ouvert de X est réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$, on a alors $\mathcal{O}_X \subset \sigma(\mathcal{C})$ et en conséquence, $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O}_X) \subset \sigma(\mathcal{C})$ et on a l'égalité $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{C})$. ■

Sachant que tout ouvert non vide $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts (théorème 2.4 de [36]), on déduit du lemme précédent que la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ est aussi la tribu engendrée par la famille des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est réunion dénombrable de pavés ouverts (théorème 2.5 de [36]), donc la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ est la tribu engendrée par les pavés ouverts de $\mathbb{R}^n$.

On peut aussi vérifier que la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ est engendrée par la famille des intervalles de la forme $]-\infty, y]$ où y décrit $\mathbb{R}$. Elle est aussi engendrée par la famille des intervalles de la forme $]x, y]$ où $x < y$ dans $\mathbb{R}$ (exercice 1.6).

De la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on déduit que la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ est aussi engendrée par la famille $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}$ des intervalles de la forme $]-\infty, r]$ où r décrit $\mathbb{Q}$. En effet, tout élément de $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}$ étant un fermé, on a $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ et $\sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Sachant que tout réel y est limite d'une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante de nombres rationnels (on peut prendre les approximations décimales par excès de y), on a $]-\infty, y] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}}]-\infty, r_n] \in \sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{Q}})$, donc $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{Q}})$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{Q}})$.

Pour tout intervalle réel I , la tribu des boréliens de I est :

$$\mathcal{B}(I) = \{A \cap I, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\} = \{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, A \subset I\}$$

La tribu des boréliens de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est la tribu :

$$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \{A \cup B, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ et } B \in \{\{-\infty\}, \{+\infty\}, \{-\infty, +\infty\}\}\}$$

et elle est engendrée par la famille des intervalles de la forme $[-\infty, y]$ où y décrit $\mathbb{R}$ ou encore par la famille des intervalles de la forme $[-\infty, y[$ où y décrit $\mathbb{R}$. Par densité, on peut se limiter aux $y \in \mathbb{Q}$.

On rappelle qu'un espace métrique X est dit *séparable* s'il existe dans X une partie dense dénombrable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ est séparable car $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.11.

Si l'espace métrique X est séparable, la tribu de Borel est alors engendrée par la famille de toutes les boules ouvertes.

Démonstration Notons $\mathcal{C}$ la famille des boules ouvertes $B(x, \varepsilon)$ de X où $x \in X$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $\mathcal{C}$ est contenu dans l'ensemble $\mathcal{O}_X$ des ouverts de X , on a $\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{O}_X) = \mathcal{B}(X)$.

Dans le cas où X est séparable, il existe une partie dénombrable $D = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ dense dans X . Si $\mathcal{O}$ est un ouvert non vide de X , pour tout $x \in \mathcal{O}$ il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{O}$ et par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe un nombre rationnel ρ dans $]0, \frac{\varepsilon}{2}[$. De la densité de D dans X , on déduit qu'il existe un entier n tel que $d(x, x_n) < \rho$ et la boule $B(x_n, \rho)$ est contenue dans $\mathcal{O}$. En effet, pour tout $y \in B(x_n, \rho)$, on a $d(y, x) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x) < 2\rho < \varepsilon$, soit $y \in B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{O}$. On a donc $\mathcal{O} = \bigcup_{\substack{(n, \rho) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q}_+^* \\ B(x_n, \rho) \subset \mathcal{O}}} B(x_n, \rho)$. Tout ouvert de X est donc

réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$, ce qui implique que $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{C})$ d'après le lemme précédent. ■

La tribu de Borel d'un espace métrique séparable est également engendrée par la famille des boules ouvertes de rayon rationnel strictement positif.

Exemple 1.2 L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ étant séparable (densité de $\mathbb{Q}^n$ dans $\mathbb{R}^n$), sa tribu de Borel est engendrée par la famille des boules ouvertes.

1.4 Mesures

On étend les deux opérations d'addition et de multiplication sur $\mathbb{R}$ à l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en posant pour $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $z \in \mathbb{R}_-^*$:

$$\begin{aligned} -\infty + (-\infty) &= -\infty, +\infty + (+\infty) = +\infty, x \pm \infty = \pm\infty + x = \pm\infty \\ (\pm\infty)(\pm\infty) &= +\infty, (\pm\infty)(\mp\infty) = (\mp\infty)(\pm\infty) = -\infty, 0(\pm\infty) = (\pm\infty)0 = 0 \\ y(\pm\infty) &= (\pm\infty)y = \pm\infty, z(\pm\infty) = (\pm\infty)z = \mp\infty \end{aligned}$$

Les opérations $(+\infty) + (-\infty)$ et $(-\infty) + (+\infty)$ ne sont pas autorisées.

On note $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Définition 1.6. Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur X , on dit alors que le couple $(X, \mathcal{A})$ est un *espace mesurable*.

Définition 1.7. Une *mesure* sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ est une application $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que :

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints, on a $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$ (σ -additivité ou *additivité dénombrable* de l'application μ).

Avec les conditions de la définition précédente, on dit que le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un *espace mesuré*.

Dans le cas où $\mu(X)$ est fini, on dit que la mesure μ sur $(X, \mathcal{A})$ est finie.

De la propriété de σ -additivité d'une mesure, on déduit que pour toute famille finie $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints, on a $\mu\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) = \sum_{k=0}^n \mu(A_k)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (il suffit de poser $A_k = \emptyset$ pour tout entier $k \geq n+1$ sachant que $\mu(\emptyset) = 0$).

La condition $\mu(\emptyset) = 0$ peut être remplacée par μ non constante sur $+\infty$. En effet si $A \in \mathcal{A}$ est telle que $\mu(A) < +\infty$, de $\mu(A) = \mu(A \cup \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset)$, on déduit que $\mu(\emptyset) = 0$.

Exemples 1.3

- Pour tout élément x de X , l'application $\delta_x : \mathcal{P}(X) \rightarrow \{0, 1\}$ définie par $\delta_x(A) = \mathbf{1}_A(x)$ (soit $\delta_x(A) = 1$ si $x \in A$ ou $\delta_x(A) = 0$ si $x \notin A$) est une mesure finie sur $\mathcal{P}(X)$. C'est la mesure de Dirac en x (exercice 1.7). Une telle mesure est finie.
- Pour X dénombrable, toute mesure finie est une série pondérée de mesures de Dirac (exercice 1.7).
- La mesure de comptage (ou de dénombrement) sur $(X, \mathcal{P}(X))$ est définie par $\mu(A) = \text{card}(A)$ pour toute partie A de X . Une telle mesure est finie pour X fini. Pour $X = \mathbb{N}$ et tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, on a :

$$\mu(A) = \text{card}(A) = \sum_{n \in A} 1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_A(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n(A)$$

$$\text{soit } \mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n.$$

- Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, on peut alors définir pour tout $X' \in \mathcal{A}$ muni de la tribu trace $\mathcal{A}' = \{A \cap X', A \in \mathcal{A}\}$ la mesure trace μ' sur $(X', \mathcal{A}')$ par $\mu'(A') = \mu(A')$ pour tout $A' \in \mathcal{A}'$.
- Si X est un ensemble non dénombrable et :

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(X), A \text{ ou } X \setminus A \text{ est dénombrable}\}$$

est la tribu engendrée par les singletons de X (exercice 1.4), l'application :

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{A} &\rightarrow \{0, 1\} \\ A &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable} \\ 1 & \text{si } X \setminus A \text{ est dénombrable} \end{cases} \end{aligned}$$

est alors une mesure sur $(X, \mathcal{A})$ (exercice 1.8). Une telle mesure est finie.

Avec le théorème qui suit, on résume les principales propriétés des mesures.

Théorème 1.12.

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On a les propriétés suivantes, où A et B désignent des éléments de $\mathcal{A}$:

1. si $A \subset B$, on a alors $\mu(A) \leq \mu(B)$ (μ est croissante) et dans le cas où $\mu(A)$ est fini, on a $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$;
2. $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$;
3. pour toute suite croissante $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, la suite $(\mu(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en croissant vers $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$ dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ (continuité croissante de μ) ;^a
4. pour toute suite décroissante $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, pour laquelle il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, la suite $(\mu(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en décroissant vers $\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$ dans $\mathbb{R}_+$ (continuité décroissante de μ) ;
5. pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a :

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

(inégalité de Boole qui se traduit en disant que μ est sous-additive) ;

6. pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < +\infty$, on a $\mu\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) = 0$ (Borel-Cantelli).

a. Ce résultat est un cas particulier du théorème 2.9 de Beppo-Levi.

Démonstration

1. Pour $A \subset B$, on a la partition $B = A \cup (B \setminus A)$, donc :

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$

Si $\mu(A)$ est fini, on peut alors écrire que $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ dans $\overline{\mathbb{R}_+}$.

2. Si $\mu(A \cap B) = +\infty$, on a alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) = \mu(B) = +\infty$ car ces ensembles contiennent $A \cap B$, donc $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$. Dans le cas où $\mu(A \cap B) < +\infty$, de la partition :

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus (A \cap B))$$

on déduit que :

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) + \mu(B) - \mu(B \cap A) \\ &= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \end{aligned}$$

3. On a la partition $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_0 \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (A_n \setminus A_{n-1})$. En effet pour tout $x \in A$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_{n_0}$ et en désignant par n_1 le plus petit entier tel que $x \in A_{n_1}$, on a $x \in A_0$ pour $n_1 = 0$ ou $x \in A_{n_1} \setminus A_{n_1-1} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (A_n \setminus A_{n-1})$ pour $n_1 \geq 1$. Pour $0 \leq n < m$, on a $A_n \subset A_{m-1}$ et $(A_m \setminus A_{m-1}) \cap A_n = \emptyset$, donc $(A_m \setminus A_{m-1}) \cap (A_n \setminus A_{n-1}) = \emptyset$ (en posant $A_{-1} = \emptyset$). Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(A_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\mu(A_0) + \sum_{k=1}^n \mu(A_k \setminus A_{k-1}) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu \left(A_0 \cup \bigcup_{k=1}^n (A_k \setminus A_{k-1}) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

la suite $(\mu(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante.

4. Comme la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, on a $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n=n_0+1}^{+\infty} A_n \subset A_{n_0}$ et $\mu(B) = \mu(A_{n_0}) - \mu(A_{n_0} \setminus B)$ (puisque $\mu(A_{n_0}) < +\infty$) avec :

$$A_{n_0} \setminus B = A_{n_0} \setminus \bigcap_{n=n_0+1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=n_0+1}^{+\infty} (A_{n_0} \setminus A_n)$$

la suite $(A_{n_0} \setminus A_n)_{n \geq n_0+1}$ étant croissante dans $\mathcal{A}$, ce qui nous donne :

$$\mu(A_{n_0} \setminus B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_{n_0} \setminus A_n) = \mu(A_{n_0}) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$$

et $\mu(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$, la suite $(\mu(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ étant décroissante.

5. Pour A, B dans $\mathcal{A}$, on a $\mu(A \cup B) \leq \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ et par récurrence on déduit que $\mu \left(\bigcup_{k=0}^n A_k \right) \leq \sum_{k=0}^n \mu(A_k)$, ce qui donne :

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu \left(\bigcup_{k=0}^n A_k \right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \mu(A_k) \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

(la suite $\left(\bigcup_{k=0}^n A_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante).

6. La suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante dans la tribu $\mathcal{A}$ telle que

$$\mu(B_0) = \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty, \text{ donc :}$$

$$\mu \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n \right) = \mu \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n)$$

où $0 \leq \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \mu(A_k)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$ (reste d'une série convergente), donc $\mu\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) = 0$. ■

L'égalité $\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$ pour $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante n'est pas assurée sans l'hypothèse $\mu(A_{n_0}) < +\infty$ pour un entier n_0 . Par exemple pour la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ et $A_n = \{k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ est de mesure nulle et chaque A_n de mesure infinie.

La formule $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ se généralise comme suit.

Théorème 1.13. Formule de Poincaré

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Si $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) < +\infty$, on a alors :

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mu(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

Démonstration Comme $\bigcup_{k=1}^n A_k$ contient toutes les intersections $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$

pour $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, l'hypothèse $\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) < +\infty$ nous dit que tous les ensembles $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$ sont de mesure finie.

On peut prouver la formule de Poincaré par récurrence sur $n \geq 1$.

Pour $n = 1$, c'est clair et pour $n = 2$ c'est vu avec le théorème précédent. Supposons le résultat acquis pour $n \geq 2$ et soit $(A_k)_{1 \leq k \leq n+1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) < +\infty$. En notant $B = \bigcup_{k=1}^n A_k$, le cas $n = 2$, nous donne :

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = \mu(A_{n+1}) + \mu(B) - \mu(A_{n+1} \cap B)$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\mu(B) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mu(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

donc :

$$\mu(A_{n+1}) + \mu(B) = \sum_{i_1=1}^{n+1} \mu(A_{i_1}) + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k < n+1} \mu(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

et :

$$\begin{aligned}
 \mu(A_{n+1} \cap B) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k \cap A_{n+1}\right) \\
 &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} \mu(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j} \cap A_{n+1}) \\
 &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j < i_{j+1} = n+1} \mu(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j} \cap A_{i_{j+1}})
 \end{aligned}$$

Le changement d'indice $k = j + 1$ dans cette dernière somme nous donne :

$$\mu(A_{n+1} \cap B) = \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} < i_k = n+1} \mu(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{i_k})$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= \sum_{i_1=1}^{n+1} \mu(A_{i_1}) + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k < n+1} \mu(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \\
 &\quad + \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} < i_k = n+1} \mu(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{i_k}) \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n+1} \mu(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})
 \end{aligned}$$

en utilisant, pour tout entier k compris entre 2 et $n + 1$ la partition :

$$\begin{aligned}
 \left\{ (i_j)_{1 \leq j \leq k}, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n+1 \right\} &= \left\{ (i_j)_{1 \leq j \leq k}, 1 \leq i_1 < \dots < i_k < n+1 \right\} \\
 &\quad \cup \left\{ (i_1, \dots, i_{k-1}, n+1), 1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} < n+1 \right\}
 \end{aligned}$$

■

1.5 Mesures sur un espace métrique

Une mesure sur un espace métrique (X, d) muni de la tribu de Borel $\mathcal{B}(X)$ est dite *mesure de Borel*.

Dans le cas où μ est une mesure finie sur $(X, \mathcal{B}(X))$ (i. e. telle que $\mu(X) < +\infty$) on peut donner la caractérisation qui suit de la mesure en utilisant les ouverts et les fermés (voir aussi le théorème 1.23 et le corollaire 1.7 dans le cadre de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$).

Théorème 1.14.

Soit μ une mesure finie sur $(X, \mathcal{B}(X))$. Pour tout borélien $A \in \mathcal{B}(X)$ et tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ et un fermé $\mathcal{F}$ dans X tels que $\mathcal{F} \subset A \subset \mathcal{O}$ et $\mu(\mathcal{O} \setminus \mathcal{F}) < \varepsilon$.

Démonstration Il suffit de vérifier que l'ensemble $\mathcal{A}$ des boréliens $A \in \mathcal{B}(X)$ tels que tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un fermé $\mathcal{F}$ et un ouvert $\mathcal{O}$ de X tels que $\mathcal{F} \subset A \subset \mathcal{O}$ et $\mu(\mathcal{O} \setminus \mathcal{F}) < \varepsilon$ est une tribu qui contient tous les ouverts de X . Dans ce cas $\mathcal{A}$ contient la tribu engendré par les ouverts, à savoir la tribu de Borel $\mathcal{B}(X)$ et on a le résultat annoncé.

L'ensemble vide qui est à la fois ouvert et fermé et de mesure nulle est dans $\mathcal{A}$.

Si $A \in \mathcal{A}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ et $\mathcal{F}$, $\mathcal{O}$ sont respectivement un fermé et un ouvert de X tels que l'on a $\mathcal{F} \subset A \subset \mathcal{O}$ et $\mu(\mathcal{O} \setminus \mathcal{F}) < \varepsilon$, les ensembles $\mathcal{F}' = X \setminus \mathcal{O}$ et $\mathcal{O}' = X \setminus \mathcal{F}$ sont respectivement fermé et ouvert tels que $\mathcal{F}' \subset X \setminus A \subset \mathcal{O}'$ et $\mu(\mathcal{O}' \setminus \mathcal{F}') = \mu(\mathcal{O} \setminus \mathcal{F}) < \varepsilon$, donc $X \setminus A \in \mathcal{A}$.

Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout entier $n \geq 1$, il existe un fermé $\mathcal{F}_n$ et un ouvert $\mathcal{O}_n$ de X tels que l'on a $\mathcal{F}_n \subset A_n \subset \mathcal{O}_n$ et $\mu(\mathcal{O}_n \setminus \mathcal{F}_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ et on a $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{F}_n \subset A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \subset \mathcal{O} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{O}_n$ où $\mathcal{O}$ est ouvert, mais F non nécessairement fermé. On a alors $\mathcal{O} \setminus F \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (\mathcal{O}_n \setminus \mathcal{F}_n)$ et :

$$\mu(\mathcal{O} \setminus F) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mu(\mathcal{O}_n \setminus \mathcal{F}_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}$$

En écrivant l'ensemble F comme réunion croissante $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcup_{k=1}^n \mathcal{F}_k \right)$, on a

$\mu(F) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu \left(\bigcup_{k=1}^n \mathcal{F}_k \right)$ dans $\mathbb{R}_+$ (la mesure μ est finie), donc il existe un entier n_ε tel que $\mu(F) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \mu \left(\bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} \mathcal{F}_k \right)$. L'ensemble $\mathcal{F} = \bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} \mathcal{F}_k$ est alors un fermé de X contenu dans A tel que :

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{O} \setminus \mathcal{F}) &= \mu(\mathcal{O}) - \mu(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{O}) - \mu(F) + \mu(F) - \mu(\mathcal{F}) \\ &= \mu(\mathcal{O} \setminus F) + \mu(F) - \mu(\mathcal{F}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

(toutes les mesures sont finies), ce qui nous dit que $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \in \mathcal{A}$.

L'ensemble $\mathcal{A}$ est donc une tribu sur X .

Vérifions enfin que cette tribu contient les ouverts de X .

Pour A ouvert, on prend $\mathcal{O} = A$. Le complémentaire $X \setminus A$ étant fermé, on a :

$$A = \{x \in X, d(x, X \setminus A) > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{F}_n$$

où les $\mathcal{F}_n = \left\{ x \in X, d(x, X \setminus A) \geq \frac{1}{n} \right\}$ sont fermés du fait de la continuité de la fonction $x \mapsto d(x, X \setminus A)$. La suite de boréliens $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant croissante, on a $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\mathcal{F}_n)$ dans $\mathbb{R}_+$ (la mesure μ est finie), donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\mathcal{O} \setminus \mathcal{F}_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A \setminus \mathcal{F}_n) = \mu(A) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\mathcal{F}_n) = 0$$

et pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_ε tel que $\mu(\mathcal{O} \setminus \mathcal{F}_{n_\varepsilon}) < \varepsilon$, le fermé $\mathcal{F}_{n_\varepsilon}$ étant contenu dans $A = \mathcal{O}$. ■

Corollaire 1.2. Si μ est une mesure finie sur $(X, \mathcal{B}(X))$, on a alors :

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sup \{ \mu(\mathcal{F}), \mathcal{F} \text{ fermé dans } X \text{ tel que } \mathcal{F} \subset A \} \\ &= \inf \{ \mu(\mathcal{O}), \mathcal{O} \text{ ouvert dans } X \text{ tel que } A \subset \mathcal{O} \} \end{aligned}$$

pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$.

Démonstration Soit $A \in \mathcal{B}(X)$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ et un fermé $\mathcal{F}$ dans X tels que $\mathcal{F} \subset A \subset \mathcal{O}$ et $\mu(\mathcal{O} \setminus \mathcal{F}) < \varepsilon$, donc $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(A) \leq \mu(\mathcal{O})$ dans $\mathbb{R}_+$ et :

$$\mu(A) - \mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{O}) - \mu(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{O} \setminus \mathcal{F}) < \varepsilon$$

$$\mu(\mathcal{O}) - \mu(A) \leq \mu(\mathcal{O}) - \mu(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{O} \setminus \mathcal{F}) < \varepsilon$$

soit $\mu(A) - \varepsilon < \mu(\mathcal{F}) \leq \mu(A)$ et $\mu(A) \leq \mu(\mathcal{O}) \leq \mu(A) + \varepsilon$. On a donc :

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sup \{ \mu(\mathcal{F}), \mathcal{F} \text{ fermé dans } X \text{ tel que } \mathcal{F} \subset A \} \\ &= \inf \{ \mu(\mathcal{O}), \mathcal{O} \text{ ouvert dans } X \text{ tel que } A \subset \mathcal{O} \} \end{aligned}$$

■

Corollaire 1.3. Si μ et ν sont deux mesures finies sur $(X, \mathcal{B}(X))$ qui coïncident sur les ouverts [resp. sur les fermés], elles sont alors égales.

Définition 1.8. Une mesure μ sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ est dite σ -finie s'il existe une suite croissante $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\mu(A_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Théorème 1.15.

Si μ est une mesure σ -finie sur $(X, \mathcal{B}(X))$, on a alors :

$$\mu(A) = \sup \{ \mu(\mathcal{F}), \mathcal{F} \text{ fermé dans } X \text{ tel que } \mathcal{F} \subset A \}$$

pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$.

Démonstration Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de boréliens de X telle que $\mu(A_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Dans un premier temps, on se donne $A \in \mathcal{B}(X)$ tel que $\mu(A) < +\infty$. La suite de boréliens $(A_n \cap A)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante de réunion égale à A , le théorème 1.12 nous dit que $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n \cap A)$ dans $\mathbb{R}_+$, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_ε tel que $\mu(A) - \varepsilon < \mu(A_{n_\varepsilon} \cap A) \leq \mu(A) < +\infty$. L'application $\mu_\varepsilon : B \mapsto \mu(A_{n_\varepsilon} \cap B)$ étant une mesure finie sur $(X, \mathcal{B}(X))$, le corollaire 1.2 nous dit qu'il existe un fermé $\mathcal{F} \subset A$ tel que $\mu_\varepsilon(A) - \varepsilon < \mu_\varepsilon(\mathcal{F}) \leq \mu_\varepsilon(A)$, ce qui implique que :

$$\begin{aligned} \mu(A) - \mu(\mathcal{F}) &= \mu(A) - \mu(A_{n_\varepsilon} \cap A) + \mu(A_{n_\varepsilon} \cap A) - \mu(\mathcal{F}) \\ &< \varepsilon + \mu_\varepsilon(A) - \mu(\mathcal{F}) < 2\varepsilon + \mu_\varepsilon(\mathcal{F}) - \mu(\mathcal{F}) \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

et cela prouve que $\mu(A) = \sup \{ \mu(\mathcal{F}), \mathcal{F} \text{ fermé dans } X \text{ tel que } \mathcal{F} \subset A \}$.

Dans le cas où $\mu(A) = +\infty$, on a encore l'égalité $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n \cap A) = \mu(A)$ par croissance de $(A_n \cap A)_{n \in \mathbb{N}}$, les $\mu(A_n \cap A)$ étant finis, donc en utilisant ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned} \mu(A_n \cap A) &= \sup \{ \mu(\mathcal{F}), \mathcal{F} \text{ fermé dans } X \text{ tel que } \mathcal{F} \subset A_n \cap A \} \\ &\leq \sup \{ \mu(\mathcal{F}), \mathcal{F} \text{ fermé dans } X \text{ tel que } \mathcal{F} \subset A \} \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui implique en faisant tendre n vers l'infini que :

$$\sup \{ \mu(\mathcal{F}), \mathcal{F} \text{ fermé dans } X \text{ tel que } \mathcal{F} \subset A \} = +\infty = \mu(A)$$

■

Corollaire 1.4. Si μ et ν sont deux mesures σ -finies sur $(X, \mathcal{B}(X))$ qui coïncident sur les fermés, elles sont alors égales.

La caractérisation $\mu(A) = \inf \{ \mu(\mathcal{O}), \mathcal{O} \text{ ouvert dans } X \text{ tel que } A \subset \mathcal{O} \}$ n'est plus valable pour une mesure σ -finie. Par exemple sur $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ muni de la mesure de comptage, on a $\mathcal{B}(\mathbb{Q}) = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ puisque les singletons sont fermés, donc dans $\mathcal{B}(\mathbb{Q})$ et tout élément de $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ est réunion dénombrable de singletons et les ouverts non vides sont de mesure infinie car pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ fini en notant r le plus grand élément de A , la suite $\left(r + \frac{1}{n} \right)_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ n > r}}$ est dans $\mathbb{Q} \setminus A$ et converge vers $r \notin \mathbb{Q} \setminus A$,

donc $\mathbb{Q} \setminus A$ n'est pas fermé et A n'est pas ouvert. On a alors pour $A = \{0\}$, $\mu(A) = 1 < \inf \{\mu(\mathcal{O}), A \subset \mathcal{O} \text{ ouvert dans } \mathbb{Q}\} = +\infty$, la mesure μ étant σ -finie.

Dans le cas particulier où il existe une suite croissante $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts de X telle que $\mu(A_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, la caractérisation $\mu(A) = \inf \{\mu(\mathcal{O}), \mathcal{O} \text{ ouvert dans } X \text{ tel que } A \subset \mathcal{O}\}$ est valable (voir [9]).

1.6 Mesures extérieures

La construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}^n$ peut se faire en partant de la notion intuitive de longueur d'un intervalle réel ou de volume d'un pavé de $\mathbb{R}^n$ à laquelle on associe une mesure extérieure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ qui permettra de définir une mesure sur une tribu contenant la tribu des boréliens. Nous étudions tout d'abord ce type de construction dans un cadre général.

Définition 1.9. Une *mesure extérieure* sur l'ensemble X , est une application $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ telle que :

- $\mu^*(\emptyset) = 0$;
- si $A \subset B$ dans $\mathcal{P}(X)$, on a alors $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (μ^* est croissante);
- pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}(X)$, on a :

$$\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n)$$

(μ^* est sous-additive).

Prenant dans la définition précédente tous les A_k vides à partir d'un certain rang $n \in \mathbb{N}$, on déduit de la condition de sous-additivité que pour toute suite finie

$$(A_k)_{0 \leq k \leq n} \text{ de parties de } X, \text{ on a } \mu^*\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \leq \sum_{k=0}^n \mu^*(A_k).$$

Le théorème 1.12 nous dit que toute mesure définie sur $\mathcal{P}(X)$ est une mesure extérieure, mais une mesure extérieure n'est pas en général une mesure, c'est-à-dire que l'égalité $\mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^*(A_n)$ n'est pas assurée pour toute suite

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}(X)$ deux à deux disjoints (voir l'exercice 1.13).

On rappelle que pour tous sous-ensembles A et E de X la différence $E \setminus A$ est l'intersection $(X \setminus A) \cap E$.

Dans le cas où une mesure extérieure μ^* sur X est une mesure, on a pour toutes parties A et E de X la partition $E = (E \cap A) \cup (E \setminus A)$, de sorte que $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$. Nous allons vérifier que l'ensemble :

$$\mathcal{A}_{\mu^*} = \{A \in \mathcal{P}(X) ; \forall E \in \mathcal{P}(X), \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)\} \quad (1.1)$$

est une tribu sur X et que la restriction de μ^* à cette tribu est une mesure.

On se donne donc une mesure extérieure μ^* sur X et on lui associe la famille d'ensembles $\mathcal{A}_{\mu^*}$ définie par (1.1). La propriété vérifiée par les éléments de $\mathcal{A}_{\mu^*}$ est dite *propriété de Carathéodory*.

La condition de sous-additivité pour une mesure extérieure nous dit que pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$ et tout $E \in \mathcal{P}(X)$, on a déjà l'inégalité :

$$\mu^*(E) = \mu^*((E \cap A) \cup (E \setminus A)) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$$

de sorte que :

$$\mathcal{A}_{\mu^*} = \{A \in \mathcal{P}(X) ; \forall E \in \mathcal{P}(X), \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)\}$$

Lemme 1.3 *La famille d'ensembles $\mathcal{A}_{\mu^*}$ est une algèbre de Boole.*

Démonstration Pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$, on a :

$$\mu^*(E \cap X) + \mu^*(E \setminus X) = \mu^*(E) + \mu^*(\emptyset) = \mu^*(E)$$

donc $X \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Si $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, on a alors pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$:

$$\mu^*(E \cap (X \setminus A)) + \mu^*(E \setminus (X \setminus A)) = \mu^*(E \cap (X \setminus A)) + \mu^*(E \cap A) = \mu^*(E)$$

donc $X \setminus A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

On vérifie ensuite que pour tous A et B dans $\mathcal{A}_{\mu^*}$, la réunion $C = A \cup B$ est aussi dans $\mathcal{A}_{\mu^*}$. Pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$, on a en appliquant la propriété de Carathéodory à l'ensemble $E \cap C$ pour $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$:

$$\mu^*(E \cap C) = \mu^*((E \cap C) \cap A) + \mu^*((E \cap C) \setminus A)$$

avec :

$$\begin{aligned} (E \cap C) \cap A &= E \cap (A \cup B) \cap A = E \cap A \\ (E \cap C) \setminus A &= (E \cap (A \cup B)) \setminus A = (E \setminus A) \cap B \end{aligned}$$

et $E \setminus C = E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \setminus B$, ce qui nous donne compte tenu de $B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$:

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \setminus C) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*((E \setminus A) \cap B) + \mu^*((E \setminus A) \setminus B) \\ &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) = \mu^*(E) \end{aligned}$$

et cela nous dit que $C \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. ■

On déduit alors du corollaire 1.1 que $\mathcal{A}_{\mu^*}$ contient l'ensemble vide et est stable par réunions finies et intersections finies.

Théorème 1.16. Carathéodory

Soit μ^ une mesure extérieure sur X .*

1. *La famille d'ensembles $\mathcal{A}_{\mu^*}$ défini par (1.1) est une tribu sur X .*
2. *La restriction μ de μ^* à la tribu $\mathcal{A}_{\mu^*}$ est une mesure.*

Démonstration

1. Vu le lemme précédent, il nous reste à vérifier la stabilité de $\mathcal{A}_{\mu^*}$ par réunions dénombrables. Pour ce faire, on considère dans un premier temps une réunion dénombrable d'ensembles deux à deux disjoints.

Dans le cas où A et B dans $\mathcal{A}_{\mu^*}$ sont disjoints, en notant $C = A \cup B$, on a pour toute partie E de X :

$$\mu^*(C \cap E) = \mu^*(C \cap E \cap A) + \mu^*((C \cap E) \setminus A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(B \cap E)$$

et par récurrence, on vérifie en exploitant la stabilité de $\mathcal{A}_{\mu^*}$ par réunions finies que pour toute suite finie $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ d'éléments de $\mathcal{A}_{\mu^*}$ deux à deux disjoints, on a pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$:

$$\mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)\right) = \sum_{k=1}^n \mu^*(E \cap A_k)$$

Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}_{\mu^*}$ deux à deux disjoints, du fait que les réunions $\bigcup_{k=0}^n A_k$ sont dans $\mathcal{A}_{\mu^*}$, on a pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$:

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)\right) + \mu^*\left(E \setminus \left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*\left(E \setminus \left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)\right) \\ &\geq \sum_{k=0}^n \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*\left(E \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)\right) \end{aligned}$$

ce qui implique en faisant tendre n vers l'infini que :

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\geq \sum_{k=0}^{+\infty} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*\left(E \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)\right) \\ &\geq \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)\right) + \mu^*\left(E \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)\right) \end{aligned}$$

et cela nous dit que $\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. La dernière inégalité étant en fait une égalité (définition de $\mathcal{A}_{\mu^*}$), on en déduit l'égalité :

$$\mu^*(E) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*\left(E \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)\right) \quad (1.2)$$

Dans le cas d'une réunion quelconque $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ d'éléments de $\mathcal{A}_{\mu^*}$, on se

ramène à une réunion disjointe $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$ en définissant la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$B_0 = A_0$ et $B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k \right)$ pour $n \geq 1$. Le lemme précédent nous dit que les

réunions $\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$ et les différences B_n sont dans $\mathcal{A}_{\mu^*}$, ce qui implique que $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

En conclusion, $\mathcal{A}_{\mu^*}$ est une tribu.

2. Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}_{\mu^*}$ deux à deux disjoints, l'égalité (1.2) appliquée à $E = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$ nous dit que $\mu^* \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^*(A_n)$, soit que la restriction μ de μ^* à la tribu $\mathcal{A}_{\mu^*}$ est une mesure puisque l'on sait déjà que $\mu^*(\emptyset) = 0$. ■

Dans les conditions du théorème de Carathéodory, on dit que $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu)$ où μ est la restriction de μ^* à la tribu $\mathcal{A}_{\mu^*}$ est l'espace mesuré associé à la mesure extérieure μ^* .

Définition 1.10. Si μ^* est une mesure extérieure sur X , on dit alors qu'une partie A de X est μ^* -négligeable si $\mu^*(A) = 0$.

Avec le théorème qui suit, on donne un résumé des propriétés des ensembles μ^* -négligeables relativement à une mesure extérieure.

Théorème 1.17.

Soit μ^ une mesure extérieure sur X . Toute partie μ^* -négligeable de X est dans la tribu $\mathcal{A}_{\mu^*}$ définie par (1.1) ; toute partie d'un sous-ensemble μ^* -négligeable de X est μ^* -négligeable ; une réunion dénombrable de parties μ^* -négligeables est μ^* -négligeable ; pour toute partie μ^* -négligeable A de X et toute partie B de X , on a $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(B) = \mu^*(B \setminus A)$*

Démonstration Soit $A \in \mathcal{P}(X)$ une partie μ^* -négligeable.

La mesure extérieure μ^* étant croissante, on a pour toute partie E de X :

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \leq \mu^*(A) + \mu^*(E) = \mu^*(E)$$

donc $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

Pour tout $B \subset A$ on a $0 \leq \mu^*(B) \leq \mu^*(A) = 0$, donc $\mu^*(B) = 0$ et B est négligeable.

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties μ^* -négligeables de X , on a alors :

$$0 \leq \mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n) = 0$$

donc $\mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = 0$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est négligeable.

Pour tout $B \in \mathcal{P}(X)$, on a $\mu^*(B) \leq \mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(B)$, donc $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(B)$. Écrivant que $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ où $\mu^*(A \cap B) = 0$, on en déduit que $\mu^*(B) = \mu^*(B \setminus A)$. ■

Du théorème précédent, on déduit que l'espace mesuré $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu)$ est complet, c'est-à-dire que toute partie μ -négligeable (*i. e.* contenue dans un ensemble de μ -mesure nulle) est dans $\mathcal{A}_{\mu^*}$ et de μ -mesure nulle.

Dans le cas particulier où (X, d) est un espace métrique, on peut définir la notion suivante.

Définition 1.11. Une mesure extérieure μ^* sur X est dite *métrique* si elle est telle que $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$ pour tous sous-ensembles A, B de X tels que $d(A, B) > 0$.

Théorème 1.18. Carathéodory

Soient (X, d) un espace métrique, μ^ une mesure extérieure sur X et $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu)$ l'espace mesuré associé à μ^* . Une telle mesure extérieure est métrique si, et seulement si, tous les fermés de X sont μ -mesurables.*

Démonstration Supposant que la mesure extérieure μ^* est métrique, on se donne un fermé F de X et il s'agit de montrer que pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$ on a $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap F) + \mu^*(E \setminus F)$. Le résultat étant acquis si $E \cap F = \emptyset$ (dans ce cas on a $\mu^*(E \cap F) = 0$ et $\mu^*(E \setminus F) \leq \mu^*(E)$ car $E \setminus F \subset E$) ou si $E \setminus F = \emptyset$ ou si $\mu^*(E) = +\infty$, on peut supposer que $\mu^*(E) < +\infty$, $E \cap F \neq \emptyset$ et $E \setminus F \neq \emptyset$.

L'ensemble F étant fermé, on a $E \setminus F = \{x \in E, d(x, F) > 0\}$. En notant $F_n = \left\{x \in X, d(x, F) \leq \frac{1}{n}\right\}$ pour tout entier $n \geq 1$, on a pour tous $x \in E \cap F$ et $y \in E \setminus F_n$, $d(x, F) = 0$ et $d(y, F) > \frac{1}{n}$, donc :

$$d(x, y) \geq |d(x, F) - d(y, F)| = d(y, F) > \frac{1}{n}$$

ce qui nous dit que $d(F \cap E, E \setminus F_n) > 0$ et implique du fait que la mesure extérieure μ^* est métrique que :

$$\mu^*(E \cap F) + \mu^*(E \setminus F_n) = \mu^*((E \cap F) \cup (E \setminus F_n)) \leq \mu^*(E)$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} E \setminus F &= \{x \in E, d(x, F) > 0\} \\ &= \left\{x \in E, 0 < d(x, F) \leq \frac{1}{n}\right\} \cup \left\{x \in E, d(x, F) > \frac{1}{n}\right\} = B_n \cup (E \setminus F_n) \end{aligned}$$

où on a noté $B_n = \left\{x \in E, 0 < d(x, F) \leq \frac{1}{n}\right\}$, donc :

$$\mu^*(E \setminus F) \leq \mu^*(B_n) + \mu^*(E \setminus F_n)$$

et :

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap F) + \mu^*(E \setminus F) &\leq \mu^*(E \cap F) + \mu^*(E \setminus F_n) + \mu^*(B_n) \\ &\leq \mu^*(E) + \mu^*(B_n) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Il nous suffit alors de montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu^*(B_n) = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} \left\{ x \in E, \frac{1}{k+1} < d(x, F) \leq \frac{1}{k} \right\} = \bigcup_{k=n}^{+\infty} E_k$$

donc $\mu^*(B_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mu^*(E_k)$, ce majorant étant le reste d'une série de réels positifs.

Pour j, k entiers naturels non nuls tels que $|k - j| \geq 2$, on a $d(E_k, E_j) > 0$ (dans le cas où $k - j \geq 2$ on a pour $x \in E_k$ et $y \in E_j$, $d(x, F) \in \left] \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right]$ et $d(y, F) \in \left] \frac{1}{j+1}, \frac{1}{j} \right]$, donc :

$$d(x, y) \geq |d(x, F) - d(y, F)| \geq \frac{1}{j+1} - \frac{1}{k} = \frac{k - (j+1)}{k(j+1)} \geq \frac{1}{k(j+1)}$$

ce qui nous dit que $d(E_k, E_j) \geq \frac{1}{k(j+1)}$ et même chose dans l'autre cas), ce qui implique du fait que la mesure extérieure μ^* est métrique que :

$$\sum_{k=1}^n \mu^*(E_{2k}) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^n E_{2k}\right) \leq \mu^*(E)$$

De manière analogue, on a $\sum_{k=1}^n \mu^*(E_{2k-1}) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^n E_{2k-1}\right) \leq \mu^*(E)$. Il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=1}^n \mu^*(E_k) \leq 2\mu^*(E) < +\infty$ ce qui nous dit que

la série $\sum \mu^*(E_n)$ est convergente et en conséquence, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \mu^*(E_k) = 0$, ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu^*(B_n) = 0$. L'inégalité :

$$\mu^*(E \cap F) + \mu^*(E \setminus F) \leq \mu^*(E)$$

en résulte alors en faisant tendre n vers l'infini dans (1.3).

Les fermés sont donc dans la tribu $\mathcal{A}_{\mu^*}$, ce qui nous dit qu'ils sont μ -mesurables.

Réciproquement, supposons que tous les fermés de X sont μ -mesurables. Par passage au complémentaire, il en résulte que tous les ouverts de X sont μ -mesurables.

Si A, B sont deux sous-ensembles de X tels que $d(A, B) > 0$, il existe alors un ouvert $\mathcal{O}$ de X qui contient A et disjoint de B et on a en exploitant le fait que $\mathcal{O} \in \mathcal{A}_{\mu^*}$:

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap \mathcal{O}) + \mu^*((A \cup B) \setminus \mathcal{O}) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

ce qui nous dit que la mesure extérieure μ^* est métrique. ■

Corollaire 1.5. Soient (X, d) un espace métrique, μ^* une mesure extérieure sur X et $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu)$ l'espace mesuré associé à μ^* . Si la mesure extérieure μ^* est métrique, les boréliens de X sont alors μ -mesurables.

Démonstration La tribu $\mathcal{A}_{\mu^*}$ contenant les fermés, elle contient la tribu engendrée par les fermés de X , soit la tribu $\mathcal{B}(X)$ des boréliens de X . ■

1.7 Un théorème de prolongement

Il n'est pas toujours possible de définir une mesure de manière explicite sur une tribu. Nous allons voir que si l'on sait définir une « mesure » sur une partie de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant certaines propriétés, on peut alors lui associer une mesure sur la tribu engendrée par cette partie. Par exemple à partir de la notion intuitive de longueur des intervalles réels ou de volume des pavés de $\mathbb{R}^n$, on peut définir une mesure extérieure sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}^n$ à laquelle on associera une mesure sur la tribu des boréliens.

Pour la suite de ce paragraphe, on se donne une algèbre de Boole $\mathcal{B}$ sur X et une application $\nu : \mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que :

- $\nu(\emptyset) = 0$;
- pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints telle que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}, \text{ on a } \nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n) \text{ } (\nu \text{ est } \sigma\text{-additive}).$$

Nous allons vérifier que ν se prolonge en une mesure sur la tribu $\sigma(\mathcal{B})$ engendrée par $\mathcal{B}$, ce prolongement étant unique sous certaines conditions.

On rappelle que la tribu engendrée par $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ est l'intersection $\sigma(\mathcal{B})$ de toutes les tribus sur X qui contiennent $\mathcal{B}$ (définition 1.4).

Pour toute suite finie $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ d'éléments de $\mathcal{B}$, on a $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{B}$ et dans le cas où ces éléments sont deux à deux disjoints en posant $A_k = \emptyset$ pour tout entier $k \geq n+1$, on a :

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \nu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} A_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \nu(A_k) = \sum_{k=1}^n \nu(A_k)$$

Pour $A \subset B$ dans $\mathcal{B}$, on a $B \setminus A \in \mathcal{B}$ et :

$$\nu(B) = \nu(A \cup (B \setminus A)) = \nu(A) + \nu(B \setminus A) \geq \nu(A)$$

ce qui signifie que ν est croissante.

Lemme 1.4 Pour tout $A \in \mathcal{B}$ et toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, on a $\nu(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n)$ (ν est sous-additive).

Démonstration La suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de X définie par $B_0 = A_0$ et $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$ est une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints (pour $0 \leq n < m$, on a $B_n \subset A_n$ et un élément de B_m n'est pas dans A_n). Comme $B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Pour tout $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ il existe un plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_n$. Si $n = 0$, on a alors $x \in A_0 = B_0$. Si $n \geq 1$, on a alors $x \in A_n$ et $x \notin A_k$ pour tout k compris entre 0 et $n - 1$, soit $x \in B_n$. On a donc $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ et $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A \cap B_n$ dans $\mathcal{B}$. Comme ν est σ -additive et croissante, il en résulte que :

$$\nu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A \cap B_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(B_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n)$$

(puisque $A \cap B_n \subset B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). ■

Pour toute partie A de X , on note $\nu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n) \in \overline{\mathbb{R}_+}$, la borne inférieure étant prise sur toutes les suites $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telles que $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Une telle suite existe bien, par exemple la suite définie par $A_0 = X$ et $A_n = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ convient et les sommes $\sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n)$ étant dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, la borne inférieure existe bien dans $\overline{\mathbb{R}_+}$.

Dans le cas où $\nu^*(A)$ est fini, il existe pour tout réel $\varepsilon > 0$ par définition de la borne inférieure, une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et

$$\nu^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n) < \nu^*(A) + \varepsilon.$$

Théorème 1.19.

Pour tout $A \in \mathcal{B}$, on a $\nu^(A) = \nu(A)$ et la fonction d'ensemble ν^* est une mesure extérieure sur X .*

Démonstration Si $A \in \mathcal{B}$, il fait alors partie des recouvrements possibles de A par des éléments de $\mathcal{B}$ et on a $\nu^*(A) \leq \nu(A)$. Du fait de la sous-additivité de ν (lemme précédent), on a $\nu(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n)$ pour tout recouvrement de A par des éléments de $\mathcal{B}$, donc $\nu(A) \leq \nu^*(A)$ et on a l'égalité $\nu^*(A) = \nu(A)$. En particulier, on a $\nu^*(\emptyset) = \nu(\emptyset) = 0$.

Si $A \subset B$ dans $\mathcal{P}(X)$, tout recouvrement de B par des éléments de $\mathcal{B}$ est aussi un recouvrement de A , ce qui implique que $\nu^*(A) \leq \nu^*(B)$.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}(X)$ et $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. S'il existe un entier p tel que $\nu^*(A_p) = +\infty$, l'inégalité $\nu^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n) = +\infty$ est alors assurée.

En supposant que $\nu^*(A_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, étant donné un réel $\varepsilon > 0$, il existe pour chacun de ces entiers n une suite $(A_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que l'on ait $A_n \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{n,k}$ et $\nu^*(A_n) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu(A_{n,k}) < \nu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. On a alors

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{n,k} = \bigcup_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} A_{n,k} \text{ et :}$$

$$\begin{aligned} \nu^*(A) &\leq \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} \nu(A_{n,k}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \nu(A_{n,k}) \right) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\nu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu^*(A_n) + \varepsilon \end{aligned}$$

(voir le théorème 4.30 de [36] pour l'égalité $\sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} \nu(A_{n,k}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \nu(A_{n,k}) \right)$

dans $\overline{\mathbb{R}_+}$). Faisant tendre ε vers 0, on en déduit que $\nu^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}}^* \nu^*(A_n)$.

La fonction d'ensemble ν^* est donc bien une mesure extérieure sur $\mathbb{R}$. ■

Le théorème 1.16 de Carathéodory nous dit alors que l'ensemble :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{A \in \mathcal{P}(X) ; \forall E \in \mathcal{P}(X), \nu^*(E) = \nu^*(E \cap A) + \nu^*(E \setminus A)\} \\ &= \{A \in \mathcal{P}(X) ; \forall E \in \mathcal{P}(X), \nu^*(E) \geq \nu^*(E \cap A) + \nu^*(E \setminus A)\} \end{aligned}$$

est une tribu sur l'ensemble X et que la restriction μ de ν^* à cette tribu est une mesure sur X .

Lemme 1.5 *La tribu $\mathcal{A}$ ainsi définie contient la tribu $\sigma(\mathcal{B})$ engendrée par l'algèbre de Boole $\mathcal{B}$.*

Démonstration Il nous suffit de vérifier que la tribu $\mathcal{A}$ contient l'algèbre de Boole $\mathcal{B}$ puisque $\sigma(\mathcal{B})$ est la plus petite tribu sur X qui contient $\mathcal{B}$.

Il s'agit donc de vérifier que pour tout $A \in \mathcal{B}$ et tout $E \in \mathcal{P}(X)$, on a :

$$\nu^*(E \cap A) + \nu^*(E \setminus A) \leq \nu^*(E) \quad (1.4)$$

Pour $E \in \mathcal{B}$, les ensembles $E \cap A$ et $E \setminus A$ sont dans $\mathcal{B}$ et on a :

$$\begin{aligned} \nu^*(E) &= \nu(E) = \nu((E \cap A) \cup (E \setminus A)) = \nu(E \cap A) + \nu(E \setminus A) \\ &= \nu^*(E \cap A) + \nu^*(E \setminus A) \end{aligned}$$

Pour $E \in \mathcal{P}(X)$ tel que $\nu^*(E) = +\infty$, l'inégalité (1.4) est automatiquement vérifiée.

Pour $E \in \mathcal{P}(X)$ tel que $\nu^*(E) < +\infty$, il existe pour tout réel $\varepsilon > 0$ une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et $\nu^*(E) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n) < \nu^*(E) + \varepsilon$,

donc $E \cap A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap A)$, $E \setminus A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \setminus A)$ et :

$$\begin{aligned} & \nu^*(E \cap A) + \nu^*(E \setminus A) \\ & \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu^*(A_n \cap A) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu^*(A_n \setminus A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\nu^*(A_n \cap A) + \nu^*(A_n \setminus A)) \\ & = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\nu(A_n \cap A) + \nu(A_n \setminus A)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n) < \nu^*(E) + \varepsilon \end{aligned}$$

Le réel $\varepsilon > 0$ étant quelconque, cela implique l'inégalité (1.4). $\blacksquare$

On a donc au final une mesure μ sur une tribu $\mathcal{A}$ qui contient la tribu $\sigma(\mathcal{B})$ telle que $\mu(A) = \nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}$, c'est-à-dire que toute application σ -additive $\nu : \mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ sur une algèbre de Boole $\mathcal{B}$ telle que $\nu(\emptyset) = 0$ se prolonge en une mesure sur une tribu $\mathcal{A}$ qui contient la tribu $\sigma(\mathcal{B})$.

Pour tout mesurable $A \in \mathcal{A}$, on a $\mu(A) = \inf_{A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \in \overline{\mathbb{R}}_+$, la borne inférieure étant prise sur toutes les suites $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telles que $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Pour A de mesure finie, il existe pour tout réel $\varepsilon > 0$ une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et $\mu(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < \mu(A) + \varepsilon$.

Supposons que μ' soit une autre mesure sur $\sigma(\mathcal{B})$ qui prolonge ν .

Pour tout $A \in \sigma(\mathcal{B})$ et toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{B}$ telle que $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, on a :

$$\mu'(A) \leq \mu' \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu'(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n)$$

donc $\mu'(A) \leq \nu^*(A) = \mu(A)$.

Cette inégalité est aussi valable pour $X \setminus A$, soit $\mu'(X \setminus A) \leq \mu(X \setminus A)$.

Dans le cas où $\nu(X) = \mu(X) = \mu'(X)$ est fini (X est dans $\mathcal{B}$), on en déduit que $\mu'(X) - \mu'(A) = \mu(X) - \mu'(A) \leq \mu(X) - \mu(A)$, soit $\mu(A) \leq \mu'(A)$ et l'égalité $\mu'(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \sigma(\mathcal{B})$.

Dans le cas où l'application ν est σ -finie dans le sens où il existe une suite croissante $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $\nu(A_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, en définissant la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ par $X_0 = A_0$ et

$$X_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, \text{ on a } X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \text{ où les } X_n \text{ sont deux à deux disjoints et tels}$$

que $\nu(X_n) \leq \nu(A_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ les applications $\mu_n : A \mapsto \mu(A \cap X_n)$ et $\mu'_n : A \mapsto \mu'(A \cap X_n)$ sont des mesures finies sur $(X, \sigma(\mathcal{B}))$ qui coïncident sur $\mathcal{B}$ et telles que l'on ait $\mu_n(X) = \mu(X_n) = \nu(X_n) = \mu'(X_n) = \mu'_n(X) < +\infty$, donc elles sont égales

d'après le cas précédent. Il en résulte que pour tout $A \in \sigma(\mathcal{B})$, on a :

$$\begin{aligned}\mu'(A) &= \mu' \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A \cap X_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu'(A \cap X_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A \cap X_n) \\ &= \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A \cap X_n \right) = \mu(A)\end{aligned}$$

Au final, nous avons le théorème suivant.

Théorème 1.20.

Si $\mathcal{B}$ est une algèbre de Boole dans $\mathcal{P}(X)$ et $\nu : \mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une application σ -additive telle que $\nu(\emptyset) = 0$, il existe alors une mesure μ sur la tribu $\sigma(\mathcal{B})$ engendrée par $\mathcal{B}$ qui prolonge ν (i. e. telle que $\mu(A) = \nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}$). Une telle mesure est uniquement déterminée dans le cas où ν est finie ou σ -finie.

1.8 La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}^n$

On rappelle qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si, pour tous réels $a \leq b$ dans I , le segment $[a, b]$ est contenu dans I . De cette caractérisation on déduit que l'intersection de deux intervalles I et J est un intervalle. En effet pour $a \leq b$ dans $I \cap J$, on a $[a, b] \subset I$ et $[a, b] \subset J$, donc $[a, b] \subset I \cap J$. Le complémentaire d'un intervalle I est soit : l'intervalle vide $\emptyset =]a, a[$ si $I = \mathbb{R}$; l'intervalle $\mathbb{R}$ si I est vide; un intervalle non borné si $I \neq \mathbb{R}$ est non borné; la réunion disjointe de deux intervalles non bornés si I est borné non vide.

Donc l'ensemble $\mathcal{I}$ des intervalles réel contient $\mathbb{R}$, est stable par intersections finies et le complémentaire d'un intervalle est réunion finie d'intervalles disjoints, ce qui implique d'après l'exercice 1.3 que l'algèbre de Boole engendrée par les intervalles est l'ensemble $\mathcal{B}$ de toutes les réunions finies d'intervalles deux à deux disjoints. On a alors $\sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Pour $n \geq 1$ entier, un pavé dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de la forme $P = \prod_{k=1}^n I_k$ où les I_k sont des intervalles réels. L'ensemble $\mathcal{P}$ des pavés contient $\mathbb{R}^n$, est stable par intersections finies et le complémentaire d'un pavé est réunion finie de pavés disjoints, donc l'algèbre de Boole engendrée par $\mathcal{P}$ est l'ensemble de toutes les réunions finies de pavés deux à deux disjoints. La tribu engendrée par cette algèbre de Boole est celle engendrée par $\mathcal{P}$ à savoir la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.

Définition 1.12. La longueur d'un intervalle réel I est l'élément de $\overline{\mathbb{R}}_+$ défini par $\ell(I) = \sup(I) - \inf(I)$.

Si I est un intervalle borné d'extrémités réelles $a < b$, on a alors $\ell(I) = b - a$ dans $\mathbb{R}_+$. En particulier on a $\ell(\emptyset) = \ell(]a, a[) = \ell([a, a]) = 0$. Si I est non borné, on a alors $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ et $\ell(I) = +\infty$.

Cette fonction d'ensemble est invariante par translation dans le sens où pour tout intervalle réel I et tout réel α , on a $\ell(\alpha + I) = \ell(I)$. En effet, si I est non borné, il en est alors de même de $\alpha + I$ et on a $\ell(\alpha + I) = \ell(I) = +\infty$, sinon en notant $a \leq b$ les extrémités réelles de I , le translaté $\alpha + I$ est l'intervalle d'extrémités $\alpha + a \leq \alpha + b$ et $\ell(\alpha + I) = (\alpha + b) - (\alpha + a) = b - a = \ell(I)$. Plus généralement, pour tout réel α et tout réel non nul λ , on a $\ell(\alpha + \lambda I) = |\lambda| \ell(I)$.

À partir de cette notion de longueur d'un intervalle réel, nous allons définir une mesure extérieure sur $\mathbb{R}$ en utilisant le théorème 1.20 de prolongement, ce qui nous conduira à la mesure de Lebesgue.

Il semble naturel de définir la « mesure » d'un élément $A = \bigcup_{k=1}^n I_k$ de $\mathcal{B}$ où les I_k sont intervalles deux à deux disjoints par $\nu(A) = \sum_{k=1}^n \ell(I_k)$, mais pour ce faire nous devons vérifier que cela ne dépend pas de la partition de A par des intervalles.

Le volume d'un pavé $P = \prod_{k=1}^n I_k$ de $\mathbb{R}^n$ est $\nu(P) = \prod_{k=1}^n \ell(I_k) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ et celui d'un élément $A = \bigcup_{k=1}^m P_k$ de l'algèbre de Boole engendrée par $\mathcal{P}$ est $\nu(A) = \sum_{k=1}^m \nu(P_k)$ où on convient toujours que $0(+\infty) = (+\infty)0 = 0$.

Pour toute $\alpha \in \mathbb{R}^n$ et tout réel non nul λ , $\alpha + \lambda P = \prod_{k=1}^n (\alpha_k + \lambda I_k)$ est un pavé et on a :

$$\nu(\alpha + \lambda P) = \prod_{k=1}^n \ell(\alpha_k + \lambda I_k) = |\lambda|^n \nu(P)$$

Pour ce qui suit on se limite à l'étude détaillée de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, les résultats analogues pour $\mathbb{R}^n$ étant admis.

Lemme 1.6 Si $I = [a, b]$ est un intervalle réel fermé borné et $(I_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite finie d'intervalles réels telle que $I \subset \bigcup_{k=1}^n I_k$, on a alors $\ell(I) \leq \sum_{k=1}^n \ell(I_k)$.

Démonstration Si l'un des intervalles I_j pour j compris entre 1 et n est non borné, on a alors $\ell(I_j) = +\infty$ et $\ell(I) = b - a < \sum_{k=1}^n \ell(I_k) = +\infty$.

On suppose donc que chaque intervalle I_k pour k compris entre 1 et n est borné et on note $a_k \leq b_k$ ses extrémités.

On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$, l'inclusion $I \subset I_1$ se traduit par $-\infty < a_1 \leq a \leq b \leq b_1 < +\infty$ et on a $\ell(I) = b - a \leq b_1 - a_1 = \ell(I_1)$.

Supposons le résultat acquis pour $n - 1 \geq 1$ et soit $I \subset \bigcup_{k=1}^n I_k$ un recouvrement fini de l'intervalle I par des intervalles I_k bornés. L'extrémité b de I est contenue dans l'un des I_k et, en modifiant au besoin la numérotation, on peut supposer que $k = n$, soit que $a_n \leq b \leq b_n$. Si $a_n \leq a$, on a alors $a_n \leq a \leq b \leq b_n$, soit $I \subset I_n$

et $\ell(I) \leq \ell(I_n) \leq \sum_{k=1}^n \ell(I_k)$. Sinon, on a $a < a_n \leq b \leq b_n$, donc $[a, a_n[\subset \bigcup_{k=1}^{n-1} I_k$ et par hypothèse de récurrence on a $a_n - a \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ell(I_k)$, ce qui implique compte tenu de $b - a_n \leq b_n - a_n = \ell(I_n)$ que :

$$\ell(I) = b - a = (b - a_n) + (a_n - a) \leq \sum_{k=1}^n \ell(I_k)$$

■

Lemme 1.7 Si $I = [a, b]$ est un intervalle réel fermé borné et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles réels telle que $I \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$, on a alors $\ell(I) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$.

Démonstration Si l'un des I_n est non borné, le résultat est alors évident comme pour le lemme précédent.

On suppose que chaque intervalle I_n pour $n \in \mathbb{N}$ est borné et on note $a_n \leq b_n$ ses extrémités. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on désigne par $(I_n(\varepsilon))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'intervalles ouverts définie par $I_n(\varepsilon) =]a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, b_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}[$ et on a un recouvrement ouvert $I \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n(\varepsilon)$ du compact $I = [a, b]$ duquel on peut extraire un sous-recouvrement fini $I \subset \bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} J_k$. On déduit alors du lemme précédent que :

$$\begin{aligned} \ell(I) &\leq \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \ell(J_k) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \ell(I_n(\varepsilon)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(b_n - a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \ell(I_n) + \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell(I_n) + \varepsilon \end{aligned}$$

Faisant tendre ε vers 0, on en déduit que $\ell(I) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$. ■

Lemme 1.8 Si I est un intervalle réel et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles réels telle que $I \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$, on a alors $\ell(I) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$ (ℓ est sous-additive).

Démonstration Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n) = +\infty$, le résultat est alors évident. Si la série

$\sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$ est convergente, tous les I_n sont alors bornés. En notant $a \leq b$ les extrémités de I , pour tout segment $I' = [a', b']$ contenu dans I , on a $I' \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ et du

lemme précédent on déduit que $\ell(I') = b' - a' \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n) < +\infty$. Il en résulte

que a et b sont finis, puis faisant tendre (a', b') vers (a, b) , on en déduit le résultat annoncé. ■

Lemme 1.9 Si $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'intervalles deux à deux disjoints inclus dans un intervalle I , on a alors $\ell(I) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$.

Démonstration Si $\ell(I) = +\infty$, le résultat est alors évident. On suppose que I est borné d'extrémités $a \leq b$. Comme $I_n \subset I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, tous ces intervalles sont bornés et on a $\bigcup_{k=0}^n I_k \subset I$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En modifiant au besoin la numérotation et en notant $a_k \leq b_k$ les extrémités de chaque intervalle I_k , comme ils sont deux à deux disjoints, on peut supposer que :

$$a \leq a_0 \leq b_0 < a_1 \leq b_1 < \cdots < a_{n-1} \leq b_{n-1} < a_n \leq b_n \leq b$$

et on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \ell(I_k) &= \sum_{k=0}^n (b_k - a_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) + (b_n - a_n) \\ &\leq a_n - a_0 + b - a_n \leq b - a = \ell(I) \end{aligned}$$

Faisant tendre n vers l'infini, on en déduit le résultat annoncé. ■

Théorème 1.21.

Si I est un intervalle réel et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles réels deux à deux disjoints telle que $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$, on a alors $\ell(I) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$.

Démonstration C'est une conséquence des deux lemmes précédents. ■

Corollaire 1.6. Si $(I_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(J_k)_{1 \leq k \leq m}$ sont deux suites finies d'intervalles réels deux à deux disjoints telle que $\bigcup_{k=1}^n I_k = \bigcup_{k=1}^m J_k$, on a alors

$$\sum_{k=1}^n \ell(I_k) = \sum_{k=1}^m \ell(J_k).$$

Démonstration Le théorème précédent (qui est valable pour les suites finies en prenant les I_n vides à partir d'un certain rang) nous dit que le résultat est acquis pour $n = 1$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n \geq 2$ et tout entier j compris entre 1 et n , on a $I_j = \bigcup_{k=1}^m I_j \cap J_k$, les $I_j \cap J_k$ étant des intervalles deux à deux disjoints, donc $\ell(I_j) = \sum_{k=1}^m \ell(I_j \cap J_k)$ (cas

$n = 1$), ce qui implique que :

$$\sum_{j=1}^n \ell(I_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \ell(I_j \cap J_k) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \ell(I_j \cap J_k) = \sum_{k=1}^m \ell(J_k)$$

■

On peut donc définir la fonction d'ensemble $\nu : \mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ par $\nu(A) = \sum_{k=1}^n \ell(I_k)$

pour tout $A = \bigcup_{k=1}^n I_k \in \mathcal{B}$ où les I_k sont intervalles deux à deux disjoints. Cette fonction coïncide avec ℓ sur l'ensemble $\mathcal{I}$ des intervalles réels et en particulier, on a $\nu(\emptyset) = 0$.

Lemme 1.10 *La fonction d'ensemble ν est σ -additive.*

Démonstration Il s'agit de vérifier que si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints telle que $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$, on a alors $\nu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n)$.

Si les A_n et A sont des intervalles, c'est le théorème 1.21.

Si les A_n sont des intervalles, on a alors $A = \bigcup_{p=1}^m I_p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ où les I_p sont des intervalles deux à deux disjoints, donc $I_p = I_p \cap A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_p \cap A_n$ pour p fixé où les $I_p \cap A_n$ sont des intervalles deux à deux disjoints et le théorème 1.21 nous dit que $\ell(I_p) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_p \cap A_n)$, ce qui implique que :

$$\nu(A) = \sum_{p=1}^m \ell(I_p) = \sum_{p=1}^m \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_p \cap A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{p=1}^m \ell(I_p \cap A_n)$$

avec $A_n = A_n \cap A = \bigcup_{p=1}^m A_n \cap I_p$ où les $A_n \cap I_p$ sont des intervalles deux à deux

disjoints, donc $\nu(A_n) = \ell(A_n) = \sum_{p=1}^m \ell(A_n \cap I_p)$ et $\nu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n)$.

Pour le cas général, chaque $A_n = \bigcup_{j=1}^{m_n} I_{n,j}$ est réunion disjointe d'intervalles $I_{n,j}$

et $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{j=1}^{m_n} I_{n,j}$ est aussi réunion dénombrable d'intervalles deux à deux disjoints, ce qui nous donne d'après le cas précédent :

$$\nu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{m_n} \ell(I_{n,j}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n)$$

■

Le théorème 1.20 nous dit alors que la fonction d'ensemble définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ par $\nu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n) \in \overline{\mathbb{R}}_+$, la borne inférieure étant prise sur toutes les suites $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telles que $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est une mesure extérieure.

On a $\nu^*(A) = \nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}$ et en particulier $\nu^*(I) = \ell(I)$ pour tout intervalle I .

Cette mesure extérieure est aussi définie par :

$$\nu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n} \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$$

la borne inférieure étant prise sur toutes les suites d'intervalles réels $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$. En effet, pour tout recouvrement $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ par des intervalles

réels, on a $\nu^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$ puisque ces intervalles sont des éléments de $\mathcal{B}$, donc

$\nu^*(A) \leq \ell^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n} \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$. Dans le cas où $\nu^*(A) = +\infty$, on a l'égalité

$\nu^*(A) = \ell^*(A)$. Si $\nu^*(A)$ est fini, il existe pour tout réel $\varepsilon > 0$ une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et $\nu^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n) < \nu^*(A) + \varepsilon$ où chaque

$A_n = \bigcup_{j=1}^{m_n} I_{n,j}$ est réunion disjointe d'intervalles $I_{n,j}$, ce qui nous donne :

$$\nu^*(A) + \varepsilon > \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{m_n} \ell(I_{n,j}) \geq \ell^*(A)$$

Le réel $\varepsilon > 0$ étant quelconque, on a $\nu^*(A) \geq \ell^*(A)$ et l'égalité $\nu^*(A) = \ell^*(A)$.

On notera ℓ^* la mesure extérieure ν^* .

Théorème 1.22.

La mesure extérieure ℓ^ est invariante par translation (i. e. telle que $\ell^*(\alpha + A) = \ell^*(A)$ pour tous $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$).*

Démonstration Soient A une partie non vide de X et $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout recouvrement de A par des intervalles $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$, on a $\alpha + A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\alpha + I_n)$ où les $\alpha + I_n$ sont des intervalles, donc $\ell^*(\alpha + A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(\alpha + I_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$, ce qui implique que $\ell^*(\alpha + A) \leq \ell^*(A)$. Du fait que $A = -\alpha + (\alpha + A)$, il en résulte que $\ell^*(A) = \ell^*(-\alpha + (\alpha + A)) \leq \ell^*(\alpha + A)$, d'où l'égalité $\ell^*(\alpha + A) = \ell^*(A)$. ■

Définition 1.13. L'espace mesuré $(X, \mathcal{A}_{\ell^*}, \ell^*)$ associé à la mesure extérieure ℓ^* (théorème 1.16 de Carathéodory) est l'espace mesuré de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. La tribu $\mathcal{A}_{\ell^*}$ est la tribu de Lebesgue, la mesure ℓ^* sur cette tribu est la mesure de Lebesgue et les éléments de $\mathcal{A}_{\ell^*}$ sont dits *Lebesgue-mesurables*.

Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est donc Lebesgue-mesurable si, et seulement, pour toute partie E de $\mathbb{R}$, on a la condition de Carathéodory :

$$\ell^*(E) = \ell^*(E \cap A) + \ell^*(E \setminus A)$$

ou de manière équivalente :

$$\ell^*(E) \geq \ell^*(E \cap A) + \ell^*(E \setminus A)$$

On notera $\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_{\ell^*}$ la tribu de Lebesgue et $\lambda = \ell^*$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

En écrivant que $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1[$ chaque intervalle $[n, n+1[$ étant de longueur égale à 1 on voit que la fonction d'ensemble ν est σ -finie donc le théorème 1.20 nous dit que la mesure de Lebesgue est l'unique mesure sur $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ qui prolonge ℓ .

Lemme 1.11 *La tribu de Lebesgue est stable par translation et la mesure de Lebesgue est invariante par translation.*

Démonstration Si $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a alors pour toute partie E de $\mathbb{R}$:

$$E \cap (\alpha + A) = \{y \in \mathbb{R} ; y = \alpha + x \in E \text{ où } x \in A\} = \alpha + A \cap (-\alpha + E)$$

$$E \setminus (\alpha + A) = \{y \in \mathbb{R} ; y \in E, x = -\alpha + y \notin A\} = \alpha + (-\alpha + E) \setminus A$$

donc :

$$\begin{aligned} & \ell^*(E \cap (\alpha + A)) + \ell^*(E \setminus (\alpha + A)) \\ &= \ell^*(\alpha + A \cap (-\alpha + E)) + \ell^*(\alpha + (-\alpha + E) \setminus A) \\ &= \ell^*(A \cap (-\alpha + E)) + \ell^*((-\alpha + E) \setminus A) = \ell^*(-\alpha + E) = \ell^*(E) \end{aligned}$$

puisque la mesure extérieure ℓ^* est invariante par translation, donc $\alpha + A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Il en résulte que λ qui est la restriction de ℓ^* à $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ est aussi invariante par translation. ■

La tribu de Lebesgue $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ est strictement contenue dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'il existe des parties de $\mathbb{R}$ non Lebesgue-mesurable. La justification de ce résultat utilise l'axiome du choix (voir les exercices 1.12 et 1.13).

Exemples 1.4

- Toute partie négligeable de $\mathbb{R}$ (i. e. telle que $\ell^*(A) = 0$) est Lebesgue-mesurable (de mesure nulle) d'après le théorème 1.17.
- Un théorème de Lebesgue nous dit qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow E$ où E est un espace de Banach est Riemann-intégrable si, et seulement si, l'ensemble de ses points de discontinuité est négligeable (théorème 8.13 de [36]).

- Une réunion dénombrable d'intervalles réels est Lebesgue-mesurable (voir l'exercice 1.11).
- Tout ouvert de $\mathbb{R}$ étant réunion dénombrable d'intervalles ouverts (théorème 2.4 de [36]), il est Lebesgue-mesurable. Par passage au complémentaire, il en résulte que tout fermé de $\mathbb{R}$ est Lebesgue-mesurable et en conséquence la mesure extérieure ℓ^* est métrique (théorème 1.18 de Carathéodory), ce qui signifie que l'on $\ell^*(A \cup B) = \ell^*(A) + \ell^*(B)$ pour tous sous-ensembles A, B de $\mathbb{R}$ tels que $d(A, B) > 0$.
- La tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ qui est engendrée par les ouverts est contenue dans la tribu de Lebesgue $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Le théorème qui suit nous donne des caractérisations des ensembles Lebesgue-mesurables utilisant les ouverts ou les fermés (voir aussi le théorème 1.15).

Théorème 1.23.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A est Lebesgue-mesurable ;
2. pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ qui contient A tel que $\ell^*(\mathcal{O} \setminus A) < \varepsilon$;
3. il existe une suite d'ouverts $(\mathcal{O}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_n$ contient A et $\ell^*(B \setminus A) = 0$;^a
4. pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un fermé $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}$ contenu dans A tel que $\ell^*(A \setminus \mathcal{F}) < \varepsilon$;
5. il existe une suite de fermés $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ est contenu dans A et $\ell^*(A \setminus C) = 0$;^b
6. A est la réunion d'un borélien et d'un négligeable.

a. Un tel ensemble B est appelé G_δ -ensemble.

b. Un tel ensemble C est appelé F_δ -ensemble.

Démonstration

(1) $\Rightarrow$ (2) Soit A Lebesgue-mesurable de mesure finie. Pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe une suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'intervalles telle que :

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \text{ et } \lambda(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n) < \lambda(A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour tout entier $n \geq 0$, l'intervalle I_n est borné et on peut trouver un intervalle ouvert $I_n(\varepsilon)$ tel que $I_n \subset I_n(\varepsilon)$ et $\ell(I_n(\varepsilon)) = \ell(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$ (pour I_n d'extrémités $a_n < b_n$, on prend $I_n(\varepsilon) =]a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+3}}, b_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+3}}[$). L'ensemble $\mathcal{O} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n(\varepsilon)$

est alors un ouvert qui contient A et on a :

$$\lambda(\mathcal{O}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n(\varepsilon)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n) + \frac{\varepsilon}{2} < \lambda(A) + \varepsilon$$

ce qui implique que $\ell^*(\mathcal{O} \setminus A) = \lambda(\mathcal{O} \setminus A) = \lambda(\mathcal{O}) - \lambda(A) < \varepsilon$.

Pour le cas général, on écrit que $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ où $A_n = A \cap [-n, n]$. Chaque ensemble A_n étant Lebesgue-mesurable de mesure finie, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathcal{O}_n$ de $\mathbb{R}$ qui contient A_n tel que $\ell^*(\mathcal{O}_n \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. L'ouvert

$\mathcal{O} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{O}_n$ contient alors A et on a :

$$\ell^*(\mathcal{O} \setminus A) = \ell^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (\mathcal{O}_n \setminus A)\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ell^*(\mathcal{O}_n \setminus A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Si la condition (2) est vérifiée, il existe alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ un ouvert $\mathcal{O}_n$ de $\mathbb{R}$ qui contient A tel que $\ell^*(\mathcal{O}_n \setminus A) < \frac{1}{n+1}$. L'ensemble $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_n$ contient alors A et on a :

$$\ell^*(B \setminus A) = \ell^*\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{O}_n \setminus A)\right) \leq \ell^*(\mathcal{O}_n \setminus A) < \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui implique que $\ell^*(B \setminus A) = 0$.

(3) $\Rightarrow$ (1) En supposant la condition (3) vérifiée, l'ensemble B est borélien donc Lebesgue-mesurable, l'ensemble $B \setminus A$ est négligeable donc Lebesgue-mesurable (théorème 1.17) et $A = B \setminus (B \setminus A)$ est Lebesgue-mesurable.

Les conditions (1), (2) et (3) sont donc équivalentes.

(1) $\Rightarrow$ (4) Si A est Lebesgue-mesurable, il en est alors de même $\mathbb{R} \setminus A$, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ qui contient $\mathbb{R} \setminus A$ tel que $\ell^*(\mathcal{O} \setminus (\mathbb{R} \setminus A)) < \varepsilon$. L'ensemble $\mathcal{F} = \mathbb{R} \setminus \mathcal{O}$ est alors un fermé contenu dans A tel que $\ell^*(A \setminus \mathcal{F}) = \ell^*(A \setminus (\mathbb{R} \setminus \mathcal{O})) = \ell^*(\mathcal{O} \setminus (\mathbb{R} \setminus A)) < \varepsilon$.

(4) $\Rightarrow$ (5) Si la condition (4) est vérifiée, il existe alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ un fermé $\mathcal{F}_n$ de $\mathbb{R}$ contenu dans A tel que $\ell^*(A \setminus \mathcal{F}_n) < \frac{1}{n+1}$. L'ensemble $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ est contenu dans A et on a :

$$\ell^*(A \setminus C) = \ell^*\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A \setminus \mathcal{F}_n)\right) \leq \ell^*(A \setminus \mathcal{F}_n) < \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui implique que $\ell^*(A \setminus C) = 0$.

(5) $\Rightarrow$ (6) En supposant la condition (5) vérifiée, l'ensemble C est borélien, l'ensemble $A \setminus C$ est négligeable et $A = C \cup (A \setminus C)$.

(6) $\Rightarrow$ (1) Si A est la réunion d'un borélien et d'un ensemble négligeable, il est alors Lebesgue-mesurable puisque qu'un borélien et un ensemble négligeable sont Lebesgue-mesurables.

Les conditions (1), (4), (5) et (6) sont donc équivalentes. $\blacksquare$

Corollaire 1.7. *Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est Lebesgue-mesurable de mesure finie si, et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de $\mathbb{R}$ contenu dans A et un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ qui contient A tels que $\ell^*(\mathcal{O} \setminus K) < \varepsilon$.*

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. Comme A est Lebesgue-mesurable, il existe un fermé $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}$ contenu dans A tel que $\ell^*(A \setminus \mathcal{F}) < \frac{\varepsilon}{2}$. On notant, pour tout entier $n \geq 1$, $K_n = \mathcal{F} \cap [-n, n]$, on définit une suite croissante de compacts de $\mathbb{R}$ (les K_n sont fermés et bornés) telle que $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n$ et $\ell^*(\mathcal{F}) = \lambda(\mathcal{F}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(K_n)$ (théorème 1.12). Dans le cas où A est de mesure finie, $\lambda(\mathcal{F})$ est fini et il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $\lambda(\mathcal{F}) - \frac{\varepsilon}{2} < \lambda(K_{n_0}) < \lambda(\mathcal{F}) + \frac{\varepsilon}{2}$, donc $K = K_{n_0}$ est un compact de $\mathbb{R}$ contenu dans A tel que :

$$\begin{aligned} \lambda(A \setminus K) &= \lambda(A) - \lambda(K) = (\lambda(A) - \lambda(\mathcal{F})) + (\lambda(\mathcal{F}) - \lambda(K)) \\ &= \lambda(A \setminus \mathcal{F}) + (\lambda(\mathcal{F}) - \lambda(K)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

En désignant par $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}$ qui contient A et tel que $\ell^*(\mathcal{O} \setminus A) < \varepsilon$, on aboutit à :

$$\ell^*(\mathcal{O} \setminus K) = \lambda(\mathcal{O} \setminus K) = \lambda((\mathcal{O} \setminus A) \cup (A \setminus K)) = \lambda(\mathcal{O} \setminus A) + \lambda(A \setminus K) < 2\varepsilon$$

Réciproquement soit $A \subset \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de $\mathbb{R}$ contenu dans A et un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ qui contient A tels que $\ell^*(\mathcal{O} \setminus K) < \varepsilon$. Dans ces conditions pour tout entier $n \geq 1$, il existe un compact K_n contenu dans A et un ouvert $\mathcal{O}_n$ qui contient A tels que $\ell^*(\mathcal{O}_n \setminus K_n) < \frac{1}{n}$. L'ensemble $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n$ est alors Lebesgue-mesurable contenu dans A et pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$A \setminus B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (A \setminus K_n) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (\mathcal{O}_n \setminus K_n) \subset \mathcal{O}_n \setminus K_n$$

donc :

$$\ell^*(A \setminus B) \leq \ell^*(\mathcal{O}_n \setminus K_n) < \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui nous donne $\ell^*(A \setminus B) = 0$. L'ensemble $A \setminus B$ est alors négligeable et en conséquence Lebesgue-mesurable. Il en résulte que $A = B \cup (A \setminus B)$ est Lebesgue-mesurable. En écrivant que $A = K_1 \cup (A \setminus K_1) \subset K_1 \cup (\mathcal{O}_1 \setminus K_1)$, on déduit que $\lambda(A) \leq \lambda(K_1) + \lambda(\mathcal{O}_1 \setminus K_1) < \lambda(K_1) + 1 < +\infty$ (un compact est Lebesgue-mesurable de mesure finie). $\blacksquare$

De manière plus générale, la fonction d'ensemble définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ par :

$$\nu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k} \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu(P_k) \in \overline{\mathbb{R}_+}$$

la borne inférieure étant prise sur toutes les suites $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de pavés telles que $A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k$ est une mesure extérieure qui coïncide avec ν sur $\mathcal{P}$.

Cette mesure extérieure est invariante par translation.

L'espace mesuré $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}_{\nu^*}, \nu^*)$ associé à la mesure extérieure ν^* (théorème 1.16 de Carathéodory) est l'espace mesuré de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. La tribu $\mathcal{A}_{\nu^*}$ est la tribu de Lebesgue, la mesure ν^* sur cette tribu est la mesure de Lebesgue et les éléments de $\mathcal{A}_{\nu^*}$ sont dits *Lebesgue-mesurables*. On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{A}_{\nu^*}$ la tribu de Lebesgue et $\lambda_n = \nu^*$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

La suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de pavés ouverts définie par $P_k =]-k, k[^n$ est croissante telle que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k$, donc deux mesures σ -finies μ et ν sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ telles l'on ait

$\mu(P) = \nu(P) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$ pour tout pavé P sont égales sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. La mesure de Lebesgue est l'unique mesure σ -finie sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ qui prolonge la fonction volume ν .

Théorème 1.24.

Pour tout borélien $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, tout point $a \in \mathbb{R}^n$ et tout réel non nul α , on a $\lambda_n(a + \alpha B) = |\alpha|^n \lambda_n(B)$.

Démonstration La fonction $\varphi : x \mapsto a + \alpha x$ réalisant un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ pour $\alpha \neq 0$, on en déduit que pour tout borélien B de $\mathbb{R}^n$ l'ensemble $a + \alpha B = f(B) = (f^{-1})^{-1}(B)$ est un borélien.

On vérifie dans un premier temps que la fonction d'ensemble μ définie sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ par $\mu(B) = \frac{\lambda_n(f(B))}{|\alpha|^n}$ est une mesure. En effet, on a $\mu(\emptyset) = \frac{\lambda_n(\{a\})}{|\alpha|^n} = 0$ et pour toute suite $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de boréliens deux à deux disjoints, on a :

$$|\alpha|^n \mu\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \lambda_n\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} (a + \alpha B_k)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_n(a + \alpha B_k) = |\alpha|^n \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(B_k)$$

Pour tout pavé $P = \prod_{k=1}^n I_k$, $f(P) = \prod_{k=1}^n (a + \alpha I_k)$ est un pavé et on a :

$$|\alpha|^n \mu(P) = \lambda_n(f(P)) = \prod_{k=1}^n \ell(a + \alpha I_k) = \prod_{k=1}^n |\alpha| \ell(I_k) = |\alpha|^n \nu(P)$$

La mesure μ est donc σ -finie égale à ν sur les pavés, ce qui implique que $\mu = \lambda_n$. ■

Le résultat précédent pour $\alpha = 1$ nous dit que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est invariante par translation.

De manière un peu plus générale, on peut vérifier que pour toute application affine $\varphi : x \mapsto a + Mx$ sur $\mathbb{R}^n$ où $a \in \mathbb{R}^n$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout borélien $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, on a $\lambda_n(a + MB) = |\det(M)|^n \lambda_n(B)$.

Le théorème qui suit (généralisation du corollaire 1.7 à $\mathbb{R}^n$) nous sera utile pour montrer la densité des fonctions continues à support compact dans les espaces normés $\mathbb{L}^p$ où $p \in [1, +\infty[$ (voir le paragraphe 4.4).

Lemme 1.12 *Pour tout pavé P de mesure finie dans $\mathbb{R}^n$ et tout réel $\eta > 0$, il existe un pavé ouvert Q contenant P tel que $\lambda_n(Q) < \lambda_n(P) + \eta$.*

Démonstration Soit $P = \prod_{j=1}^n I_j$ un pavé de mesure finie dans $\mathbb{R}^n$ où les I_j sont des intervalles réels bornés d'extrémités $a_j \leq b_j$. Pour tout réel $\delta > 0$ le pavé ouvert $Q_\delta = \prod_{j=1}^n]a_j - \delta, b_j + \delta[$ qui contient P est tel que $\lambda_n(Q_\delta) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j + 2\delta)$. La fonction $\delta \mapsto \lambda_n(Q_\delta)$ étant continue croissante telle que $\lambda_n(Q_0) = \lambda_n(P)$, il existe pour tout réel $\eta > 0$ un réel δ tel que $\lambda_n(Q_\delta) < \lambda_n(P) + \eta$. ■

Théorème 1.25. Régularité de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

Pour tout borélien $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ de mesure finie et tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$ qui contient A et un compact K de $\mathbb{R}^n$ contenu dans A tels que $\lambda_n(\mathcal{O} \setminus K) < \varepsilon$.

Démonstration Soient $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ de mesure finie et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

1. On a $\lambda_n(A) = \inf_{A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k} \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_n(P_k) < +\infty$, donc il existe une suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de pavés de $\mathbb{R}^n$ telle que $A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k$ et $\lambda_n(A) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_n(P_k) < \lambda_n(A) + \frac{\varepsilon}{4}$ et le lemme précédent nous dit qu'il existe une suite $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de pavés ouverts de $\mathbb{R}^n$ telle que $P_k \subset Q_k$ et $\lambda_n(Q_k) < \lambda_n(P_k) + \frac{1}{2^{k+1}} \frac{\varepsilon}{4}$. L'ensemble $\mathcal{O} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ est alors un ouvert qui contient A et on a :

$$\begin{aligned} \lambda_n(\mathcal{O}) &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_n(Q_k) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_n(P_k) + \frac{\varepsilon}{4} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{k+1}} \\ &< \lambda_n(A) + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \lambda_n(A) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

2 On vérifie ensuite qu'il existe un pavé compact P tel que $\lambda_n(A \setminus (P \cap A)) < \frac{\varepsilon}{4}$. Désignant par $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite de pavés compacts définie par $R_k = [-k, k]^n$, on a $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} R_k$ et $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} A \cap R_k$, la suite de mesurables $(A \cap R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ étant croissante ce qui implique que $\lambda_n(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_n(A \cap R_k)$ dans $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_n(A \setminus (A \cap R_k)) = 0$. Pour k assez grand, on aura $\lambda_n(A \setminus (A \cap R_k)) < \frac{\varepsilon}{4}$.

3. Le premier point appliqué au borélien $P \setminus A$ nous assure l'existence d'un ouvert $\mathcal{O}'$ contenant $P \setminus A$ tel que $\lambda_n(\mathcal{O}') < \lambda_n(P \setminus A) + \frac{\varepsilon}{4}$ (en remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{2}$).

L'ensemble $K = P \setminus \mathcal{O}' = P \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}')$ est alors un compact (intersection d'un compact et d'un fermé) qui est contenu dans A (car $P \setminus A \subset \mathcal{O}'$ entraîne $P \setminus \mathcal{O}' \subset P \setminus (P \setminus A) \subset A$) et on a $A \setminus K = ((A \setminus K) \cap P) \cup ((A \setminus K) \cap (\mathbb{R}^n \setminus P))$ avec $(A \setminus K) \cap (\mathbb{R}^n \setminus P) \subset A \cap (\mathbb{R}^n \setminus P) = A \setminus (P \cap A)$ et $(A \setminus K) \cap P \subset \mathcal{O}' \setminus (P \setminus A)$ puisque :

$$\begin{aligned} (x \in (A \setminus K) \cap P) &\Leftrightarrow (x \in A, x \notin K = P \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}'), x \in P) \\ &\Leftrightarrow (x \in A, x \in P, x \notin \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}') \Rightarrow (x \in \mathcal{O}', x \notin P \setminus A) \end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$\lambda_n(A \setminus K) \leq \lambda_n(\mathcal{O}' \setminus (P \setminus A)) + \lambda_n(A \setminus (P \cap A)) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

4. Il en résulte que $\lambda_n(\mathcal{O} \setminus K) = \lambda_n(\mathcal{O} \setminus A) + \lambda_n(A \setminus K) < \varepsilon$. ■

Avec la démonstration précédente, on a aussi montré que :

$$\begin{aligned} \lambda_n(A) &= \sup \{ \lambda_n(K), K \text{ compact dans } \mathbb{R}^n \text{ tel que } K \subset A \} \\ &= \inf \{ \lambda_n(\mathcal{O}), \mathcal{O} \text{ ouvert dans } \mathbb{R}^n \text{ tel que } A \subset \mathcal{O} \} \end{aligned}$$

pour tout borélien A de mesure finie. Voir aussi le théorème 1.15.

1.9 Propriétés vraies presque partout

Nous avons déjà défini la notion de partie négligeable relativement à une mesure extérieure (définition 1.10). De manière plus générale, on a la définition suivante pour un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Définition 1.14. On dit qu'une partie N de X est *négligeable* (ou plus précisément qu'elle est μ -négligeable) si elle est contenue dans une partie mesurable de X de mesure nulle.

Avec la définition précédente, une partie négligeable n'est pas nécessairement mesurable.

Un sous-ensemble d'une partie négligeable est négligeable, une union dénombrable ou une intersection dénombrable de parties négligeables est négligeable.

Dans le cas où toute partie négligeable est mesurable (donc de mesure nulle), on dit que l'espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est *complet*.¹

Exemples 1.5

- Pour tout $x \in X$, l'espace mesuré $(X, \mathcal{P}(X), \delta_x)$ où $\delta_x : A \mapsto \mathbf{1}_A(x)$ est la mesure de Dirac (exemples 1.3) est complet. Toute partie de X est mesurable et les ensembles négligeables sont ceux qui ne contiennent pas x .

1. Cette notion de complétude n'a rien à voir avec la notion d'espace métrique complet.

- L'espace mesuré $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ où $\mu : A \mapsto \text{card}(A)$ est la mesure de comptage (exemples 1.3) est complet. Toute partie de X est mesurable et l'ensemble vide est le seul négligeable.
- L'espace mesuré $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu)$ associé à une mesure extérieure μ^* (voir le théorème 1.16 de Carathéodory) est complet (théorème 1.17). En particulier l'espace mesuré $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ où λ_n est la mesure de Lebesgue sur la tribu de Lebesgue $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est complet.

Il est toujours possible de prolonger une mesure pour que l'espace mesuré associé soit complet (voir [9]).

Définition 1.15. On dit qu'une propriété $\mathcal{Q}$ sur X est vraie *presque partout* (ou plus précisément qu'elle est vraie μ -presque partout) si elle est vraie sur X privé d'une partie mesurable de mesure nulle.

Dans un espace mesuré complet, une propriété $\mathcal{Q}$ sur X est vraie presque partout si elle est vraie sur X privé d'une partie négligeable de X .

Exemple 1.3 Une fonction $f : [a, b] \rightarrow E$ où E est un espace de Banach est Riemann-intégrable si, et seulement si, elle est continue presque partout pour la mesure de Lebesgue λ sur $[a, b]$ (théorème 8.13 de [36]).

1.10 Exercices

Exercice 1.1. Soit $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite finie de parties de X . Montrer que pour toute partie A de X , $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une partition de A si, et seulement

$$\text{si, on a } \mathbf{1}_A = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}.$$

Solution. Supposons que $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ soit une partition de A , c'est-à-dire que $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$, les A_k étant deux à deux disjoints. Dans ce cas, pour tout entier k compris entre 1 et n et tout multi-indice $(i_1, \dots, i_k)$ tel que $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, l'intersection $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$ est vide, ce qui nous donne $\mathbf{1}_A = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}$ d'après la formule de Poincaré (théorème 1.2). Réciproquement si $\mathbf{1}_A = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}$, les A_k sont alors deux à deux disjoints. En effet, s'il existe $k \neq j$ tels que $A_k \cap A_j \neq \emptyset$, on a alors pour $x \in A_k \cap A_j$:

$$\mathbf{1}_A(x) = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}(x) \geq \mathbf{1}_{A_k}(x) + \mathbf{1}_{A_j}(x) = 2$$

ce qui est impossible. Si $x \in \bigcup_{k=1}^n A_k$, il existe alors un indice j compris entre 1 et n tel que $x \in A_j$, donc $\mathbf{1}_A(x) = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}(x) \geq \mathbf{1}_{A_j}(x) = 1$, ce qui impose $\mathbf{1}_{A_k}(x) = 0$ pour $k \neq j$ et $\mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_{A_j}(x) = 1$, ce qui prouve que $\bigcup_{k=1}^n A_k \subset A$. Pour $x \in A$, on a $1 = \mathbf{1}_A(x) = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}(x)$, donc il existe un unique j compris entre 1 et n tel que $\mathbf{1}_{A_j}(x) = 1$, ce qui signifie que x est dans A_j et $x \in \bigcup_{k=1}^n A_k$, donc $A \subset \bigcup_{k=1}^n A_k$ et on a l'égalité $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$, les A_k étant deux à deux disjoints.

Exercice 1.2. Montrer qu'il n'existe pas de bijection de X sur $\mathcal{P}(X)$ (théorème de Cantor). On en déduit en particulier que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ne sont pas dénombrables.

Solution. Supposons qu'il existe une bijection φ de X sur $\mathcal{P}(X)$. Le sous-ensemble A de X défini par $A = \{x \in X, x \notin \varphi(x)\}$ a alors un antécédent x_0 par φ et on a :

$$(x_0 \in A) \Leftrightarrow (x_0 \in \varphi(x_0)) \Leftrightarrow (x_0 \notin A)$$

ce qui n'est pas possible. En particulier $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas équipotent à $\mathbb{N}$ et il en est de même de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ qui est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.² On peut aussi vérifier en utilisant les développements dyadiques que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est équipotent à $[0, 1]$.

Exercice 1.3. Soit $\mathcal{C}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$ qui contient X , qui est stable par intersections finies et telle que pour tout $A \in \mathcal{C}$, le complémentaire $X \setminus A$ est une réunion finie d'éléments de $\mathcal{C}$ deux à deux disjoints. Montrer que :

1. l'ensemble $\mathcal{B}$ de toutes les réunions finies d'éléments de $\mathcal{C}$ deux à deux disjoints est une algèbre de Boole ;
2. $\mathcal{B}$ est l'algèbre de Boole engendrée par $\mathcal{C}$;
3. $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{B})$.

Solution.

1. X est dans $\mathcal{C}$ qui est contenu dans $\mathcal{B}$. Si A et B sont dans $\mathcal{B}$, il existe alors deux suites $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(B_k)_{1 \leq k \leq m}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ deux à deux disjoints telles que $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ et $B = \bigcup_{k=1}^m B_k$, de sorte que $A \cap B = \bigcup_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq m}} A_j \cap B_k$,

² L'application qui associe à une partie A d'un ensemble X sa fonction caractéristique $\mathbf{1}_A$ réalise une bijection de $\mathcal{P}(X)$ sur $\{0, 1\}^X$.

les $A_j \cap B_k$ étant dans $\mathcal{C}$ qui est stable par intersections finies et deux à deux disjoints (pour $(j, k) \neq (j', k')$ on a $A_j \cap B_k \cap A_{j'} \cap B_{k'} = \emptyset$), donc $A \cap B \in \mathcal{B}$. Il

en résulte que $\mathcal{B}$ est stable par intersections finies. On a $X \setminus A = \bigcap_{k=1}^n (X \setminus A_k)$,

les $X \setminus A_k$ étant réunions finies d'éléments de $\mathcal{C}$ deux à deux disjoints, donc dans $\mathcal{B}$, ce qui implique que $X \setminus A \in \mathcal{B}$ (stabilité par intersections finies) et $B \setminus A = B \cap (X \setminus A) \in \mathcal{B}$.

2. L'algèbre de Boole $\mathcal{B}'$ engendrée par $\mathcal{C}$ est contenue dans l'algèbre de Boole $\mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B}'$ contient $\mathcal{C}$ et est stable par réunions finies, elle contient $\mathcal{B}$ et on a l'égalité $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$.
3. On a $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, donc $\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{B})$ et $\mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{C})$, donc $\sigma(\mathcal{B}) \subset \sigma(\mathcal{B})$.

Exercice 1.4. Montrer que si l'ensemble X est dénombrable, la tribu engendrée par les singletons est alors $\mathcal{P}(X)$ et si X est non dénombrable, cette tribu est alors $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(X), A \text{ ou } X \setminus A \text{ est dénombrable}\}$.

Solution. On note $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ la tribu engendrée par les singletons de X .

1. Si X est dénombrable, tout $A \in \mathcal{P}(X)$ qui s'écrit comme réunion dénombrable de singletons est alors dans $\mathcal{A}$, ce qui nous dit que $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{A}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$.
2. Pour X non dénombrable on note :

$$\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{P}(X), A \text{ ou } X \setminus A \text{ est dénombrable}\}$$

et on vérifie que $\mathcal{B}$ est une tribu sur X qui contient les singletons de X , donc que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Comme $\emptyset$ est dénombrable, il est dans $\mathcal{B}$. Soit $A \in \mathcal{B}$. Si A est dénombrable, alors $X \setminus A$ est de complémentaire dénombrable, donc $X \setminus A \in \mathcal{B}$, sinon $X \setminus A$ est dénombrable et $X \setminus A \in \mathcal{B}$. La famille $\mathcal{B}$ est donc stable par passage au complémentaire. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. On a :

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ A_n \text{ dénombrable}}} A_n \cup \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ X \setminus A_n \text{ dénombrable}}} A_n = B \cup C$$

avec B qui est dénombrable et C qui est de complémentaire dénombrable puisque l'on a $X \setminus C = \bigcap_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ X \setminus A_n \text{ dénombrable}}} (X \setminus A_n)$. Si $C = \emptyset$, on a $A = B \in \mathcal{B}$,

sinon $X \setminus A = (X \setminus B) \cap (X \setminus C) \subset X \setminus C$ est dénombrable, donc $A \in \mathcal{B}$. Un singleton qui est dénombrable est dans $\mathcal{B}$. Si $A \in \mathcal{B}$ est dénombrable, il est alors réunion dénombrable de singletons, donc dans $\mathcal{A}$, sinon c'est $X \setminus A$ qui est dans $\mathcal{A}$ et $A = X \setminus (X \setminus A)$ est aussi dans $\mathcal{A}$. On a donc $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Exercice 1.5. Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur X dénombrable. Pour tout $x \in X$, on définit l'atome de x par $A(x) = \bigcap_{A \in \mathcal{A}, x \in A} A$.

1. Montrer que, pour tout $x \in X$, $A(x)$ est le plus petit élément de $\mathcal{A}$ qui contient x .
2. Soient x, y dans X . Montrer que si $y \in A(x)$, on a alors $A(x) = A(y)$.
3. Montrer que, pour tous x, y dans X , on a soit $A(x) \cap A(y) = \emptyset$, soit $A(x) = A(y)$.
4. En désignant par $(x_i)_{i \in I}$ la famille des éléments de X telle que les $A(x_i)$ soient deux à deux disjoints, montrer que cette famille est dénombrable et que pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a une partition $A = \bigcup_{j \in J} A(x_j)$, où J est une partie de I .
5. En déduire que $\mathcal{A}$ est finie, son cardinal étant une puissance de 2. Une tribu sur X est donc finie ou non dénombrable.

Solution. Comme $x \in X \in \mathcal{A}$, il existe des éléments de $\mathcal{A}$ qui contiennent x et $A(x)$ est bien défini contenant x .

1. La tribu $\mathcal{A}$ étant dénombrable, l'ensemble $A(x)$ qui est une intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{A}$. Si B est un élément de $\mathcal{A}$ qui contient x , il fait alors partie des éléments de $\mathcal{A}$ qui apparaissent dans l'intersection $A(x)$, donc $A(x) \subset B$.
2. Si $y \in A(x)$, l'ensemble $A(x)$ est un élément de $\mathcal{A}$ qui contient x , on a donc $A(y) \subset A(x)$. Si $x \notin A(y)$, l'ensemble $A(x) \setminus A(y)$ est dans $\mathcal{A}$ contenant x , donc $A(x) \subset A(x) \setminus A(y)$, ce qui contredit le fait que $y \in A(x)$ et $y \in A(y)$. On a donc $x \in A(y)$ et $A(x) \subset A(y)$, d'où l'égalité $A(x) = A(y)$.
3. Si $A(x) \cap A(y) = \emptyset$, c'est alors terminé. Sinon, pour tout $z \in A(x) \cap A(y)$, on a $A(x) = A(z) = A(y)$.
4. Comme les $A(x)$ sont dans $\mathcal{A}$ qui est dénombrable, la famille $(A(x))_{x \in X}$ est aussi dénombrable et comme deux de ces ensembles sont disjoints ou confondus, il existe une partie I de $\mathbb{N}$ telle que $(A(x))_{x \in X} = (A(x_i))_{i \in I}$ (axiome du choix dénombrable : on choisit un représentant de chaque classe dans la relation d'équivalence « être dans le même $A(x)$ »), les $A(x_i)$ étant deux à deux disjoints. On a alors une partition $X = \bigcup_{i \in I} A(x_i)$ et tout $A \in \mathcal{A}$ s'écrit $A = \bigcup_{j \in J} A(x_j)$ où $J \subset I$.
5. Si I est infini, on peut prendre $I = \mathbb{N}$ et l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\rightarrow \mathcal{A} \\ J &\mapsto \bigcup_{j \in J} A(x_j) \end{aligned}$$

est bijective. En effet, elle est surjective car tout $A \in \mathcal{A}$ s'écrit $A = \bigcup_{j \in J} A(x_j)$

où $J \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et pour $J \neq K$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, on a $\varphi(J) \neq \varphi(K)$ puisque les $A(x_i)$, pour $i \in \mathbb{N}$, sont non vides et deux à deux disjoints. Comme $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est

non dénombrable, on aboutit à une contradiction. Donc I est fini et il en est de même de $\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{j \in J} A(x_j), J \subset I \right\}$. Précisément, on a :

$$\text{card}(\mathcal{A}) = \text{card}(\mathcal{P}(I)) = 2^{\text{card}(I)}$$

En conclusion, une tribu dénombrable sur X est nécessairement finie de cardinal égal à une puissance de 2.

Exercice 1.6. Montrer que la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ est engendrée par la famille des intervalles de la forme $]-\infty, y]$ où y décrit $\mathbb{R}$ et qu'elle est aussi engendrée par la famille des intervalles de la forme $[x, y]$ où $x < y$ dans $\mathbb{R}$, soit $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma\{]-\infty, y], y \in \mathbb{R}\} = \sigma\{[x, y], x < y \text{ dans } \mathbb{R}\}$.

Solution. On note $\mathcal{A}_1 = \{]-\infty, y], y \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{A}_2 = \{[x, y], x < y \text{ dans } \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{A}$ est l'ensemble de tous les intervalles réels ouverts. Pour $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $y > x$, on a $[x, y] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] x, y + \frac{1}{n} \right[\in \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, donc $\sigma(\mathcal{A}_k) \subset \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ pour $k = 1$ et $k = 2$. L'inclusion réciproque $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathcal{A}_1)$ se déduit de :

- $]-\infty, x[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\infty, x - \frac{1}{n} \right[\in \sigma(\mathcal{A}_1)$;
- $[x, +\infty[= \mathbb{R} \setminus]-\infty, x] \in \sigma(\mathcal{A}_1)$;
- $[x, y[= [x, +\infty[\cap]-\infty, y[\in \sigma(\mathcal{A}_1)$ pour $x \leq y$ (c'est $\emptyset$ pour $x = y$).

On procède de manière analogue pour l'inclusion $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathcal{A}_2)$. On peut aussi montrer directement que $\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2)$.

Exercice 1.7.

1. Montrer que, pour tout $x \in X$, l'application $\delta_x : \mathcal{P}(X) \rightarrow \{0, 1\}$ définie par $\delta_x(A) = \mathbf{1}_A(x)$ est une mesure finie sur $\mathcal{P}(X)$. C'est la mesure de Dirac en x .
2. Soit $X = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable.
 - (a) Montrer que pour toute suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls tels que la série $\sum p_n$ soit convergente, l'application $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $\mu(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A)$ est une mesure finie sur $\mathcal{P}(X)$.
 - (b) Réciproquement, montrer que toute mesure finie μ sur $\mathcal{P}(X)$ peut s'exprimer sous la forme $\mu(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A)$ (i. e. pour X dénombrable, toute mesure finie est une série pondérée de mesures de Dirac).

Solution.

1. Comme $x \notin \emptyset$, on a $\delta_x(\emptyset) = 0$. Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}(X)$ deux à deux disjoints et $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. Si $x \notin A$, on a alors $x \notin A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\delta_x(A_n) = 0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_x(A_n) = 0 = \delta_x(A)$. Si $x \in A$, il existe alors un unique entier n_0 tel que $x \in A_{n_0}$, donc $\delta_x(A_{n_0}) = 1$ et $\delta_x(A_n) = 0$ pour tout $n \neq n_0$, ce qui nous donne $\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_x(A_n) = 1 = \delta_x(A)$. En définitive, δ_x est bien une mesure sur $\mathcal{P}(X)$. Comme $\delta_x(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n < +\infty$, cette mesure est finie.

2.

- (a) Comme $\sum p_n$ converge et $0 \leq p_n \delta_{x_n}(A) \leq p_n$ pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la série définissant $\mu(A)$ est bien définie et en particulier on a $\mu(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n < +\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\delta_{x_n}(\emptyset) = 0$, donc $\mu(\emptyset) = 0$. Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints et $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. En notant $u_{n,m} = p_n \delta_{x_n}(A_m)$ pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} = \sum_{m=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A_m) = p_n \sum_{m=0}^{+\infty} \delta_{x_n}(A_m) = p_n \delta_{x_n}(A) < +\infty$$

$$\text{et } \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} p_n < +\infty, \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A_m) \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A_m) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mu(A_m) \end{aligned}$$

En conclusion μ est une mesure finie sur $\mathcal{P}(X)$.

- (b) Il suffit de poser $p_n = \mu(\{x_n\})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a bien :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(\{x_n\}) = \mu(X) < +\infty$$

et pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, on a $\mu(A) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ x_n \in A}} \mu(\{x_n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A)$. En

fait, ce résultat est encore valable pour $\mu(X) = +\infty$.

Exercice 1.8. Soit X un ensemble non dénombrable et :

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(X), A \text{ ou } X \setminus A \text{ est dénombrable}\}$$

la tribu engendrée par les singletons de X (exercice 1.4). Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{A} &\rightarrow \{0, 1\} \\ A &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable} \\ 1 & \text{si } X \setminus A \text{ est dénombrable} \end{cases} \end{aligned}$$

est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

Solution. On a $\mu(\emptyset) = 0$ car $\emptyset$ est dénombrable. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints, dans le cas où tous les A_n sont dénombrables, il en est de même de $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et on a $\mu(A) = 0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$, sinon, il existe un A_n non dénombrable et $X \setminus A_n$ est dénombrable et comme $A_m \cap A_n = \emptyset$ pour $m \neq n$, on a $A_m \subset X \setminus A_n$ et A_m est dénombrable, donc $\mu(A) = 1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ (A qui contient A_n est non dénombrable, donc $X \setminus A$ est dénombrable puisque $A \in \mathcal{A}$).

Exercice 1.9. Soient μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \mu([x, +\infty[)$.

1. Montrer que F est décroissante avec, pour tout réel x :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t < x}} F(t) = F(x), \quad \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t > x}} F(t) = F(x) - \mu(\{x\})$$

$$\text{et } \lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = \mu(\mathbb{R}), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 0.$$

2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}, \mu(\{x\}) > 0\}$ est dénombrable.

Solution.

1. Pour tous $x \leq y$ on a $[y, +\infty[\subset [x, +\infty[$, donc $F(y) \leq F(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\left(\left[x - \frac{1}{n}, +\infty \right] \right)_{n \geq 1}$ est décroissante dans la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ avec

$$\mu([x-1, +\infty[) \leq \mu(\mathbb{R}) < +\infty \text{ et } [x, +\infty[= \bigcap_{n \geq 1} \left[x - \frac{1}{n}, +\infty \right], \text{ donc :}$$

$$F(x) = \mu([x, +\infty[) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu\left(\left[x - \frac{1}{n}, +\infty \right]\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F\left(x - \frac{1}{n}\right)$$

et comme F est décroissante, on en déduit que $\lim_{t \rightarrow x^-} F(t) = F(x)$, c'est-à-dire que F est continue à gauche en x . Avec les mêmes arguments, on a :

$$\begin{aligned}\mu([x, +\infty[) &= \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} \left[x + \frac{1}{n}, +\infty\right[\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu\left(\left[x + \frac{1}{n}, +\infty\right[\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} F\left(x + \frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

et $\lim_{t \rightarrow x^+} F(t) = \mu([x, +\infty[) = \mu([x, +\infty[\setminus \{x\}) = F(x) - \mu(\{x\})$. Comme la suite $([-n, +\infty[)_{n \geq 1}$ est croissante et la suite $([n, +\infty[)_{n \geq 1}$ est décroissante dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}\mu(\mathbb{R}) &= \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} [-n, +\infty[\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu([-n, +\infty[) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(-n) \\ 0 &= \mu(\emptyset) = \mu\left(\bigcap_{n \geq 1} [n, +\infty[\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu([n, +\infty[) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(n)\end{aligned}$$

soit avec la décroissance de F , $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \mu(\mathbb{R})$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

2. L'ensemble des points de discontinuité de F est dénombrable puisque cette fonction est décroissante (donc réglée). Mais F est continue en x si, et seulement si, $\lim_{t \rightarrow x^+} F(t) = \lim_{t \rightarrow x^-} F(t) = F(x)$, ce qui revient à dire que $\mu(\{x\}) = 0$, donc $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points de discontinuité de F et il est dénombrable.

Exercice 1.10. Pour tous réels $a < b$, on désigne par $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par $\mathcal{A}$ la famille des parties de $\mathbb{R}^2$ de la forme :

$$A(f, g) = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

où f et g sont dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telles que $f \leq g$ et on note :

$$\mu(A(f, g)) = \int_a^b (g(t) - f(t)) dt$$

Montrer que cette application μ est σ -additive sur $\mathcal{A}$.

Solution. Pour f, g dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telles que $f \leq g$ on a :

$$\mu(A(f, g)) = \int_a^b (g(t) - f(t)) dt = \int_a^b \ell([f(t), g(t)]) dt$$

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telles que $f_n \leq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et f, g dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telles que $f \leq g$ et $A(f, g) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A(f_n, g_n)$

étant deux à deux disjoints. Dans ces conditions, on a :

$$\forall t \in [a, b], [f(t), g(t)] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [f_n(t), g_n(t)]$$

En effet, pour tout $t \in [a, b]$ et tout $y \in [f(t), g(t)]$, on a $(t, y) \in A(f, g)$, donc il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $(t, y) \in A(f_n, g_n)$, ce qui signifie que $y \in [f_n(t), g_n(t)]$. Réciproquement si $y \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [f_n(t), g_n(t)]$, il existe alors un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $y \in [f_n(t), g_n(t)]$, donc $(t, y) \in A(f_n, g_n) \subset A(f, g)$ et $y \in [f(t), g(t)]$. On en déduit alors que :

$$\forall t \in [a, b], \ell([f(t), g(t)]) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell([f_n(t), g_n(t)])$$

les fonctions $t \mapsto \ell([f_n(t), g_n(t)])$ étant continues et positives. Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \mu(A(f, g)) &= \int_a^b \ell([f(t), g(t)]) dt = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_a^b \ell([f_n(t), g_n(t)]) dt \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A(f_n, g_n)) \end{aligned}$$

La fonction μ est donc σ -additive sur $\mathcal{A}$.

Exercice 1.11. Montrer qu'une réunion dénombrable d'intervalles réels est Lebesgue-mesurable.

Solution. La tribu de Lebesgue étant justement une tribu, il nous suffit de vérifier que tout intervalle réel est mesurable. L'ensemble vide étant mesurable, il en est de même de son complémentaire $\mathbb{R}$. Si I est un intervalle réel borné, il est alors de la forme $[a, b]$ ou $[a, b[$ ou $]a, b[$ ou $]a, b]$ et c'est le complémentaire de $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ ou $\dots$. Il nous suffit donc de vérifier que tout intervalle de la forme $]-\infty, a)$ ou $(b, +\infty[$ (ouvert ou fermé en a et b) est Lebesgue-mesurable. Le deuxième type d'intervalle étant complémentaire du premier type, il suffit de vérifier que tout intervalle de la forme $I =]-\infty, a)$ est Lebesgue-mesurable, soit que pour toute partie E de $\mathbb{R}$, on a l'inégalité $\ell^*(E) \geq \ell^*(E \cap I) + \ell^*(E \setminus I)$. Cette inégalité étant automatiquement vérifiée dans le cas où $\ell^*(E) = +\infty$, on suppose que $\ell^*(E) < +\infty$ et dans ce cas pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une suite d'intervalles $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ et $\ell^*(E) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n) < \ell^*(E) + \varepsilon$.

Toutes les intersections $I \cap I_n$ étant des intervalles (éventuellement vides), on a par croissance et sous-additivité de ℓ^* :

$$\ell^*(E \cap I) \leq \ell^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \cap I\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell^*(I_n \cap I) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n \cap I)$$

$$\ell^*(E \setminus I) \leq \ell^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (I_n \setminus I)\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell^*(I_n \setminus I) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n \setminus I)$$

ce qui nous donne :

$$\ell^*(I \cap E) + \ell^*(E \setminus I) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (\ell(I_n \cap I) + \ell(I_n \setminus I)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n) < \ell^*(E) + \varepsilon$$

Le réel $\varepsilon > 0$ étant quelconque, il en résulte que $\ell^*(E \cap I) + \ell^*(E \setminus I) \leq \ell^*(E)$.

Exercice 1.12. Dans le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$, on désigne par H un supplémentaire de la droite vectorielle $\mathbb{Q} \cdot 1$ (utilisation de l'axiome du choix).

1. Montrer qu'il existe un sous-ensemble A de $[0, 1[$ tel que tout réel x puisse s'écrire de façon unique $x = r + a$ avec $r \in \mathbb{Q}$ et $a \in A$.
2. Montrer que les translatés $r + A$, où r décrit $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$, sont deux à deux disjoints et que $B = \bigcup_{r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}} (r + A) \subset [0, 2[$.
3. En déduire que A n'est pas Lebesgue-mesurable.

Solution.

1. Tout $x \in \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cdot 1 \oplus H$ s'écrit de façon unique $x = s + h$ avec $s \in \mathbb{Q}$ et $h \in H$. En désignant par $[h] \in \mathbb{Z}$ la partie entière du réel h , on a $0 \leq a = h - [h] < 1$ et $x = ([h] + s) + a$ avec $[h] + s \in \mathbb{Q}$ et $a \in A \subset [0, 1[$ où A est l'image de H par l'application $\varphi : x \mapsto x - [h]$. On vérifie qu'une telle écriture est unique. Si $x = r + a = r' + a'$, avec r, r' dans $\mathbb{Q}$ et $a = h - [h]$, $a' = h' - [h']$ dans $A = \varphi(H)$ (avec h, h' dans H), on a alors $r' - r = a - a' = h - h' - [h] + [h']$, soit $r' - r + [h] - [h'] = h - h' \in \mathbb{Q} \cdot 1 \cap H = \{0\}$, ce qui nous donne $h = h'$ et $r = r'$.
2. De l'unicité de l'écriture des réels sous la forme $x = r + a$ avec $(r, a) \in \mathbb{Q} \times A$, on déduit que les translatés $r + A$, où r décrit $\mathbb{Q}$, sont deux à deux disjoints. Comme A est contenu dans $[0, 1[$, on a $B = \bigcup_{r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}} (r + A) \subset [0, 2[$.
3. Si A est Lebesgue-mesurable, il en est alors de même de tous les $r + A$ ($\mathcal{L}(\mathbb{R})$ est stable par translation) et la réunion dénombrable B est un ensemble Lebesgue-mesurable contenu dans $[0, 2[$, donc $\ell(B) \leq 2$, ce qui impose $\ell(A) = 0$ (sinon $\ell(B) = \sum_{r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}} \ell(r + A) = \sum_{r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}} \ell(A) = +\infty$), mais cela est incompatible avec $\mathbb{R} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (r + A)$. L'ensemble borné A n'est donc pas Lebesgue-mesurable.

Exercice 1.13. On désigne par $\mathcal{C}$ le groupe quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

1. Vérifier que pour toute classe d'équivalence $c \in \mathcal{C}$, on peut trouver un représentant x dans $[0, 1[$.
Pour tout $c \in \mathcal{C}$, on se fixe un représentant x_c de c dans $[0, 1[$ (axiome du choix) et on désigne par A l'ensemble de tous ces réels x_c .

2. Montrer que les translatés $r + A$, où r décrit $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$, sont deux à deux disjoints et que $[0, 1] \subset \bigcup_{r \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}} (r + A) \subset [-1, 2]$.
3. En déduire que A n'est pas Lebesgue-mesurable (on dit que A est un ensemble de Vitali).

Solution. La relation :

$$(x \mathcal{R} y) \Leftrightarrow (y - x \in \mathbb{Q})$$

est une relation d'équivalence puisque $\mathbb{Q}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ et l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est un groupe puisque le groupe $(\mathbb{R}, +)$ est commutatif.

1. Soit $c = \bar{x} \in \mathcal{C}$. En désignant par $n = [x] \in \mathbb{Z}$ la partie entière de x , on a $0 \leq x_c = x - n < 1$ et $c = \bar{x}_c$ puisque $x - x_c = n \in \mathbb{Q}$. L'axiome du choix nous permet de choisir pour toute classe d'équivalence un représentant $x_c \in [0, 1]$. Ces choix étant faits, on a $c = c'$ dans $\mathcal{C}$ si, et seulement si $x_c = x_{c'}$.
2. Si r, r' dans $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ sont tels que $(r + A) \cap (r' + A) \neq \emptyset$, il existe alors y dans $(r + A) \cap (r' + A)$, donc $y = r + x_c = r' + x_{c'}$ et $c = \bar{x}_c = \bar{x}_{c'} = c'$, ce qui nous donne $x_c = x_{c'}$ et $r = r'$. Donc les ensembles $r + A$, où r décrit $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$, sont deux à deux disjoints. Comme $A \subset [0, 1[$, on a $r + A \subset [-1, 2]$ pour tout $r \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ et $\bigcup_{r \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}} (r + A) \subset [-1, 2]$. Pour tout $x \in [0, 1]$ il existe $x_c \in A$ tel que $\bar{x} = \bar{x}_c$, donc il existe un rationnel r tel que $x = r + x_c$ et comme $|r| = |x - x_c| \leq 1$ (x et x_c sont dans $[0, 1]$), on a $r \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$. On a donc $[0, 1] \subset \bigcup_{r \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}} (r + A)$.
3. Si A est Lebesgue-mesurable, il en est alors de même de tous les $r + A$ ($\mathcal{L}(\mathbb{R})$ est stable par translation) ainsi que de la réunion dénombrable $\bigcup_{r \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}} (r + A)$, ce qui implique que :

$$\begin{aligned} \lambda([0, 1]) &= \ell([0, 1]) = 1 \leq \lambda\left(\bigcup_{r \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}} (r + A)\right) \\ &= \sum_{r \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}} \lambda(r + A) = \sum_{r \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}} \lambda(A) \leq \lambda([-1, 2]) = \ell([-1, 2]) = 3 \end{aligned}$$

ce qui impose $\ell(A) > 0$ et $\sum_{r \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}} \ell(A) = +\infty$, soit une impossibilité. L'ensemble A est donc non Lebesgue-mesurable.

Exercice 1.14. On se place sur l'espace mesuré de Lebesgue $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda)$.

1. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ouvert $\mathcal{O}$ dense dans $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(\mathcal{O}) < \varepsilon$.

2. Montrer qu'une partie mesurable bornée de $\mathbb{R}$ est de mesure finie. La réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer qu'une partie mesurable de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide est de mesure non nulle. La réciproque est-elle vraie ?
4. Montrer qu'une partie mesurable A de $[0, 1]$ de mesure égale à 1 est dense dans $[0, 1]$. Réciproquement un ouvert dense de $[0, 1]$ est-il de mesure égale à 1 ?

Solution.

1. En désignant par $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des nombres rationnels ($\mathbb{Q}$ est dénombrable), on désigne pour tout réel $\varepsilon > 0$ par $(I_n(\varepsilon))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'intervalles définie par $I_n(\varepsilon) =]r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}[$ et on désigne par $\mathcal{O}$ l'ouvert défini par $\mathcal{O} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n(\varepsilon)$. Comme $\mathcal{O}$ contient $\mathbb{Q}$, il est dense dans $\mathbb{R}$ et on a :

$$\lambda(\mathcal{O}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(I_n(\varepsilon)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon$$

2. Si A est bornée, elle est alors contenue dans un segment $[a, b]$ et si de plus, elle est mesurable, on a alors $\lambda(A) \leq \lambda([a, b]) = b - a < +\infty$. La réciproque est fautive : l'ensemble $\mathbb{Q}$ est de mesure nulle non borné. L'exemple précédent nous donne un exemple d'ouvert non borné de mesure finie aussi petite que l'on veut.
3. Si A est mesurable d'intérieur $\mathcal{O}$ non vide, il existe alors $x \in \mathcal{O}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset \mathcal{O}$, donc $\lambda(A) \geq \lambda(\mathcal{O}) \geq \lambda([x - \varepsilon, x + \varepsilon]) = 2\varepsilon > 0$. La réciproque est fautive. Par exemple l'ensemble $A = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ est tel que $\lambda(A) = \lambda([0, 1]) - \lambda([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 1$ et $\overset{\circ}{A} = [0, 1] \setminus \overline{[0, 1] \cap \mathbb{Q}} = \emptyset$. On rappelle que si E est un espace métrique (ou topologique) et F une partie de E , on a $\overset{\circ}{E \setminus F} = E \setminus \overline{F}$. En effet si $\mathcal{O}$ est un ouvert de E contenu dans $E \setminus F$, le fermé $E \setminus \mathcal{O}$ contient F , donc aussi son adhérence, soit $\overline{F} \subset E \setminus \mathcal{O}$ et $\mathcal{O} \subset E \setminus \overline{F}$. Comme $E \setminus \overline{F}$ est un ouvert de E contenu dans $E \setminus F$, on en déduit l'égalité $\overset{\circ}{E \setminus F} = E \setminus \overline{F}$.
4. Si A est mesurable de mesure égale à 1 dans $[0, 1]$, son complémentaire $[0, 1] \setminus A$ est de mesure nulle donc d'intérieur vide et comme $\overset{\circ}{[0, 1] \setminus A} = [0, 1] \setminus \overline{A}$, on en déduit que $\overline{A} = [0, 1]$, ce qui signifie que A est dense dans $[0, 1]$. Une partie dense mesurable de $[0, 1]$ n'est pas nécessairement de mesure égale à 1 comme le montre l'exemple de $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

Exercice 1.15. Montrer que, pour toutes parties A, B de $\mathbb{R}$, on a :

$$\ell^*(A \cup B) + \ell^*(A \cap B) \leq \ell^*(A) + \ell^*(B)$$

Mathématiques pour l'agrégation externe

Analyse

La préparation des candidats aux concours de recrutement de l'Éducation nationale réclame des outils et des méthodes qu'il leur est souvent bien difficile de se procurer, faute d'une littérature adaptée aux exigences de la situation.

Taillé sur mesure pour ceux de l'agrégation externe de mathématiques, ce cours intègre, principalement, les notions du programme d'analyse spécifique à ce concours : Théorie de la mesure et intégrale de Lebesgue, calcul différentiel dans les espaces de Banach, espaces de Hilbert et fonctions holomorphes, applications. Toutes les notions y sont abordées dans le détail et leur assimilation est facilitée par plus de 200 exercices corrigés dont beaucoup peuvent être utilisés par les candidats pour leur leçon à l'épreuve orale. Ce manuel sera également très utile aux étudiants en L3 et M1 de mathématiques.

Il est complété par *Mathématiques pour l'agrégation externe. Probabilités*, rédigé par Walter Appel et publié dans la même collection.

SOMMAIRE

- | | |
|---|---------------------------------------|
| 1. Théorie de la mesure | • 10. Fonctions holomorphes |
| 2. Fonctions mesurables et intégrables | • 11. Fonctions analytiques |
| 3. Intégration sur un espace produit | • 12. Suites de fonctions holomorphes |
| 4. Espaces L_p | • 13. Homotopie |
| 5. Espaces de Hilbert | • 14. Fonctions méromorphes |
| 6. Fonctions presque périodiques | • 15. Transformation de Laplace |
| 7. Fonctions différentiables | • 16. Fonctions usuelles et spéciales |
| 8. Différentielles d'ordre supérieur | • Références |
| 9. Inversion locale, fonctions implicites | • Index |

LES PLUS

- Parfait complément du volume de Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités
- Les théorèmes importants sont suivis d'applications
- Tous les exercices sont intégralement corrigés

Agrégé de mathématiques, **Jean-Étienne Rombaldi** a enseigné à l'université Grenoble-Alpes, institut Fourier. Membre du jury du CAPES externe et de l'agrégation interne de mathématiques pendant plusieurs années, il a été responsable de la préparation à l'agrégation interne de l'université de Grenoble et préparateur à l'agrégation interne et externe de cette même université ainsi que pour le CNED.

41,90 €

ISBN : 978-2-8073-6082-2



9 782807 360822

deboeck
SUPÉRIEUR



www.deboecksuperieur.com

Chez le même éditeur

