

STEWART | KOKOSKA

Analyse

Concepts et contextes

Volume 1 : Fonctions d'une variable

4^e édition


$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{c} \frac{1}{L} \frac{dL}{dt} = \frac{1}{c} \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} \quad (1a) \\ D^2 &= \frac{1}{P^2} \frac{P_0 - P}{P} \sim \frac{1}{P^2} \quad (2a) \\ D^2 &= \frac{k_e}{3} \frac{P_0 - P}{P} \sim \frac{k_e}{3} \quad (2a) \\ D^2 &\sim 10^{-26} \\ \rho &\sim 10^{-8} \text{ g/cm}^3 \\ P &\sim 10^{10} \text{ (10}^{10} \text{)} \end{aligned}$$

+ EN LIGNE

OFFERT

Des rappels des formules

deboeck
SUPÉRIEUR

Analyse

Concepts et Contextes

Volume 1. Fonctions d'une variable

Chez le même éditeur
Extrait du catalogue

Mathématiques

CHOULLI M., *Analyse fonctionnelle*

CIPRIANI J., PERETTI P., *Symétrie et matière. Théorie des groupes en physique de la matière*

COTTET-EMARD F., *36 problèmes corrigés pour le CAPES de mathématiques*

COTTET-EMARD F., *Probabilités et tests d'hypothèses*

COTTET-EMARD F., *Analyse 2. Calcul différentiel, intégrales multiples, séries de Fourier*

COTTET-EMARD F., *Algèbre linéaire et bilinéaire*

COTTET-EMARD F., *Analyse*

DUPONT P., *Exercices corrigés de mathématiques. Algèbre et géométrie. 3^e éd.*

DUPONT P., *Exercices corrigés de mathématiques. Analyse. 3^e éd.*

MANSUY R., MNEIMÉ R., *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*

ROMBALDI J.-E., DARRACQ M.-C., *Algèbre et géométrie pour la licence*

ROMBALDI J.-E., DARRACQ M.-C., *Analyse pour la licence*

ROMBALDI J.-E., DARRACQ M.-C., *Probabilités pour la licence*

STEWART - KOKOSKA

Analyse

Concept et Contextes

Volume 1. Fonctions d'une variable

4^e édition

Traduction de la 5^e édition américaine par Micheline Citta-Vanthemsche

Ouvrage original :

Calculus, Concepts & Contexts, fifth edition, by James Stewart & Stephen Kokoska.

Published in the English language by Cengage Learning, Inc.

Copyright © 2023, 2010. All Rights Reserved.

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : www.deboecksuperieur.com

© De Boeck Supérieur s.a., 2024
Rue du Bosquet, 7 – B-1348 Louvain-la-Neuve
Pour la traduction et l'adaptation française

4^e édition

Tous droits réservés pour tous pays.
Il est interdit, sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, de reproduire (notamment par photocopie) partiellement ou totalement le présent ouvrage, de le stocker dans une banque de données ou de le communiquer au public, sous quelque forme et de quelque manière que ce soit.

Dépôt légal :
Bibliothèque nationale, Paris : septembre 2024
Bibliothèque royale de Belgique, Bruxelles : 2024/13647/136

ISBN : 978-2-8073-5807-2

Table des matières

Avant-propos	ix
À l'étudiant	xvi
À propos de l'auteur	xvii
Tests diagnostiques	xviii

Un aperçu du calcul différentiel et intégral 1

1 Fonctions et modèles 9

1.1	Quatre manières de décrire une fonction	10
1.2	Modèles mathématiques : un catalogue de fonctions essentielles	25
1.3	De nouvelles fonctions avec des anciennes	40
1.4	Fonctions exponentielles	51
1.5	Fonction réciproque et fonction logarithme	60
1.6	Courbes décrites par des équations paramétriques	71
	Sujet d'Étude • Des cercles qui roulent sur des cercles	80

Révision 81

Les principes de la résolution de problèmes 85

2 Limites 91

2.1	Les problèmes de tangente et de vitesse	92
2.2	La limite d'une fonction	99
2.3	Calculer des limites en suivant les lois algébriques des limites	110
2.4	La continuité	122
2.5	Les limites qui font intervenir l'infini	136
2.6	Dérivées et taux de variation	152
	Travail de Rédaction • Les premières méthodes de recherche de tangente	164
2.7	La dérivée en tant que fonction	164

Révision 180

Priorité à la résolution de problème 185

3 Les règles de dérivation 189

- 3.1 Les dérivées des fonctions polynomiales et exponentielles 190
 - Projet appliqué • Construire une meilleure montagne russe 203
- 3.2 Les règles de dérivation du produit et du quotient 204
- 3.3 Dérivées des fonctions trigonométriques 213
- 3.4 La dérivation des fonctions composées 222
 - Sujet d'Étude • Les courbes de Bézier 236
 - Projet appliqué • Où un pilote doit-il amorcer la descente ? 237
- 3.5 La dérivation implicite 237
- 3.6 Les fonctions trigonométriques réciproques et leurs dérivées 246
- 3.7 Les dérivées des fonctions logarithmes 251
 - Sujet à Découvrir • Les fonctions hyperboliques 259
- 3.8 Les taux de variation en sciences naturelles et en sciences sociales 260
- 3.9 Les approximations affines et les différentielles 274
 - Sujet d'Étude • Les polynômes de Taylor 281
- Révision 283
- Priorité à la résolution de problème 287

4 Des applications de la dérivée 293

- 4.1 Les vitesses liées 294
- 4.2 Valeurs maximales et minimales 302
 - Étude appliqué • Étude appliquée Le calcul différentiel appliqué aux arcs-en-ciel 313
- 4.3 Dérivées et formes des courbes 315
- 4.4 Étude de fonctions à l'aide du calcul différentiel et des calculatrices 335
- 4.5 Les formes indéterminées et la règle de l'Hospital 343
 - Sujet de Rédaction • Les origines de la règle de l'Hospital 356
- 4.6 Les problèmes d'optimisation 356
 - Projet appliqué • Le gabarit d'une boîte de conserve 372
- 4.7 La méthode de Newton 373
- 4.8 Les primitives 379
- Révision 389
- Priorité à la résolution de problème 394

5 Les intégrales 399

- 5.1 Des aires et des distances 400
- 5.2 L'intégrale définie 413
- 5.3 Le calcul des intégrales définies 429
 - Sujet à Découvrir • Les fonctions d'aires 442

- 5.4 Le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral 443
 - Sujet de Rédaction** • Newton, Leibniz et l'invention du calcul différentiel et intégral 453
- 5.5 La méthode d'intégration par substitution 454
- 5.6 L'intégration par parties 466
- 5.7 D'autres techniques d'intégration 474
- 5.8 L'intégration à partir de tables et de logiciels de calcul symbolique 481
 - Sujet à Découvrir** • Des familles d'intégrales 487
- 5.9 Intégration numérique 488
- 5.10 Les intégrales impropres 502
- Révision** 516
- Priorité à la résolution de problème** 521

6 Des applications des intégrales 525

- 6.1 Du nouveau sur les aires 526
- 6.2 Les volumes 536
 - Sujet à Découvrir** • Révolution autour d'une droite oblique 551
- 6.3 Les volumes par les tubes cylindriques 552
- 6.4 La longueur d'un arc de courbe 561
 - Sujet à Découvrir** • Concours de longueur d'arc 568
- 6.5 Valeur moyenne d'une fonction 568
 - Projet appliqué** • Quelle est la meilleure place au cinéma ? 574
- 6.6 Applications en physique et en sciences appliquées 575
 - Sujet à Découvrir** • Des tasses complémentaires 588
- 6.7 Applications en économie et en biologie 589
- 6.8 Probabilité 594
- Révision** 605
- Priorité à la résolution de problème** 609

7 Les équations différentielles 613

- 7.1 Modéliser avec des équations différentielles 614
- 7.2 Les champs de direction et la méthode d'Euler 620
- 7.3 Les équations différentielles à variables séparées 631
 - Projet appliqué** • À quelle vitesse une citerne se vide-t-elle ? 641
 - Étude appliquée** • Qu'est-ce qui est plus rapide, monter ou redescendre ? 643
- 7.4 Croissance et décroissance exponentielle 644
 - Projet appliqué** • Le calcul différentiel et intégral et le base-ball 653
- 7.5 L'équation logistique 654
- 7.6 Le système proie-prédateur 664
- Révision** 671
- Priorité à la résolution de problème** 675

8 Les suites infinies et les séries

677

- 8.1** Les suites 678
 - Sujet d'Étude** • Les suites logistiques 690
- 8.2** Les séries 691
- 8.3** Le test de l'intégrale et les tests de comparaison ; le calcul des séries 704
- 8.4** D'autres tests de convergence 716
- 8.5** Les séries entières 726
- 8.6** Développement de fonctions en séries entières 733
- 8.7** Les séries de Taylor et Mac Laurin 741
 - Sujet d'Étude** • Une limite insaisissable 758
 - Sujet de Rédaction** • Comment Newton découvrit la série du binôme 759
- 8.8** Applications des polynômes de Taylor 759
 - Projet appliqué** • Le rayonnement des étoiles 769
- Révision** 771
- Priorité à la résolution de problème** 774

Annexes

A1

- A** Intervalles, inégalités et valeurs absolues A2
- B** Géométrie analytique A7
- C** Trigonométrie A17
- D** Les définitions formelles des limites A26
- E** Quelques démonstrations A36
- F** La notation Σ A41
- G** Intégration des fonctions rationnelles par décomposition en éléments simples A47
- H** Les coordonnées polaires A55
 - Sujet à Découvrir** • Les sections coniques en coordonnées polaires A70
- I** Les nombres complexes A71
- J** Réponses aux exercices impairs A80

Index I1

Retrouvez en ligne les formulaires :
www.deboecksuperieur.com/site/358072



Avant-propos

C'est au moment où se déroulait une âpre discussion sur la réforme du calcul différentiel et intégral qu'est sortie, il y a 20 ans, la première édition de ce livre. Plusieurs départements de mathématiques étaient profondément divisés sur des questions telles que l'usage de la technologie, la compréhension des concepts face à leur mise en pratique et le rôle de l'apprentissage par la découverte. Depuis lors, la Commission des programmes a adopté la réforme du calcul différentiel et intégral et les traditionalistes et réformateurs se sont rendus compte qu'ils poursuivaient un but commun : celui de rendre les étudiants capables de comprendre et d'apprécier le calcul différentiel et intégral.

Les quatre premières éditions anglaises ont essayé de concilier l'approche traditionnelle et réformatrice. Dans la cinquième édition, nous poursuivons dans cette voie en accentuant la compréhension des concepts à travers les approches graphique, verbale et numérique et les approches algébriques. Nous aimerions que les étudiants acquièrent des compétences en résolution de problèmes et voient à la fois la puissance du calcul différentiel et intégral et la beauté intrinsèque du sujet.

Le point sur lequel ce livre diffère des autres textes plus classiques sur le même sujet est qu'il est organisé de façon plus rationnelle. Par exemple, il n'y a pas de chapitre complètement consacré aux techniques d'intégration ; nous ne démontrons pas autant de théorèmes ; la matière sur les fonctions transcendantes et les équations paramétriques est distillée un peu partout au lieu de faire l'objet de chapitres distincts.

Quoi de neuf dans cette cinquième édition ?

Cette édition se distingue par un ton plus conversationnel associé à une présentation épurée, axé sur la compréhension conceptuelle au travers du développement des compétences en résolution de problèmes. Voici quelques-unes des principales améliorations que nous avons introduites dans cette édition.

- Une vue plus rapprochée des caractéristiques mène à des explications simplifiées des concepts importants. Les étudiants vont trouver cela plus facile à lire et à relier à la théorie concernée.
- Des notes dans la marge intitulées *Erreurs fréquentes* rappellent aux étudiants les erreurs courantes renforçant ainsi la bonne technique de résolution.
- La résolution plus détaillée et plus structurée des exemples consiste à expliciter la plupart des étapes (facile à lire, imprimée dans une couleur différente et située au niveau de l'étape en question). Les étudiants peuvent ainsi plus facilement suivre les étapes logiques d'une solution et appliquer les outils de résolution de problèmes aux exercices.
- Les sections ont été dans la mesure du possible subdivisées en sous-sections, plus courtes, plus adaptées à la façon dont les étudiants d'aujourd'hui lisent et assimilent.
- Tous les graphiques ont été nouvellement dessinés en y indiquant plus de détails et chaque figure est accompagnée d'une légende appropriée qui facilite le lien avec la notion qu'ils illustrent.

- Chaque chapitre commence par une situation réelle destinée à introduire la matière.
- Les données des exemples et des exercices ont été actualisées de manière à mieux correspondre à l'environnement d'aujourd'hui.
- L'ancienne section 2.8 intitulée « Que dit f' à propos de f » a été incorporée dans la section 4.3 qui traite des dérivées et de l'allure des courbes.

Caractéristiques

■ Des exercices sur les concepts

Les exercices comportent différents types de problèmes visant à renforcer la compréhension des concepts. Certaines sections d'exercices commencent par demander d'expliquer la signification de certains des concepts de base présentés dans la section. Voyez par exemple les quelques premiers exercices des sections 2.2, 2.4, 2.5, 5.3, 8.2. Ces questions peuvent servir à amorcer les échanges en classe. Dans le même esprit, les sections de révision commencent par une révision des concepts et du vocabulaire et par une liste de Vrai-Faux. D'autres exercices testent la compréhension des concepts par le biais de graphiques ou de tableaux (voyez les exercices 1.7.22-25, 2.6.19, 2.7.39-42; 45-48, 3.8.5-6, 5.2.65-67, 7.1.12-14 et 8.7.2).

Un autre type d'exercices consiste à vérifier la compréhension des concepts à travers des descriptions verbales. Voyez par exemple les exercices 2.4.11, 2.7.75, 4.3.80, 4.3.84-85 et 5.10.69. D'autres problèmes mêlent les approches graphiques, numériques et algébriques et les comparent ; voyez les exercices 2.5.54-55, 2.5.63, 3.8.27 et 7.5.4.

■ Gradation des exercices

Chaque ensemble d'exercices est soigneusement classé, allant des exercices de base sur le concept ou d'entraînement jusqu'à des problèmes plus ardues de type applications et démonstrations.

■ Des données issues de la réalité

Chacun des collaborateurs de ce projet a passé beaucoup de temps à consulter des bibliothèques, à contacter des sociétés et des organismes officiels, à chercher sur Internet des données intéressantes afin d'introduire, de motiver et d'illustrer les concepts du calcul différentiel et intégral. C'est ainsi que beaucoup d'exemples et d'exercices contiennent des fonctions définies par des données numériques présentées sous forme de tables ou de graphiques. Voyez, par exemple, la figure 1.1 dans la section 1.1 (le taux d'utilisation de l'eau à New York en 2018 pendant la finale du championnat organisé par la ligue américaine de football américain), l'exercice 5.1.16 (la vitesse d'une voiture de course sur un circuit d'essai automobile), l'exercice 5.1.18 (la vitesse d'un train dans l'Hyperloop de SpaceX), la figure 5.40 (la consommation électrique de San Francisco), l'exemple 5.9.5 à la section 5.9 (échange de données sur Internet).

■ De véritables projets

Une façon de motiver les étudiants et d'en faire des apprenants actifs est de les mettre au travail (éventuellement en groupe) sur des projets plus importants qui, une fois traités, leur procurent un sentiment d'immense satisfaction. Les *projets appliqués* comprennent des applications conçues pour éveiller l'imagination des étudiants. Les *sujets d'étude* impliquent de la technique ; le sujet proposé à la fin de la section 3.4 montre comment utiliser des courbes de Bézier pour dessiner les formes employées dans le tracé des lettres par une imprimante laser. Les *sujets de rédaction* demandent aux étudiants de

comparer les méthodes d'aujourd'hui avec celles des pionniers du calcul différentiel et intégral – la méthode de Fermat pour déterminer des tangentes, par exemple. Les références à consulter sont indiquées. Les *sujets à découvrir* empiètent sur des notions abordées ultérieurement ou traitent des notions facultatives (les fonctions hyperboliques) ou encore invitent à la découverte à travers la reconnaissance de régularités (voyez le projet qui termine la section 5.8).

■ De la rigueur

Il y a moins de démonstrations que dans les livres de calcul différentiel et intégral plus traditionnels. Il n'en reste pas moins important d'interpeller les étudiants sur la question de la démonstration et de faire apparaître clairement la distinction entre une véritable démonstration et une argumentation convaincante basée, par exemple, sur un graphique ou une table de valeurs. Le point important est de montrer comment déduire quelque chose de moins évident de quelque chose qui l'est davantage. L'usage du Théorème des accroissements finis dans la démonstration du Théorème de calcul de l'intégrale définie (Partie 2 du Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral) en est une illustration. Par ailleurs, nous avons décidé de ne pas démontrer les tests de convergence, mais plutôt de faire apparaître par des arguments intuitifs qu'ils étaient crédibles.

■ La résolution de problèmes

La résolution de problèmes est sans doute la matière la plus difficile à enseigner et à apprendre. Les étudiants éprouvent habituellement des difficultés face à des problèmes pour lesquels il n'existe pas *a priori* de méthode bien définie pour les résoudre. Je pense que personne n'a vraiment fait mieux que Georges Polya dans la description de la stratégie de résolution de problèmes en quatre étapes. Voilà pourquoi figure une version de ses principes de résolution de problèmes à la fin du chapitre 1. Ceux-ci sont mis en œuvre, explicitement ou implicitement, tout au long de cet ouvrage. À la fin d'autres chapitres se trouvent des sections intitulées *Priorité à la résolution de problèmes* qui mettent en vedette la manière d'aborder des problèmes d'analyse qui posent véritablement un défi. Le principe de sélection des problèmes de ces sections est le conseil de David Hilbert : « Un problème mathématique devrait être suffisamment difficile pour nous tenir en haleine mais pas inaccessible au point de tourner nos efforts en dérision. » Ces problèmes difficiles peuvent être posés à titre de devoirs ou de tests, mais évalués selon des critères différents. On pourrait récompenser un étudiant pour avoir seulement avancé des pistes de solution ou avoir identifié les principes de la résolution les plus pertinents.

■ Les outils techniques

Les calculatrices graphiques et les ordinateurs sont de puissants outils qui permettent d'explorer des problèmes, de découvrir des concepts et de confirmer des solutions.

Il est néanmoins plus important encore de maîtriser les concepts sous-jacents aux résultats et aux images de l'écran. Il est supposé que les étudiants ont accès à une calculatrice graphique ou à un logiciel de calcul symbolique. Mais la technologie ne rend pas obsolète l'usage du papier et du crayon. Le calcul à la main et l'esquisse à main levée sont souvent préférables aux outils techniques pour illustrer ou renforcer certains concepts. C'est à l'enseignant et à l'étudiant d'apprendre à estimer quand l'usage de la technologie est le plus approprié.

Le contenu

■ Test préalable

Le livre commence par quatre tests sur les connaissances acquises en algèbre de base, en géométrie analytique, sur les fonctions et en trigonométrie.

■ Un aperçu du calcul différentiel et intégral

Cette section donne une vue d'ensemble des sujets traités et une liste de questions destinées à motiver leur étude.

■ 1 • Les fonctions et les modèles

D'emblée, l'accent est mis sur les diverses présentations des fonctions : verbale, numérique, visuelle et algébrique. Une introduction aux modèles mathématiques conduit à passer en revue les fonctions standards, y compris exponentielles et logarithmes, sous ces quatre points de vue. Les courbes paramétrées sont introduites dans le premier chapitre, en partie pour faciliter la représentation des courbes par des outils graphiques, quand cela s'avère nécessaire dans la suite. Grâce à cette introduction précoce, on peut tracer des tangentes aux courbes paramétrées traitées dans la section 3.4 et couvrir la représentation graphique de ces courbes dans la section 4.4.

■ 2 • Les limites et les dérivées

La matière sur les limites n'est entamée qu'à la suite d'une étude de problèmes de tangentes et de vitesses. Les limites sont traitées d'un point de vue descriptif, graphique, numérique et algébrique. La définition formelle en ϵ - δ de la limite figure dans l'annexe D pour qui souhaite l'aborder. Il est important de passer du temps sur les sections 2.6 et 2.7 qui ont trait aux dérivées et aux taux de variation avant que ne soient exposées les règles de dérivation au chapitre 3. Les exemples et les exercices explorent les significations de la dérivée dans différents contextes.

■ 3 • Les règles de dérivation

Ce chapitre passe en revue les règles de dérivation de toutes les fonctions de base. Lorsque des dérivées interviennent dans des situations appliquées que ce soit comme exemple ou comme exercice, il est demandé à l'étudiant d'en expliciter la signification dans le contexte proposé. Les Sujets d'étude et à découvrir proposent des options (les fonctions hyperboliques, une première introduction aux polynômes de Taylor).

■ 4 • Les applications de la dérivée

Ce chapitre commence par une section sur les vitesses liées. Ensuite, c'est le théorème des accroissements finis qui sert de point de départ aux premières notions relatives aux valeurs extrêmes et à la forme des courbes. L'interaction entre l'outil graphique et l'analyse est ici manifeste et illustrée. Une large variété de problèmes d'optimisation sont prévus. Enfin, sont présentées les formes indéterminées et la méthode de Newton ainsi qu'une étude des primitives qui prépare les étudiants au chapitre 5.

■ 5 • Les intégrales

La notion d'intégrale définie s'appuie sur le calcul d'aire et de distance. La définition d'une intégrale est plus facile à comprendre si on opte pour des sous-intervalles de même longueur. L'accent est mis sur l'explication du sens de l'intégrale dans différents contextes et sur comment la calculer à partir d'un graphique et de tables. Il n'y a pas de chapitre séparé consacré aux techniques d'intégration. Seules les méthodes par substitution et par parties sont traitées ici et d'autres méthodes sont seulement esquissées.

La décomposition en éléments simples est exposée de façon complète dans l'annexe G. La section 5.8 aborde l'usage des logiciels de calcul symbolique en intégration.

■ 6 • Les applications de l'intégrale

Les méthodes générales, et non les formules, sont mises en avant. L'objectif est que les étudiants puissent diviser une quantité en petits morceaux, estimer avec des sommes de Riemann, et reconnaître la limite comme une intégrale. Il y a beaucoup d'applications dans ce chapitre, probablement trop pour être couvertes dans un seul cours. Nous espérons que vous sélectionnerez des applications que vous et vos étudiants apprécierez. Certains instructeurs aiment couvrir les coordonnées polaires, voir l'Annexe H. D'autres préfèrent reporter ce sujet jusqu'à ce qu'il soit nécessaire dans un cours de calcul du troisième semestre, avec la Section 9.7 ou juste avant la Section 12.4.

■ 7 • Les équations différentielles

C'est la modélisation qui gouverne ce traitement introductif aux équations différentielles. Les champs de direction et la méthode d'Euler sont vus avant de résoudre explicitement des équations à variables séparées, de sorte que les approches qualitative, numérique et analytique sont placées sur un même pied. Ces méthodes sont mises en oeuvre sur les modèles exponentiels, logistiques et autres de croissance d'une population. Les modèles proies-prédateurs servent à illustrer les systèmes d'équations différentielles.

■ 8 • Les suites et les séries

Les tests de convergence des séries sont traités brièvement, justifiés plus intuitivement que rigoureusement. Les estimations numériques des sommes de série reposent sur les tests qui ont servi à prouver la convergence. L'accent est mis sur les séries et les polynômes de Taylor, leur utilisation en physique et l'estimation de l'erreur.

Remerciements

J'exprime ma reconnaissance aux lecteurs qui ont partagé avec moi leurs connaissances et leurs critiques. J'ai appris quelque chose de chacun d'eux.

■ Lecteurs de la cinquième édition

Robert Andersen, Stony Brook
Adam Boocher, University of San Diego
Austina Fong, PCC Rock Creek
Marcus McDuff, Austin Community College
Mako Haruta, University of Hartford

David Kahn, Stony Brook
Leanne Merrill, Western Oregon University

■ Lecteurs des éditions précédentes

Irfan Altas, Charles Sturt University
William Ardis, Collin County Community College
Jennifer Bailey, Colorado School of Mines
Barbara Bath, Colorado School of Mines
Neil Berger, University of Illinois at Chicago
Jean H. Bevis, Georgia State University
Lewis Blake, Duke University
Martina Bode, Northwestern University
Jay Bourland, Colorado State University
Paul Wayne Britt, Louisiana State University
Judith Broadwin, Jericho High School (retired)

Charles Bu, Wellesley University
Meghan Anne Burke, Kennesaw State University
Robert Burton, Oregon State University
Roxanne M. Byrne, University of Colorado at Denver
Maria E. Calzada, Loyola University—New Orleans
Larry Cannon, Utah State University
Deborah Troutman Cantrell, Chattanooga State Technical Community College
Bem Cayco, San Jose State University
John Chadam, University of Pittsburgh
Robert A. Chaffer, Central Michigan University

Dan Clegg, Palomar College
 Camille P. Cochrane, Shelton State Community College
 James Cook, North Carolina State University
 James Daly, University of Colorado
 Richard Davis, Edmonds Community College
 Susan Dean, DeAnza College
 Richard DiDio, LaSalle University
 Robert Dieffenbach, Miami University—Middletown
 Fred Dodd, University of South Alabama
 Helmut Doll, Bloomsburg University
 William Dunham, Muhlenberg College
 David A. Edwards, The University of Georgia
 John Ellison, Grove City College
 Joseph R. Fiedler, California State University—Bakersfield
 Barbara R. Fink, DeAnza College
 James P. Fink, Gettysburg College
 Joe W. Fisher, University of Cincinnati
 Robert Fontenot, Whitman College
 Richard L. Ford, California State University Chico
 Laurette Foster, Prairie View A&M University
 Ronald C. Freiwald, Washington University in St. Louis
 Frederick Gass, Miami University
 Gregory Goodhart, Columbus State Community College
 John Gosselin, University of Georgia
 Daniel Grayson, University of Illinois at Urbana—Champaign
 Raymond Greenwell, Hofstra University
 Gerrald Gustave Greivel, Colorado School of Mines
 John R. Griggs, North Carolina State University
 Barbara Bell Grover, Salt Lake Community College
 Murli Gupta, The George Washington University
 John William Hagood, Northern Arizona University
 Kathy Hann, California State University at Hayward
 Richard Hitt, University of South Alabama
 Judy Holdener, United States Air Force Academy
 Randall R. Holmes, Auburn University
 Barry D. Hughes, University of Melbourne
 Mike Hurley, Case Western Reserve University
 Costel Ionita, Dixie State College
 Gary Steven Itzkowitz, Rowan University
 Helmer Junghans, Montgomery College
 Victor Kaftal, University of Cincinnati
 Steve Kahn, Anne Arundel Community College
 Mohammad A. Kazemi, University of North Carolina, Charlotte
 Harvey Keynes, University of Minnesota
 Kandace Alyson Kling, Portland Community College
 Ronald Knill, Tulane University
 Stephen Kokoska, Bloomsburg University
 Kevin Kreider, University of Akron
 Doug Kuhlmann, Phillips Academy
 David E. Kullman, Miami University
 Carrie L. Kyser, Clackamas Community College
 Prem K. Kythe, University of New Orleans
 James Lang, Valencia Community College—East Campus
 Carl Leinbach, Gettysburg College
 William L. Lepowsky, Laney College
 Kathryn Lesh, University of Toledo
 Lawrence Levine, Stevens Institute of Technology
 Estela Llinas, University of Pittsburgh at Greensburg

Beth Turner Long, Pellissippi State Technical Community College
 Miroslav Lovric, McMaster University
 Lou Ann Mahaney, Tarrant County Junior College—Northeast
 John R. Martin, Tarrant County Junior College
 Andre Mathurin, Bellarmine College Prep
 R. J. McKellar, University of New Brunswick
 Jim McKinney, California State Polytechnic University—Pomona
 Richard Eugene Mercer, Wright State University
 David Minda, University of Cincinnati
 Rennie Mirollo, Boston College
 Laura J. Moore-Mueller, Green River Community College
 Scott L. Mortensen, Dixie State College
 Brian Mortimer, Carleton University
 Bill Moss, Clemson University
 Tejinder Singh Neelon, California State University San Marcos
 Phil Novinger, Florida State University
 Richard Nowakowski, Dalhousie University
 Stephen Ott, Lexington Community College
 Grace Orzech, Queen's University
 Jeanette R. Palmiter, Portland State University
 Bill Paschke, University of Kansas
 Drew Pasteur, North Carolina State University
 David Patocka, Tulsa Community College—Southeast Campus
 Paul Patten, North Georgia College
 Leslie Peek, Mercer University
 Mike Pepe, Seattle Central Community College
 Jeffrey Powell, Samford University
 Dan Pritikin, Miami University
 Fred Prydz, Shoreline Community College
 Denise Taunton Reid, Valdosta State University
 James Reynolds, Clarion University
 Hernan Rivera, Texas Lutheran University
 Richard Rochberg, Washington University
 Gil Rodriguez, Los Medanos College
 David C. Royster, University of North Carolina—Charlotte
 Daniel Russow, Arizona Western College
 Dusty Edward Sabo, Southern Oregon University
 Daniel S. Sage, Louisiana State University
 N. Paul Schembari, East Stroudsburg University
 Dr. John Schmeelk, Virginia Commonwealth University
 Bettina Schmidt, Auburn University at Montgomery
 Bernd S. W. Schroeder, Louisiana Tech University
 Jeffrey Scott Scroggs, North Carolina State University
 James F. Selgrade, North Carolina State University
 Brad Shelton, University of Oregon
 Don Small, United States Military Academy—West Point
 Linda E. Sundbye, The Metropolitan State College of Denver
 Richard B. Thompson, The University of Arizona
 William K. Tomhave, Concordia College
 Barbara Tozzi, Brookdale Community College
 Lorenzo Traldi, Lafayette College
 Alan Tucker, State University of New York at Stony Brook
 Tom Tucker, Colgate University
 Kathryn Turner, Utah State University
 George Van Zwalenberg, Calvin College
 Dennis Watson, Clark College
 Paul R. Wenston, The University of Georgia
 Ruth Williams, University of California—San Diego

Clifton Wingard, Delta State University
 Jianzhong Wang, Sam Houston State University
 JingLing Wang, Lansing Community College
 Michael B. Ward, Western Oregon University
 Stanley Wayment, Southwest Texas State University

Barak Weiss, Ben-Gurion University—Be'er Sheva, Israel
 Teri E. Woodington, Colorado School of Mines
 James Wright, Keuka College
 Cathy Zucco-Tevelof, Arcadia University

En outre, je voudrais remercier Ari Brodsky, David Cusick, Alfonso Gracia-Saz, Emile LeBlanc, Tanya Leise, Joe May, Romaric Pujol, Norton Starr, Lou Talman et Gail Wolkowicz pour leurs conseils et suggestions ; Al Shenk et Dennis Zill de m'avoir accordé d'utiliser des exercices de leurs livres de calcul différentiel et intégral ; COMAP pour l'autorisation d'utiliser leurs projets ; Alfonso Gracia-Saz, B. Hovinen, Y. Kim, Anthony Lam, Romaric Pujol, Felix Recio et Paul Sally pour leurs suggestions d'exercices ; Dan Drucker pour le projet de plaine de jeu ; Tom Farmer, Fred Gass, John Ramsay, Larry Riddle, V.K. Srinivasan et Philip Straffin pour leurs idées de projets. Je suis reconnaissant à Dan Clegg, Jeff Cole et Tim Flaherty d'avoir préparé le solutionnaire des exercices et d'avoir émis des suggestions d'amélioration des exercices.

Je remercie aussi ceux qui ont apporté leur contribution aux éditions précédentes : Ed Barbeau, George Bergman, David Bleecker, Fred Brauer, Andy Bulman-Fleming, Tom Di Ciccio, Martin Erickson, Garret Etgen, Chris Fisher, Stuart Goldenberg, Arnold Good, John Hagood, Gene Hecht, Victor Kaftal, Harvey Keynes, E. L. Koh, Zdislav Kovarik, Kevin Kreider, Jamie Lawson, David Leep, Gerald Leibowitz, Larry Peterson, Lothar Redlin, Peter Rosenthal, Carl Riehm, Ira Rosenholtz, Doug Shaw, Dan Silver, Lowell Smylie, Larry Wallen, Saleem Watson et Alan Weinstein.

Mes remerciements vont encore à Flora Emmanuel et Lumina Datamatics Ltd, pour leurs services de production, à Thomas Dick et Ben Klein pour la relecture soignée des épreuves, à Gaby Vinales pour les images de couverture et à toute l'équipe de Cengage : Laura Gallus, concepteur d'apprentissage ; Nikkita Kendrick, partenaire qualité ; Asley Maynard et Nick Barrows, spécialistes des autorisations ; Lynh Pham, gestionnaire du contenu ; Tim Rogers, assistant de production et Tom Ziolkowski, directeur exécutif du marketing. Tous, ils ont réalisé un travail extraordinaire.

Je voudrais adresser un remerciement particulier à Gary Whalen pour sa patience et sa confiance. Steve est spécialement reconnaissant et honoré de faire partie de l'héritage de l'œuvre de Stewart. En outre, la cinquième édition n'aurait pu être menée à bien sans Leslie Lahr qui possède de superbes qualités d'éditrice, un regard d'experte sur le style et une vue d'ensemble de l'édition. Steve a eu la grande chance de travailler avec quelques-uns des meilleurs enseignants en mathématiques du pays au cours des trois dernières décennies. Ce texte reflète une grande partie de ce qu'il a appris auprès d'eux.

James Stewart
 Stephen Kokoska

À l'étudiant

Lire un livre de calcul différentiel et intégral est tout autre chose que lire un journal ou un roman, ou même un livre de physique. Ne vous découragez pas s'il vous arrive de devoir lire un passage plus d'une fois avant de le comprendre. C'est une bonne idée de garder un crayon, du papier et une calculatrice graphique à portée de main pour vérifier ou essayer un calcul ou dessiner un diagramme ou un graphique.

Certains étudiants choisissent de négliger le texte pour se lancer directement dans les exercices et ne vont lire la théorie que s'ils rencontrent des difficultés dans un exercice. Nous pensons qu'il est préférable de lire et de comprendre une section avant d'attaquer les exercices. En particulier, vous devez soigneusement étudier les définitions et comprendre la signification exacte des termes. Et avant de lire un exemple, nous suggérons d'en cacher la solution et d'essayer de le résoudre par vous-même. Vous en retirerez ainsi davantage de la lecture de la solution.

Ce texte est conçu pour enseigner la compréhension conceptuelle grâce à des compétences de résolution de problèmes et de reconnaissance de formes et pour vous entraîner à penser de manière logique. Apprenez à rédiger les solutions aux exercices de manière liée, étape par étape, en utilisant les bons termes et les notations appropriées.

À la fin du livre, dans l'annexe J, sont données les solutions des exercices de numérotation impaire. Certains exercices consistent en une explication ou une interprétation ou une description. Il n'y a dès lors pas qu'une seule façon d'y répondre, ne vous inquiétez donc pas si vous n'avez pas trouvé la réponse exactement telle qu'elle est proposée. En outre, comme il y a parfois plusieurs formes différentes pour exprimer une réponse algébrique ou numérique, n'allez pas conclure immédiatement que la vôtre est fausse si elle est quelque peu différente de celle donnée dans le livre. Par exemple, si la réponse donnée à la fin du livre est $\sqrt{2} - 1$ et que vous obtenez $1/(1 + \sqrt{2})$, c'est correct car en rendant le dénominateur rationnel, vous verrez que les deux réponses sont équivalentes.

Nous espérons que vous tiendrez à garder ce livre à titre de référence après avoir terminé le cours. Comme il est probable que vous oublierez quelques détails de cette matière, il vous permettra de vous rafraîchir la mémoire quand vous en aurez besoin dans vos cours ultérieurs. De plus, ce livre contenant plus de matière que ce qu'un cours peut raisonnablement couvrir, il peut être une ressource utile dans votre travail de chercheur ou d'ingénieur. Le calcul différentiel et intégral est un sujet passionnant, à juste titre considéré comme l'une des plus hautes réalisations de l'esprit humain. Nous espérons que vous allez découvrir qu'il n'est pas seulement utile mais aussi intrinsèquement beau.

James Stewart
Stephen Kokoska

À propos de l'auteur

Steve a obtenu son diplôme de premier cycle au Boston College et sa maîtrise en sciences et son doctorat à l'université du New Hampshire. Ses premiers sujets de recherche portaient sur l'analyse statistique des expériences de prévention par chimiothérapie du cancer. Il a publié plusieurs articles dans des journaux de mathématiques : *Biometrics*, *Anticancer Research* et *Computer Methods and Programs in Biomedecine*. Il a présenté ses résultats lors de conférences et rédigé plusieurs livres. Il a reçu des subventions de la Fondation nationale des sciences, du centre de la Pennsylvanie rurale et du programme Ben Franklin.

Steve fut longtemps consultant au College Board et il a animé des ateliers au Brésil, en République dominicaine, à Singapour et en Chine. Pendant quatre ans, il fut lecteur en chef de l'AP Calculus (ensemble de deux cours et examens d'Analyse proposé par l'organisation américaine à but non lucratif College Board), il a participé à la réforme du calcul différentiel et intégral et à la réflexion sur l'usage des outils modernes de calcul dans les classes. Il a récemment publié avec James Stewart un AP Calculus text. Il a enseigné pendant 30 ans à l'Université de Bloomsberg.

Steve est convaincu que la compréhension des concepts passe par le développement des aptitudes à la résolution de problèmes et à la reconnaissance des régularités. Il est encore aujourd'hui impliqué dans le programme AP Calculus et anime avec d'autres le webinaire Monday Night Calculus soutenu par Texas Instruments.

L'oncle de Steve, le jésuite Fr. Stanley Bezuska, professeur au Boston College, fut un des architectes de ce qui était appelé en 1950 et 60 les mathématiques nouvelles. Il a eu une forte influence sur la carrière de son neveu. Il a collaboré avec Fr. B. en contrôlant la précision des textes en tant qu'assistant enseignant et même en rédigeant des projets pour le lycée et l'université. Il a ainsi appris l'ordre, la précision, l'élégance des mathématiques et développé un enthousiasme sans borne pour l'enseignement.

Tests diagnostiques

Une bonne maîtrise du calcul différentiel et intégral dépend pour une large part des connaissances acquises antérieurement en mathématiques: algèbre, géométrie analytique, fonctions et trigonométrie. Le test qui suit a pour but de repérer les faiblesses que vous pourriez avoir dans ces matières. À la fin de chaque test, vous pouvez comparer vos réponses avec celles qui sont fournies et, si nécessaire, rafraîchir vos connaissances grâce aux révisions conseillées.

A | Test d'algèbre

1. Calculez, sans calculatrice, chacune des expressions suivantes.

- a) $(-3)^4$ b) -3^4 c) 3^{-4}
d) $\frac{5^{23}}{5^{21}}$ e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ f) $16^{-3/4}$

2. Simplifiez chaque expression. Écrivez la réponse sans exposant négatif.

- a) $\sqrt{200} - \sqrt{32}$ b) $(3a^3b^3)(4ab^2)^2$ c) $\left(\frac{3x^{3/2}y^3}{x^2y^{-1/2}}\right)^{-2}$

3. Développez et simplifiez.

- a) $3(x+6) + 4(2x-5)$ b) $(x+3)(4x-5)$
c) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ d) $(2x+3)^2$
e) $(x+2)^3$

4. Factorisez chaque expression.

- a) $4x^2 - 25$ b) $2x^2 + 5x - 12$
c) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ d) $x^4 + 27x$
e) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ f) $x^3y - 4xy$

5. Simplifiez l'expression rationnelle.

- a) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2}$ b) $\frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 9} \cdot \frac{x + 3}{2x + 1}$
c) $\frac{x^2}{x^2 - 4} - \frac{x + 1}{x + 2}$ d) $\frac{\frac{y}{x} - \frac{x}{y}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}}$

6. Rendez l'expression rationnelle et simplifiez.

- a) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5} - 2}$ b) $\frac{\sqrt{4+h} - 2}{h}$

7. Complétez le carré.

- a) $x^2 + x + 1$ b) $2x^2 - 12x + 11$

8. Résolvez l'équation. (Cherchez seulement les solutions réelles.)

- a) $x + 5 = 14 - \frac{1}{2}x$ b) $\frac{2x}{x+1} = \frac{2x-1}{x}$
c) $x^2 - x - 12 = 0$ d) $2x^2 + 4x + 1 = 0$
e) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ f) $3|x-4| = 10$
g) $2x(4-x)^{-1/2} - 3\sqrt{4-x} = 0$

9. Résolvez chaque inégalité. Écrivez vos réponses sous forme d'intervalles.

- a) $-4 < 5 - 3x \leq 17$ b) $x^2 < 2x + 8$
 c) $x(x - 1)(x + 2) > 0$ d) $|x - 4| < 3$
 e) $\frac{2x - 3}{x + 1} \leq 1$

10. Les équations sont-elles vraies ou fausses ?

- a) $(p + q)^2 = p^2 + q^2$ b) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
 c) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ d) $\frac{1 + TC}{C} = 1 + T$
 e) $\frac{1}{x - y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ (f) $\frac{1/x}{a/x - b/x} = \frac{1}{a - b}$

Réponses du test A : Algèbre

1. a) 81 b) -81 c) $\frac{1}{81}$
 d) 25 e) $\frac{9}{4}$ f) $\frac{1}{8}$
2. a) $6\sqrt{2}$ b) $48a^5b^7$ c) $\frac{x}{9y^7}$
3. a) $11x - 2$ b) $4x^2 + 7x - 15$
 c) $a - b$ d) $4x^2 + 12x + 9$
 e) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
4. a) $(2x - 5)(2x + 5)$ b) $(2x - 3)(x + 4)$
 c) $(x - 3)(x - 2)(x + 2)$ d) $x(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$
 e) $3x^{-1/2}(x - 1)(x - 2)$ f) $xy(x - 2)(x + 2)$
5. a) $\frac{x + 2}{x - 2}$ b) $\frac{x - 1}{x - 3}$
 c) $\frac{1}{x - 2}$ d) $-(x + y)$
6. a) $5\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$ b) $\frac{1}{\sqrt{4 + h} + 2}$
7. a) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ b) $2(x - 3)^2 - 7$
8. a) 6 b) 1 c) -3, 4
 d) $-1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ e) $\pm 1, \pm \sqrt{2}$ f) $\frac{2}{3}, \frac{22}{3}$
 g) $\frac{12}{5}$
9. a) $]-4, 3[$ b) $]-2, 4[$
 c) $]-2, 0[\cup]1, +\infty[$ d) $]1, 7[$
 e) $]-1, 3[$
10. a) Faux b) Vrai c) Faux
 d) Faux e) Faux f) Vrai

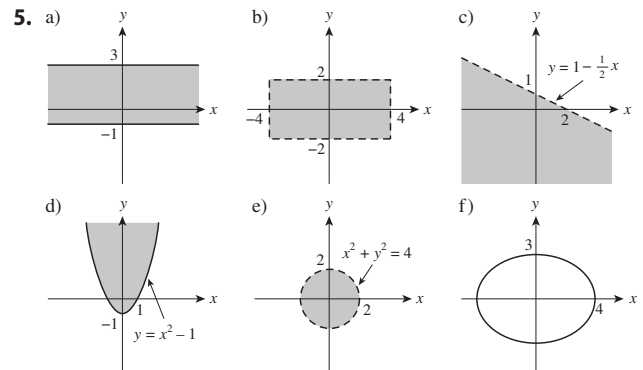
B | Test : Géométrie analytique

- Écrivez une équation de la droite qui passe par le point $(2, -5)$ et qui
 - est de pente -3 .
 - est parallèle à l'axe Ox .
 - est parallèle à l'axe Oy .
 - est parallèle à la droite $2x - 4y = 3$.
- Cherchez une équation du cercle centré en $(-1, 4)$ et passant par le point $(3, -2)$.
- Cherchez le centre et le rayon du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 = 0$.
- Soient $A(-7, 4)$ et $B(5, -12)$ deux points d'un plan.
 - Quelle est la pente de la droite qui passe par A et B .
 - Cherchez une équation de la droite qui passe par A et B . Quels sont ses points d'intersection avec les axes ?
 - Cherchez le point milieu du segment AB .
 - Quelle est la longueur du segment AB .
 - Cherchez une équation de la médiatrice de AB .
 - Cherchez une équation d'un cercle dont AB est un diamètre.
- Hachurez la région du plan Oxy définie par l'équation ou par les inégalités.

a) $-1 \leq y \leq 3$	b) $ x < 4$ et $ y < 2$	c) $y < 1 - \frac{1}{2}x$
d) $y \geq x^2 - 1$	e) $x^2 + y^2 < 4$	f) $9x^2 + 16y^2 = 144$

Réponses au test B : Géométrie analytique

- $y = -3x + 1$
 - $y = -5$
 - $x = 2$
 - $y = \frac{1}{2}x - 6$
- $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 52$
- Centre $(3, -5)$, rayon 5
- $-\frac{4}{3}$
 - $4x^3 + 3y + 16 = 0$; intersection avec Ox -4 , intersection avec Oy $-\frac{16}{3}$
 - $(-1, -4)$
 - 20
 - $3x - 4y = 13$
 - $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 100$



C Test : Fonctions

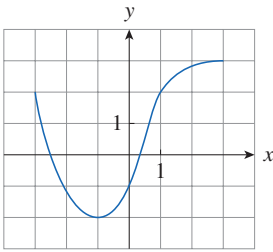
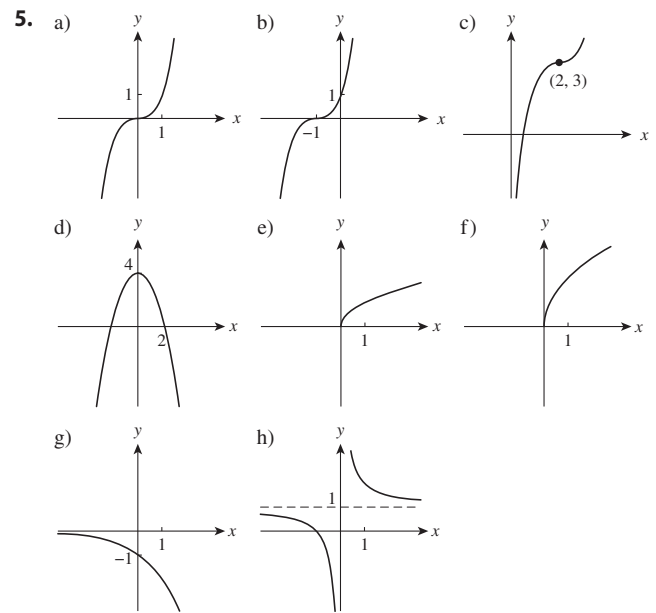


Figure pour problème 1

- Vous voyez à gauche le graphique d'une fonction f .
 - Quelle est la valeur $f(-1)$?
 - Que vaut $f(2)$?
 - Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) = 2$?
 - Cherchez les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$.
 - Déterminez le domaine de définition et l'ensemble image de f .
- Pour $f(x) = x^3$, calculez le quotient différentiel $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ et simplifiez-le.
- Déterminez le domaine de définition de la fonction.
 - $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$
 - $g(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$
 - $h(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x^2-1}$
- Par quelles transformations du graphique de f obtient-on les graphiques des fonctions suivantes ?
 - $y = -f(x)$
 - $y = 2f(x) - 1$
 - $y = f(x-3) + 2$
- Esquissez à la main et sans l'aide d'une calculatrice les graphiques suivants.
 - $y = x^3$
 - $y = (x+1)^3$
 - $y = (x-2)^3 + 3$
 - $y = 4 - x^2$
 - $y = \sqrt{x}$
 - $y = 2\sqrt{x}$
 - $y = -2^x$
 - $y = 1 + x^{-1}$
- Soit $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$
 - Calculez $f(-2)$ and $f(1)$.
 - Faites le graphique de f .
- Si $f(x) = x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = 2x - 3$. Définissez les fonctions suivantes.
 - $f \circ g$
 - $g \circ f$
 - $g \circ g \circ g$

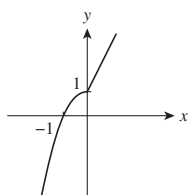
Réponses du test C : Fonctions

- 2
 - 2,8
 - 3, 1
 - 2,5 ; 0,3
 - $[-3, 3], [-2, 3]$
- $12 + 6h + h^2$
- $] -\infty, -2[\cup] -2, 1[\cup] 1, +\infty[$
 - $] -\infty, +\infty[$
 - $] -\infty, -1[\cup] 1, 4]$
- Réflexion par rapport à l'axe Ox .
 - Étirement vertical de facteur 2, suivi d'une translation d'une unité vers le bas.
 - Translation de trois unités vers la droite, puis de deux unités vers le haut.



6. a) $-3, 3$

b)



7. a) $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 8x + 2$

b) $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 4x - 5$

c) $(g \circ g \circ g)(x) = 8x - 21$

D Test : Trigonométrie

1. Convertissez les degrés en radians.

a) 300° b) -18°

2. Convertissez les radians en degrés.

a) $\frac{5\pi}{6}$ b) 2

3. Calculez la longueur de l'arc d'un cercle de 12 cm de rayon sous-tendu par un angle au centre de 30° .

4. Quelles sont les valeurs exactes ?

a) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ b) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ c) $\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

5. Exprimez les longueurs a et b de la figure en termes de θ .6. Calculez $\sin(x + y)$ sachant que $\sin x = \frac{1}{3}$, $\sec y = \frac{5}{4}$ et que x et y sont compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

7. Démontrez les identités.

a) $\operatorname{tg} \theta \sin \theta + \cos \theta = \sec \theta$

b) $\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \sin 2x$

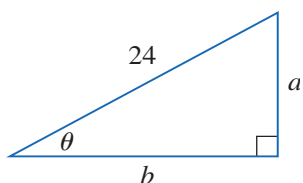
8. Cherchez toutes les valeurs de x comprises entre $\sin 2x = \sin x$ et $-1 \leq x \leq 2\pi$.9. Dessinez le graphique de la fonction $y = 1 + \sin 2x$ sans faire usage de la calculatrice.

Figure pour problème 5

Réponses du test D : Trigonométrie

1. a) $\frac{5\pi}{3}$

b) $\frac{-\pi}{10}$

2. a) 150°

b) $\frac{360^\circ}{\pi} \approx 114.6^\circ$

3. 2π cm

4. a) $\sqrt{3}$

b) $-\frac{1}{2}$

c) 2

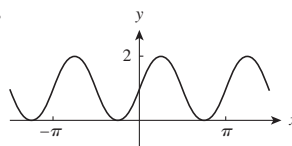
5. a) $24 \sin \theta$

b) $24 \cos \theta$

6. $\frac{1}{15}(4 + 6\sqrt{2})$

8. $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$

9.



Si vous avez rencontré des difficultés, consultez l'annexe C de ce livre.

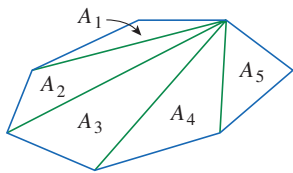


www.shutterstock.com • 101667718

Un aperçu du calcul différentiel et intégral

Mark Twain a écrit, « Si vous n’aimez pas le temps qu’il fait en Nouvelle Angleterre, attendez quelques minutes. » Le temps change, en effet, rapidement en Nouvelle Angleterre et le calcul différentiel et intégral est justement l’étude du changement, du changement instantané. Les prévisions du temps sont basées sur de puissants modèles mathématiques dans lesquels le calcul différentiel et intégral joue un rôle de premier plan.

Le calcul différentiel et intégral est fondamentalement différent des mathématiques que vous avez étudiées jusqu’à présent. Il est moins statique et plus dynamique. Il se rapporte au changement et au mouvement ; il traite de quantités qui se rapprochent d’autres quantités. Voilà pourquoi il peut être utile de survoler le sujet avant d’entamer son étude en profondeur. Nous donnons ici un aperçu de certaines idées maîtresses du calcul différentiel et intégral en faisant ressortir comment des limites surviennent quand nous essayons de résoudre des problèmes très divers.



$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

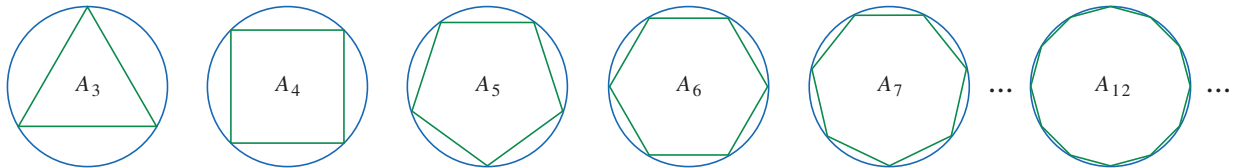
Figure 1

L'aire du polygone est la somme des aires des triangles.

■ Le problème de l'aire

Les origines du calcul différentiel et intégral remontent à 2500 ans, au temps où les Grecs calculaient des aires par la méthode « d'exhaustion ». Ils savaient comment mesurer l'aire A d'un polygone quelconque en le décomposant comme dans la figure 1 en triangles, dont ils prenaient la somme des aires.

Il est beaucoup plus difficile de mesurer l'aire d'une figure curviligne. La méthode d'exhaustion des Grecs consistait à inscrire et à circonscrire des polygones et à en faire croître le nombre de côtés. La figure 2 illustre ce procédé dans le cas particulier d'un cercle à l'intérieur duquel sont inscrits des polygones réguliers.

**Figure 2**

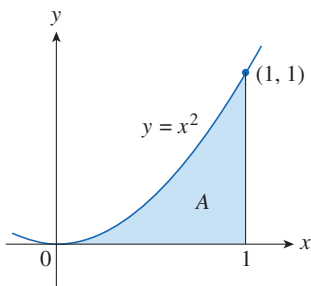
Les polygones réguliers inscrits qui servent à obtenir l'aire du cercle.

Soit A_n l'aire du polygone inscrit de n côtés. Lorsque n augmente, A_n s'approche de plus en plus de l'aire du cercle. Nous disons que l'aire du cercle est la *limite* des aires des polygones inscrits et nous écrivons

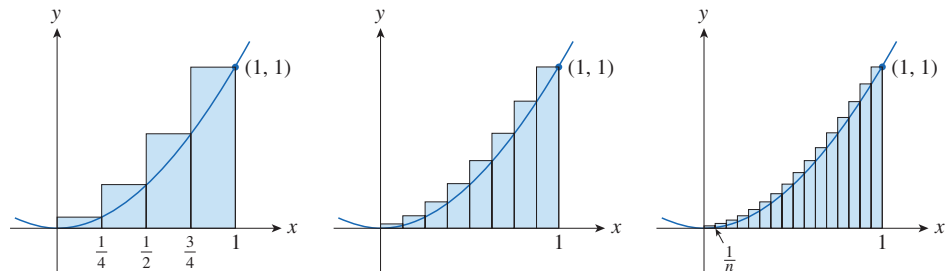
$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n.$$

Les Grecs n'employaient pas ce terme de limite. Cependant, Eudoxe (5^{ème} s. av. J.-C.) réussit par exhaustion à établir, par un raisonnement indirect, la formule de l'aire du cercle qui nous est familière : $A = \pi r^2$.

C'est la même idée qui présidera au chapitre 5 pour trouver les aires de régions du type de celles qui sont représentées à la figure 3. Nous calculerons d'abord une approximation de l'aire souhaitée en additionnant les aires des rectangles (comme ceux de la figure 4), puis nous ferons décroître la base des rectangles et enfin nous prendrons A comme la limite de ces sommes d'aires de rectangles.

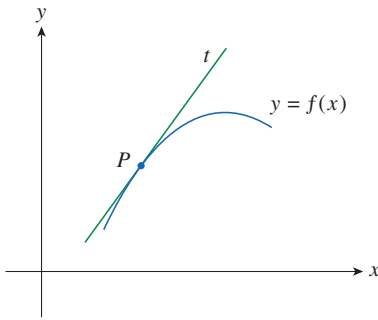
**Figure 3**

Soit A l'aire de la région ombrée.

**Figure 4**

L'aire A est approchée par l'aire des rectangles.

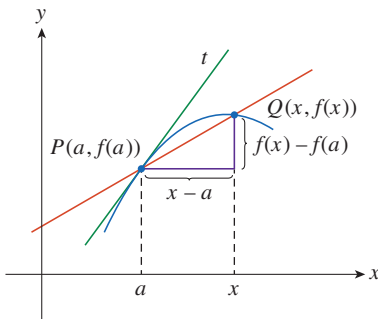
Le calcul d'aire est central dans la branche de l'analyse appelée plus précisément *calcul intégral*. Les techniques que nous mettrons au point au chapitre 5 pour calculer des aires nous permettront aussi de calculer le volume d'un solide, la longueur d'un arc de courbe, la poussée exercée par l'eau contre une digue, la masse et le centre de gravité d'une tige et le travail effectué pour pomper l'eau hors d'une citerne.

**Figure 5**La tangente en P .

■ Le problème de la tangente

Le problème consiste à trouver l'équation de la droite t tangente à une courbe d'équation $y = f(x)$ en un point P donné. (Nous donnerons une définition précise d'une tangente au chapitre 2. Pour le moment nous nous contentons de la voir comme une droite qui touche la courbe comme le fait la droite t dans la figure 5.) Puisque nous savons que la droite t passe par le point P , il nous suffirait de connaître sa pente m pour pouvoir en écrire une équation. Nous aurions besoin de deux points sur la droite pour en déterminer la pente et nous n'en avons qu'un seul. Pour contourner le problème, nous cherchons d'abord une approximation de m en prenant un point Q très voisin de P et en calculant la pente m_{PQ} de la sécante PQ . Sur la figure 6, nous voyons que

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (1)$$

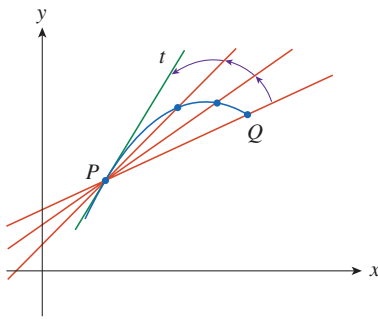
**Figure 6**La sécante PQ .

Imaginons maintenant que Q se meuve sur la courbe en direction de P , comme sur la figure 7. Vous remarquez que la sécante pivote autour de P et s'approche de la position tangente comme position limite. En termes de pente, cela se traduit par : la pente m_{PQ} de la sécante s'approche de plus en plus de la pente m de la tangente. Nous écrivons cela

$$m = \lim_{Q \rightarrow P} m_{PQ}$$

et nous disons que m est la limite de m_{PQ} lorsque Q s'approche de P en suivant la courbe. Comme x s'approche de a lorsque Q s'approche de P , nous pouvons encore utiliser l'équation (1) et écrire

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (2)$$

**Figure 7**

Des sécantes qui tendent vers la position de la tangente.

Le chapitre 2 présente des exemples illustratifs de ce procédé.

Le problème de la tangente est à l'origine de la branche de l'analyse appelée *calcul différentiel*, qui, plus de 2000 ans après le calcul intégral, n'avait toujours pas été inventé. Les idées fondamentales du calcul différentiel sont dues au mathématicien français Pierre de Fermat (1601-1665) et furent développées par les mathématiciens anglais John Wallis (1616-1703), Isaac Barrow (1630-1677) et Isaac Newton (1642-1727) et par le mathématicien allemand Gottfried Leibniz (1646-1716).

Ces deux branches de l'analyse et leurs problèmes principaux, le calcul d'aire et la détermination de la tangente, semblent bien différents à première vue, et pourtant ils sont très proches l'un de l'autre. Ils constituent des problèmes inverses au sens qui sera décrit au chapitre 5.

■ La vitesse

Lorsque nous lisons sur le tachymètre d'une voiture qu'elle se déplace à 60 km/h, quelle est au juste l'information reçue ? Nous savons que si cette vitesse restait constante pendant une heure, la voiture parcourrait 60 km. Mais si la vitesse de la voiture n'est pas constante, qu'est-ce que cela signifie ? Qu'elle est de 60 km/h à un moment donné.

En vue de répondre à cette question, analysons le mouvement d'une voiture qui se déplace en ligne droite et supposons avoir pu mesurer la distance parcourue après chaque seconde. Ces distances sont reprises dans le tableau que voici.

t = temps écoulé (en s)	0	1	2	3	4	5
d = distance (en m)	0	2	9	24	42	71

Comme première étape en vue de trouver la vitesse après 2 secondes, calculons la vitesse moyenne sur l'intervalle de temps $2 \leq t \leq 4$:

$$\begin{aligned} \text{vitesse moyenne} &= \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps écoulé}} \\ &= \frac{13 - 3}{4 - 2} = 5 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

De même, la vitesse moyenne sur l'intervalle de temps $2 \leq t \leq 3$ est

$$\text{vitesse moyenne} = \frac{7,6 - 3}{3 - 2} = 4,6 \text{ m/s.}$$

Nous pressentons que la vitesse à l'instant $t = 2$ ne peut pas être très différente de la vitesse moyenne calculée sur un intervalle de temps très court qui commence à l'instant $t = 2$. Aussi, imaginons que la distance parcourue ait été mesurée tous les dixièmes de seconde, cela donne le tableau :

t	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
d	9,00	10,02	11,16	12,45	13,96	15,80

Alors, nous pouvons calculer la vitesse moyenne, par exemple, sur l'intervalle de temps $[2 ; 2,5]$:

$$\text{vitesse moyenne} = \frac{5,12 - 3,05}{2,5 - 2} = 4,14 \text{ m/s.}$$

Les résultats du même calcul effectué sur les autres intervalles de temps sont consignés dans le tableau :

Intervalle de temps	$[2 ; 3]$	$[2 ; 2,5]$	$[2 ; 2,4]$	$[2 ; 2,3]$	$[2 ; 2,2]$	$[2 ; 2,1]$
Vitesse moyenne (m/s)	15,0	13,6	12,4	11,5	10,8	10,2

Les vitesses moyennes sur des intervalles de plus en plus petits semblent s'approcher d'un nombre proche de 3 et donc il est normal de s'attendre à ce que la vitesse moyenne en $t = 2$ exactement soit de l'ordre de 3 m/s. Au chapitre 2, nous allons définir la vitesse instantanée d'un objet en mouvement comme la valeur limite des vitesses moyennes sur des intervalles de temps de plus en plus petits.

La figure 8 montre une représentation graphique du mouvement d'une voiture caractérisée par la distance parcourue en fonction du temps. Si nous notons $d = f(t)$, alors $f(t)$ est le nombre de mètres parcourus après t secondes. La vitesse moyenne sur un intervalle de temps $[2, t]$ est

$$\text{vitesse moyenne} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps écoulé}} = \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}.$$

Or, cette expression est la même que celle de la pente de la sécante PQ à la figure 8. La vitesse v au moment $t = 2$ est la valeur limite de cette vitesse moyenne quand t tend vers 2 ; à savoir

$$v = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$$

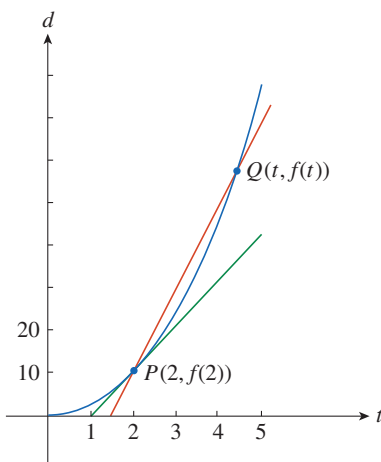


Figure 8

Graphique qui illustre le mouvement de la voiture.

Nous reconnaissons ici la même formule que celle qui, à l'équation (2), donnait la pente de la tangente à la courbe en P .

En définitive, lorsque nous résolvons un problème de tangente par le calcul différentiel, nous résolvons aussi un problème de vitesse. Les mêmes techniques nous permettent également de résoudre les problèmes de taux de variation dans toutes les sciences naturelles et sociales.

■ La limite d'une suite

Au 5^{ème} siècle av. J.-C., le philosophe grec Zénon d'Élée posa quatre problèmes, connus aujourd'hui sous le nom de *paradoxes de Zénon*, destinés à défier quelques-unes des idées en vigueur à cette époque à propos de l'espace et du temps. Le deuxième de ces paradoxes parle d'une course entre le héros grec Achille et une tortue qui a été avantagée au départ. Voici l'argumentation que tient Zénon pour démontrer qu'Achille ne pourra jamais dépasser la tortue : supposons que le point de départ d'Achille soit a_1 et celui de la tortue, t_1 . (voyez la figure 9). Au moment où Achille arrive en $a_2 = t_1$, la tortue a déjà gagné la position t_2 . Au moment où Achille arrive en $a_3 = t_2$, la tortue est en t_3 . Ce processus se poursuit indéfiniment et la tortue sera donc toujours en tête ! Mais le sens commun n'y trouve pas son compte.

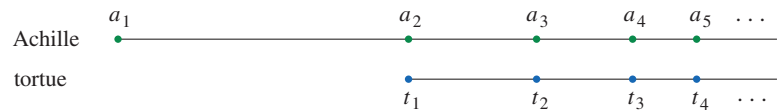


Figure 9

Une illustration graphique de la course entre Achille et une tortue.

Une façon d'expliquer ce paradoxe est d'impliquer la notion de *suite*. Les positions successives d'Achille ($a_1, a_2, a_3, \dots$) ou les positions successives de la tortue ($t_1, t_2, t_3, \dots$) forment ce qu'il est commun d'appeler une suite.

De façon générale, une suite $\{a_n\}$, est un ensemble de nombres écrits dans un ordre bien défini. Par exemple, la suite

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$$

peut être décrite par la formule générale de son $n^{\text{ème}}$ terme :

$$a_n = \frac{1}{n}$$

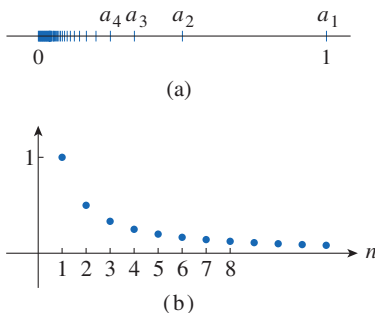


Figure 10

Deux façons de visualiser une suite.

Nous pouvons visualiser cette suite en reportant ses termes sur une droite graduée, comme à la figure 10(a) ou en dessinant son graphique, comme à la figure 10(b). Que ce soit sur l'une ou l'autre figure, il est évident que les termes de la suite $a_n = 1/n$ deviennent de plus en plus proches de 0 lorsque n croît. En fait, nous pouvons trouver des termes aussi proches que l'on veut à condition de rendre n suffisamment grand. Nous disons que la limite de cette suite est 0 et nous écrivons cela

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

La notation tout à fait générale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$$

signifie que les termes a_n s'approche du nombre L lorsque n devient grand. Plus précisément, les nombres a_n peuvent devenir aussi proches que l'on veut de L à condition de choisir n suffisamment grand.

Le concept de limite d'une suite intervient dans la représentation décimale d'un nombre réel. Par exemple, si

$$a_1 = 3,1$$

$$a_2 = 3,14$$

$$a_3 = 3,141$$

$$a_4 = 3,1415$$

$$a_5 = 3,14159$$

$$a_6 = 3,141592$$

$$a_7 = 3,1415926$$

$$\vdots$$

alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \pi$$

Les termes de cette suite sont les approximations rationnelles de π .

Retournons au paradoxe de Zénon. Les positions successives d'Achille et de la tortue forment des suites $\{a_n\}$ et $\{t_n\}$ où $a_n < t_n$, quel que soit n . On peut montrer que ces deux suites ont même limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = p = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n.$$

C'est précisément en ce point p qu'Achille dépasse la tortue.

■ La somme d'une série

Un autre paradoxe de Zénon, que nous a transmis Aristote, est le suivant : « un homme qui se trouve dans une pièce ne peut pas marcher jusqu'au mur. Pour faire cela, il devrait d'abord avoir parcouru la moitié de la distance qui le sépare du mur, ensuite, la moitié de la distance qui reste, et puis encore la moitié de ce qu'il reste encore. Ce procédé peut être poursuivi indéfiniment et ne s'arrête donc jamais » (voyez la figure 11.)

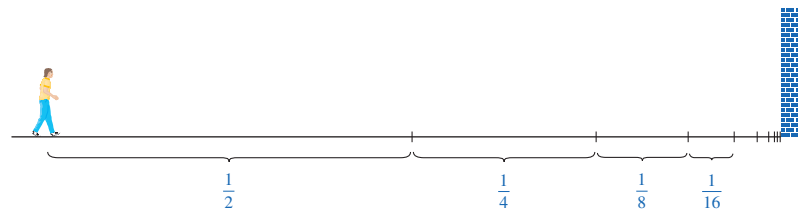


Figure 11

Une visualisation de l'homme qui marche vers le mur.

Nous savons pertinemment bien que l'homme peut atteindre le mur, ce qui suggère que peut-être la distance totale pourrait être le résultat d'une somme d'une infinité de distances de plus en plus petites, comme ceci :

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \quad (3)$$

Zénon, lui, pensait que cela n'avait aucun sens d'additionner une infinité de nombres. Il y a pourtant d'autres situations où, implicitement, nous additionnons une infinité de nombres. Par exemple, la notation décimale $0,\bar{3} = 0,3333 \dots$ signifie

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1\,000} + \frac{3}{10\,000} + \dots$$

et, d'une certaine façon, il doit être vrai que

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1\,000} + \frac{3}{10\,000} + \dots = \frac{1}{3}.$$

Plus généralement, si d_n désigne le $n^{\text{ième}}$ chiffre de l'écriture décimale d'un nombre, alors

$$0.d_1d_2d_3d_4\dots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \dots + \frac{d_n}{10^n} + \dots$$

Par conséquent, certaines sommes infinies, ou séries comme on les appelle, ont un sens. Encore faut-il définir soigneusement ce qu'est la somme d'une série.

Reportons-nous à la série de l'expression (3) et notons s_n la somme des n premiers termes de la série. Alors

$$s_1 = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0,75$$

$$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0,875$$

$$s_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 0,9375$$

$$s_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = 0,96875$$

$$s_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = 0,984375$$

$$s_7 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} = 0,9921875$$

$\vdots$

$$s_{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1024} \approx 0,999902344$$

$\vdots$

$$s_{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{16}} \approx 0,99998474$$

Nous pouvons observer que, plus nous additionnons de termes, plus les sommes partielles s'approchent de 1. En fait, il peut être montré qu'en prenant n suffisamment grand (c'est-à-dire en additionnant un nombre suffisamment grand de termes), les sommes partielles s_n peuvent être rendues arbitrairement proches de 1. Il semble dès lors raisonnable de dire que la somme de la série est 1 et d'écrire

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$$

Nous allons explorer davantage ces sujets au chapitre 8. Ensuite, nous allons exploiter les idées de Newton qui relient les séries au calcul différentiel et intégral

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 1.$$

Au chapitre 8, nous discuterons plus en détail de ces idées. Nous utiliserons ensuite l'idée de Newton consistant à combiner les séries infinies avec le calcul différentiel et intégral.

■ En résumé

Nous avons constaté que le concept de limite est présent lorsque nous cherchons à calculer l'aire d'une région, la pente de la tangente à une courbe, la vitesse d'une voiture ou la somme d'une série. Ces problèmes ont en commun qu'une quantité est obtenue comme la limite d'autres quantités, facilement calculables. C'est par ce concept de base, celui de limite, que le calcul différentiel et intégral se distingue des autres branches des mathématiques. En fait, il pourrait être défini comme la branche des mathématiques qui traite des limites.

Après avoir inventé sa version du calcul différentiel et intégral Isaac Newton s'en servit pour expliquer le mouvement des planètes autour du soleil. Aujourd'hui, cette discipline est mise au service du calcul des trajectoires des satellites et des vaisseaux spatiaux, de la prédiction des effectifs de population, du calcul de la vitesse d'augmentation du prix du café, des prévisions météorologiques, de la mesure du débit cardiaque, du calcul des primes d'assurance vie et de toutes sortes d'autres choses. Ce livre se propose d'aborder quelques-unes de ces applications.

Afin de faire sentir la puissance du sujet, nous terminons cet aperçu par une liste de questions auxquelles vous serez à même de répondre grâce au calcul différentiel et intégral :

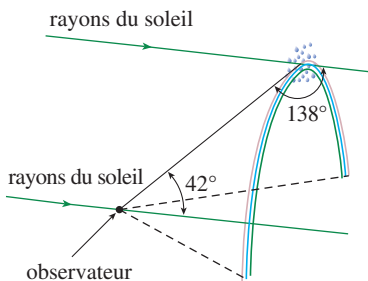
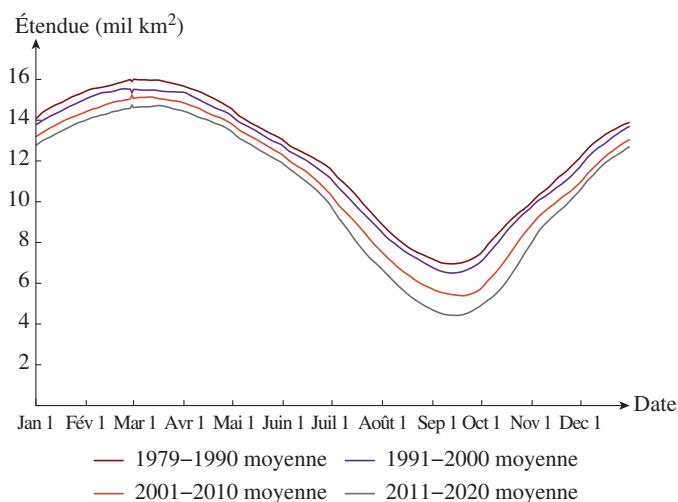


Figure 12

L'angle d'élévation du point le plus haut d'un arc-en-ciel.

1. Comment expliquer le fait, illustré à la figure 12, qu'un observateur voit le point le plus haut d'un arc-en-ciel sous un angle de 42° (voyez la page 313) ?
2. Comment expliquer la forme des boîtes de conserve alignées sur les rayons des supermarchés (voyez la page 372) ?
3. Quelle est la meilleure place au théâtre (voir page 574) ?
4. À quelle distance de l'aéroport un pilote doit-il entamer la descente (voyez la page 237) ?
5. Comment assembler les courbes qui guident le tracé des lettres produites par une imprimante laser (voyez la page 236) ?
6. Au base-ball, où doit se placer un joueur intermédiaire appelé à relayer une balle lancée vers la base initiale (voyez la page 653) ?
7. Une balle lancée en l'air, prend-elle plus de temps pour atteindre son apogée que pour retomber à sa hauteur initiale (voyez la page 643) ?



La banquise n'est autre que de l'eau gelée, mais l'étendue ou aire totale de la glace est liée au climat des régions polaires et du monde entier. La glace réfléchit la lumière du soleil. Une grande étendue de glace tend donc à maintenir une région froide. Une petite étendue de glace correspond à davantage d'eaux sombres qui absorbent la lumière du soleil. L'océan tend à se réchauffer, ce qui fait monter la température des environs. Les scientifiques ont étudié la variation de l'étendue de la glace depuis quatre décennies. C'est un graphique qui réussit la mieux à traduire cette information car il met immédiatement au jour les faits les plus significatifs. La figure montre l'évolution de l'étendue moyenne des glaces sur quatre décennies différentes. Cette information éclairée d'un peu d'Analyse nous permet d'estimer le taux de variation de l'étendue des glaces à tout moment et même le moment de l'année où celle-ci est à son maximum ou à son minimum.

1

Fonctions et modèles

Table des matières

- 1.1 Quatre manières de décrire une fonction
- 1.2 Modèles mathématiques : un catalogue de fonctions essentielles
- 1.3 De nouvelles fonctions avec des anciennes
- 1.4 Fonctions exponentielles
- 1.5 Fonction réciproque et fonction logarithme
- 1.6 Courbes décrites par des équations paramétriques

Les fonctions sont les **objets de base** développés et utilisés en calcul différentiel et intégral. Ce chapitre prépare le chemin qui mène à cette matière en ce qu'il présente et revoit les premiers éléments relatifs aux fonctions, leur représentation graphique ainsi que les manières de les transformer et de les composer. Nous insistons sur le fait qu'une fonction peut être représentée de plusieurs façons : par une expression analytique, par une table de valeurs, par un graphe ou par une description verbale. Nous passons en revue les types principaux de fonctions qui interviennent en calcul différentiel et intégral et décrivons le rôle qu'elles jouent comme modèles de phénomènes issus du monde réel. Nous verrons aussi que les équations paramétriques constituent le meilleur outil pour obtenir le tracé de certaines courbes.

1.1 | Quatre manières de présenter une fonction

Année	Population (en millions)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080
2010	6870
2020	7755

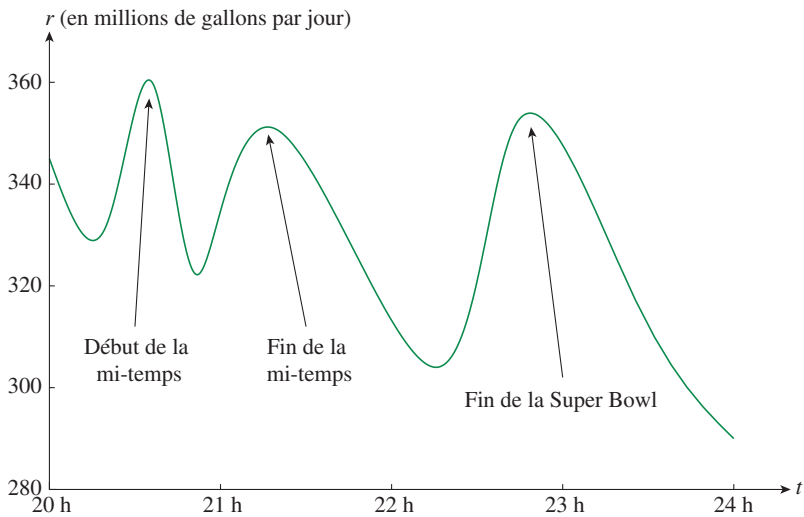
Le concept de fonction est l'élément le plus important de toutes les mathématiques. Bien comprendre la notation d'une fonction est essentiel et vous devez être capable de manier et de calculer une fonction, qu'elle soit décrite algébriquement, par une table de valeurs, par un graphe ou même avec des mots. Il y a fonction en mathématiques, plus spécifiquement en calcul différentiel et intégral, et dans la vie courante dès qu'une quantité dépend d'une autre. Voici quelques exemples.

- A. L'aire A d'un cercle dépend de son rayon r . C'est l'équation $A = \pi r^2$ qui exprime la règle qui lie r et A . À chaque valeur positive de r est associée une valeur de A , on dit que A est une *fonction* de r .
- B. La population mondiale P dépend du temps t . La table ci-contre donne une estimation de cette population mondiale $P(t)$ au temps t , pour certaines années. Par exemple,

$$P(1950) \approx 2\,560\,000\,000$$

- Notez qu'à chaque valeur de la variable t ne correspond qu'une valeur de P et on dit que P est une fonction de t .
- C. Le coût C d'une course en taxi Uber d'un aéroport à un endroit déterminé dépend de la distance parcourue d . Bien qu'il n'existe pas de règle simple qui lie C et d , Uber dispose d'une formule qui détermine C lorsque d est connue.
 - D. Le niveau r de consommation d'eau à New York est une fonction du temps t . La figure 1.1 donne une représentation graphique de ce débit d'eau utilisée pendant la Super Bowl en 2018. La courbe permet d'associer à une valeur de t donnée la valeur correspondante de r .

Figure 1.1
Consommation d'eau à New York pendant la Super Bowl 2018.



Chacun de ces exemples décrit une règle selon laquelle, à un nombre (r , t , d ou t), est associé un autre nombre (A , P , C ou r). Dans chaque cas, on dit que le deuxième nombre est une fonction du premier.

Une **fonction** f est une règle qui assigne à chaque élément x d'un ensemble D exactement un élément, noté $f(x)$, d'un ensemble E .

**Figure 1.2**

Une fonction f vue comme une machine.

Les ensembles D et E envisagés pour des fonctions sont habituellement des ensembles de nombres réels. L'ensemble D est appelé le **domaine de définition** de la fonction. Le nombre $f(x)$ est la valeur **de f en x** et se lit « f de x ». L'ensemble de toutes les valeurs $f(x)$ possibles lorsque x parcourt tout le domaine de définition s'appelle l'**ensemble image**. On appelle **variable indépendante** un symbole qui peut prendre une valeur quelconque du *domaine de définition* de la fonction f . On appelle **variable dépendante** un symbole qui prend une valeur de l'ensemble image de f . Pour la situation **A** ci-dessus, par exemple, c'est r qui est la variable indépendante et A la variable dépendante.

Il est instructif de comparer une fonction à une espèce de **machine** (voir la figure 1.2). Lorsque x est une valeur du domaine de définition de la fonction f , alors la machine l'accepte comme entrée, la transforme selon la règle qui définit la fonction et produit à la sortie $f(x)$. Dès lors, le domaine de définition peut être vu comme l'ensemble de toutes les entrées possibles de la machine et l'ensemble image, comme l'ensemble des sorties possibles.

Les fonctions préprogrammées des calculatrices illustrent fort bien la notion de fonction vue comme une machine. Prenons l'exemple de la fonction activée par la touche racine carrée de votre calculatrice. Vous enfoncez la touche $\sqrt{x}$, puis vous entrez la valeur de x . Si $x < 0$, il n'appartient pas au domaine de définition de la fonction et, de ce fait, ne sera pas accepté par la calculatrice, qui du reste vous enverra un message d'erreur. Par contre, si $x \geq 0$, la calculatrice affichera une valeur *approximative* de $\sqrt{x}$. La touche $\sqrt{x}$ de votre calculatrice n'est donc pas tout à fait la même chose que la fonction mathématique définie par $f(x) = \sqrt{x}$.

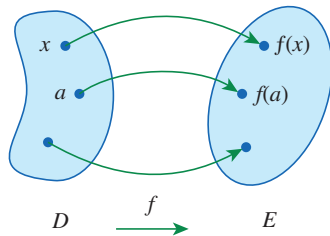
**Figure 1.3**

Diagramme sagittal de la fonction f .

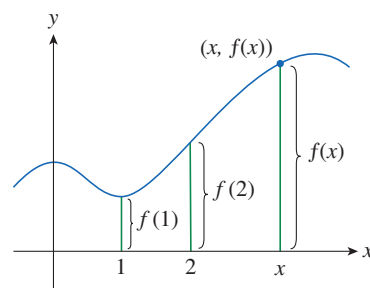
Un **diagramme sagittal**, comme celui de la figure 1.3, est aussi une façon de représenter une fonction. Chaque flèche relie un élément de A à un élément de B . La flèche indique que $f(x)$ est associé à x , $f(a)$ est associé à a , etc.

La façon la plus habituelle de visualiser une fonction est sa représentation graphique. Si f est une fonction définie sur D , son **graphe** est l'ensemble des couples

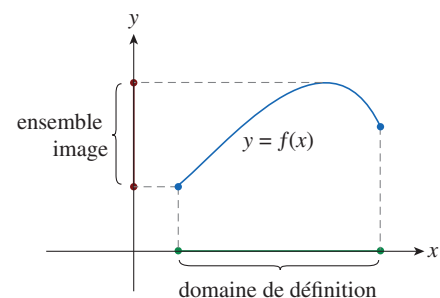
$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

(il s'agit des couples entrée-sortie). Autrement dit, le graphe de f est constitué de l'ensemble des points (x, y) du plan de coordonnées tels que $y = f(x)$ et x appartient au domaine de définition de f .

La représentation graphique d'une fonction f nous donne une image intéressante du comportement ou « biographie » d'une fonction. Comme, en chaque point (x, y) de la courbe, l'ordonnée y est égale à la valeur de $y = f(x)$, elle peut être lue comme la hauteur de la courbe au point x (voir figure 1.4). La représentation graphique de f nous permet aussi de visualiser le domaine de définition et l'ensemble image de f sur les axes Ox et Oy respectivement, comme sur la figure 1.5.

**Figure 1.4**

La valeur de $f(x)$ est la hauteur du graphique au-dessus de x .

**Figure 1.5**

Une visualisation du domaine de définition et de l'ensemble image.

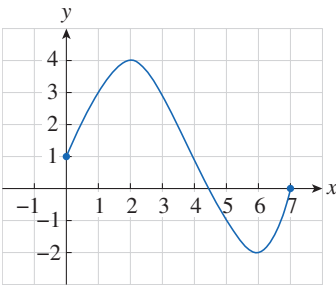


Figure 1.6
Le graphique de $y = f(x)$.

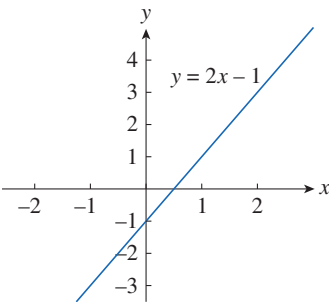


Figure 1.7
Graphique de $y = 2x - 1$.

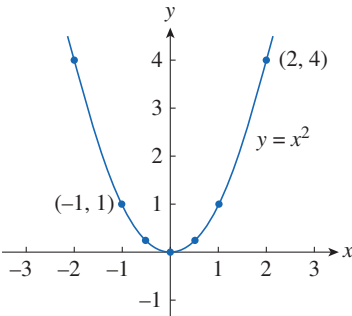


Figure 1.8
Graphique de $y = x^2$.

L'expression

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

qui apparaît dans l'exemple 3 est appelé **quotient des différences** et s'emploie fréquemment en analyse. Il représente le taux moyen de variation de $f(x)$ entre $x = a$ et $x = a + h$, comme vous le verrez au chapitre 2.

Exemple 1 Information issue du graphe de f

La figure 1.6 montre le graphe d'une fonction f .

- Quelles sont les valeurs de $f(1)$ et de $f(5)$?
- Quel est le domaine de définition de f et quel est son ensemble image?

Solution

- Nous lisons sur la figure 1.6 que la courbe représentative de f passe par le point $(1, 3)$, ce qui nous fait dire que la valeur de f en 1 est $f(1) = 3$. La fonction f fait correspondre la valeur 3 à la valeur 1.

Quand $x = 5$, la courbe est à une unité sous l'axe Ox . Donc $f(5) = -1$.

- Nous voyons que $f(x)$ est définie pour $0 \leq x \leq 7$. Par conséquent, le domaine de définition de f est l'intervalle fermé $[0, 7]$. Comme toutes les valeurs prises par f s'étendent de -2 à 4 , l'ensemble image de f est $\{y \mid -2 \leq y \leq 4\} = [-2, 4]$. ■

Exemple 2 Domaine de définition, ensemble image et un graphe

Tracer la courbe représentative de chaque fonction et déterminer le domaine de définition et l'ensemble image.

- $f(x) = 2x - 1$
- $g(x) = x^2$

Solution

- L'équation de la courbe est $y = 2x - 1$ et nous y reconnaissons celle d'une droite de pente 2 et d'ordonnée à l'origine -1 . (Pour rappel, il s'agit de la forme $y = mx + b$ de l'équation d'une droite. Voyez l'annexe B.) Ceci nous permet de tracer partiellement le graphe de f à la figure 1.7. Comme l'expression $2x - 1$ est définie pour toutes les valeurs réelles de x , le domaine de définition de f est tout l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$. Le graphe montre que l'ensemble image est aussi $\mathbb{R}$.
- On peut se servir de la formule de g pour déterminer quelques points du graphe, puis les relier pour obtenir l'allure de la courbe. Puisque $g(2) = 2^2 = 4$ et $g(-1) = (-1)^2 = 1$, nous pouvons marquer les points $(2, 4)$ et $(-1, 1)$ ainsi que quelques autres points du graphe. En les reliant, nous obtenons la courbe de la figure 1.8.

L'équation de cette courbe étant $y = x^2$, il s'agit d'une parabole (voyez l'annexe B). Le domaine de définition de g est $\mathbb{R}$. L'ensemble image de g comprend toutes les valeurs $g(x)$, c'est-à-dire tous les nombres de la forme x^2 . Or, $x^2 \geq 0$ quel que soit x et tout nombre y positif est un carré. Il s'ensuit que l'ensemble image de g est $\{y \mid y \geq 0\} = [0, \infty)$ et la figure 1.8 le confirme. ■

Exemple 3 Calcul d'un quotient de différences

Calculer $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ si $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ et $h \neq 0$.

Solution

On calcule d'abord $f(a+h)$ en remplaçant x par $a+h$ dans l'expression de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= 2(a+h)^2 - 5(a+h) + 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) - 5(a+h) + 1 \\ &= 2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 \end{aligned}$$

Calculer f en $a+h$.
Développer $(a+h)^2$.
Distribuer.

Ensuite, on substitue l'expression obtenue et on simplifie :

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1) - (2a^2 - 5a + 1)}{h} && \text{Utiliser les expressions de } f(a+h) \text{ et } f(a). \\ &= \frac{2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 - 2a^2 + 5a - 1}{h} && \text{Distribuer le facteur } -1. \\ &= \frac{4ah + 2h^2 - 5h}{h} = 4a + 2h - 5 && \text{Simplifier.}\end{aligned}$$

■ Les diverses présentations des fonctions

Il y a quatre façons de présenter une fonction :

- verbalement (en la décrivant avec des mots)
- numériquement (en présentant un tableau de valeurs)
- visuellement (en montrant son graphe)
- algébriquement (en la définissant par une formule explicite)

Comme une même fonction peut être présentée de quatre manières différentes, il est souvent intéressant des les envisager toutes afin d'en savoir plus sur ses caractéristiques. À l'exemple 2, nous disposons de la présentation algébrique et sommes passés à la visualisation graphique. Il est vrai, toutefois, que certaines fonctions sont plus naturellement décrites d'une façon plutôt que d'une autre. Réexaminons sous cet angle les quatre situations que nous avons envisagées au début de cette section.

Année	Population (en millions)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080
2010	6870
2020	7755

- A.** La meilleure présentation que l'on puisse faire de l'aire du cercle en tant que fonction du rayon est probablement la formule algébrique $A = \pi r^2$, même s'il est possible de dresser une table de valeurs ou de dessiner le graphe (la moitié d'une parabole). Parce que le rayon d'un cercle ne peut qu'être positif, le domaine de définition de la fonction A est $\{r \mid r > 0\} =]0, +\infty[$ et l'ensemble image est également $]0, +\infty[$.
- B.** Nous avons décrit cette fonction avec des mots : $P(t)$ est la population mondiale au temps t . Le tableau de valeurs ci-contre est une bonne présentation de cette fonction. En reportant les points, nous obtenons le graphe (de points) de la figure 1.9. Cette image donne également une bonne idée de la fonction ; elle englobe d'un seul coup d'oeil toutes les données. Que dire de la présentation par formule ? Il n'est évidemment pas possible de créer une formule explicite qui donne exactement l'effectif $P(t)$ de la population à tout moment t . Par contre, il y a moyen de trouver une expression d'une fonction qui prenne à *peu près* les valeurs de $P(t)$. Les méthodes expliquées à la section 1.5 conduisent à l'approximation

$$P(t) \approx f(t) = 1358,03 \cdot (1,01478)^t$$

et la figure 1.10 permet de vérifier la bonne qualité de l'ajustement. La fonction f est appelée un *modèle mathématique* de la croissance de la population. En d'autres mots, c'est une fonction définie par une formule explicite qui se comporte à peu près comme notre fonction initiale. Nous verrons néanmoins que les méthodes du calcul différentiel et intégral peuvent être appliquées à une table de valeurs ; une formule explicite n'est pas indispensable.

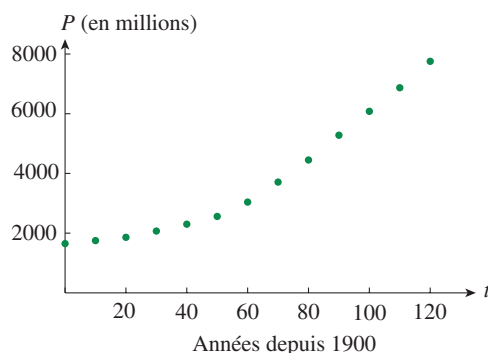


Figure 1.9
Un diagramme en points des données sur la population.

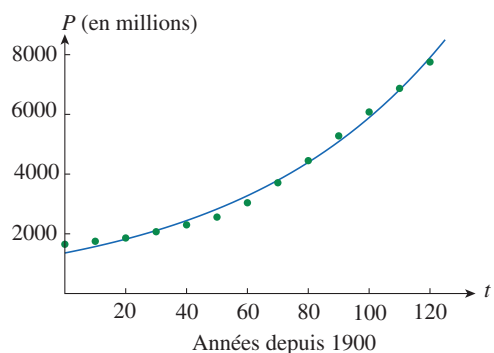


Figure 1.10
Le graphique de f superposé au diagramme en points.

La fonction C peut être donnée ou représentée par une table de valeurs.

d (en km)	$C(d)$ (euros)
$0 < d \leq 1$	5:00
$1 < d \leq 2$	7:50
$2 < d \leq 3$	10:00
$3 < d \leq 4$	12:50
$4 < d \leq 5$	15:00
$\vdots$	$\vdots$

- La fonction P est du type de celles que l'on obtient lorsqu'on essaie d'appliquer le calcul différentiel et intégral à la réalité. On commence par la description verbale d'une fonction. On peut alors en construire une table de valeurs qui proviennent parfois de la lecture d'instruments d'expérimentation. Nous verrons tout au long de ce livre que, même en présence de quelques valeurs seulement d'une fonction, il est toujours possible d'appliquer les méthodes du calcul différentiel et intégral.
- C. La fonction sur le coût d'une course de taxi est décrite en mots. Soit $C(d)$ le coût d'un trajet Uber entre l'aéroport et un lieu précis situé à d kilomètres. La table qui figure dans la marge détaille des valeurs possibles de cette fonction à un moment précis de la journée et convient pour présenter cette fonction. La table des valeurs inscrite dans la marge est la présentation la plus commode de cette fonction, même s'il est possible d'en donner une représentation graphique. Voir l'exemple 10.
- D. Le graphe de la figure 1.1 est le plus naturel pour donner une idée de la consommation d'eau $r(t)$. Bien sûr, il serait possible de dresser une table de valeurs ou même de conjecturer une formule d'approximation. Mais, somme toute, ce que le département des eaux a besoin de connaître – amplitudes et fluctuations – est visible sur le graphe. Il en va de même pour la lecture des électrocardiogrammes des malades cardiaques ou des détecteurs de mensonge, et même de l'accélération verticale du sol pendant un tremblement de terre.

Dans cet exemple, nous allons utiliser une description verbale pour tracer le graphe d'une fonction.

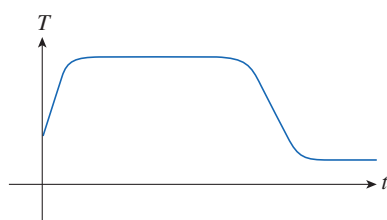


Figure 1.11
Graphique de la température de l'eau en fonction du temps.

Exemple 4 Fonction décrite verbalement

Dès que vous ouvrez un robinet d'eau chaude, la température T de l'eau qui en coule varie avec le temps. Dessiner grossièrement une courbe représentative de l'évolution de T en fonction du temps t .

Solution

Comme l'eau qui coule au début est celle qui a séjourné dans les tuyauteries, sa température est proche de la température ambiante de la pièce. Mais au moment où arrive l'eau du réservoir d'eau chaude, la température T s'élève rapidement et atteint la température du réservoir. Elle y reste jusqu'à ce que le réservoir soit vide. À ce moment, elle diminue rapidement jusqu'à la température de l'eau de distribution. La figure 1.11 montre une esquisse de cette variation de T en fonction de t . ■

À l'exemple 5, nous partons d'une fonction issue d'une situation physique et décrite verbalement et arrivons à une formule algébrique explicite. Être capable de négocier un tel passage est un atout considérable pour résoudre les problèmes d'optimisation par le calcul différentiel et intégral.

Exemple 5 Coût de fabrication

Un conteneur rectangulaire sans couvercle offre un volume de 10 m^3 . La longueur de sa base est le double de sa largeur. Le matériau pour le fabriquer revient à 10 € le mètre carré tandis que celui des parois latérales revient à 6 € le mètre carré. Exprimez le coût de fabrication en fonction de la largeur de la base.

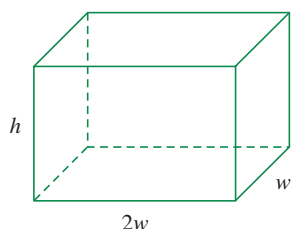


Figure 1.12
Un conteneur de stockage rectangulaire.

Au moment de construire des fonctions, comme à l'exemple 5, il est sans doute bon de se remémorer les principes de la résolution de problème énoncés à la page 85, et en particulier le premier : *Comprendre le problème.*

Solution

Nous commençons par faire un croquis du conteneur en y indiquant les notations w et $2w$ pour les côtés de la base et h pour la hauteur (figure 1.12).

Comme l'aire de la base mesure $(2w)w = 2w^2$, son coût de fabrication est $10(2w^2)$. Quant aux parois latérales, deux d'entre elles mesurent wh et les deux autres, $2wh$. Leur coût, dans le matériau ad hoc, est donc $6[2(wh) + 2(2wh)]$. Le coût total s'élève donc à

$$C = 10(2w^2) + 6[2(wh) + 2(2wh)] = 20w^2 + 36wh.$$

Afin d'exprimer C comme fonction de la seule variable w , nous devons éliminer h et pour cela nous utilisons le fait que le volume est de 10 m^3 . De

$$w(2w)h = 10,$$

nous extrayons

$$h = \frac{10}{2w^2} = \frac{5}{w^2}.$$

Par substitution de cette expression de h dans celle de C , nous obtenons

$$C = 20w^2 + 36w\left(\frac{5}{w^2}\right) = 20w^2 + \frac{180}{w}.$$

Finalement,

$$C(w) = 20w^2 + \frac{180}{w} \quad w > 0$$

est une expression de C en tant que fonction de w . ■

L'exemple suivant fait intervenir le domaine de définition.

Exemple 6 Domaine de définition d'une fonction

Quel est le domaine de définition de chaque fonction :

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{x+2} \qquad \text{b) } g(x) = \frac{1}{x^2 - x}$$

Solution

- a) Comme la racine carrée d'un nombre négatif n'est pas définie (en tant que nombre réel), le domaine de définition de f ne comprend que les valeurs de x pour lesquelles $x + 2 \geq 0$. Ce qui est équivalent à $x \geq -2$. Le domaine de définition est donc l'intervalle $[-2, +\infty[$.

Convention sur le domaine de définition

Si une fonction est donnée par une formule sans que son domaine de définition ne soit spécifié, il est admis que le domaine de définition est l'ensemble de tous les nombres pour lesquels la formule a du sens et donne un nombre réel comme réponse.

b) Factorisons le dénominateur de g :

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x - 1)}$$

Comme la division par 0 n'est pas possible, nous constatons que $g(x)$ n'est pas définie lorsque $x = 0$ ou $x = 1$.

Dès lors, le domaine de définition de g est $\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$.

En termes d'intervalles, il s'écrit aussi

$$]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[.$$

La représentation graphique d'une fonction est une courbe du plan Oxy . Mais alors se pose la question : quelles sont les courbes du plan Oxy susceptibles de représenter une fonction ? Nous y répondons par le test que voici.

Test de la verticale

Une courbe du plan Oxy est la représentation graphique d'une fonction si et seulement si aucune droite verticale ne la coupe plus d'une fois.

Note: Si une droite $x = a$ ne coupe pas la courbe, cela ne viole pas le test de la droite verticale car la courbe peut quand même représenter une fonction non définie en $x = a$.

La justification de ce test de la verticale se lit à la figure 1.13. Si une droite verticale quelconque $x = a$ ne coupe une courbe qu'une fois, en (a, b) , alors une seule image b est associée à a par f . Si au contraire, une droite $x = a$ coupe une courbe deux fois, en (a, b) et en (a, c) , alors cette courbe ne peut être la représentation d'une fonction car une fonction ne peut attribuer deux valeurs différentes à a .

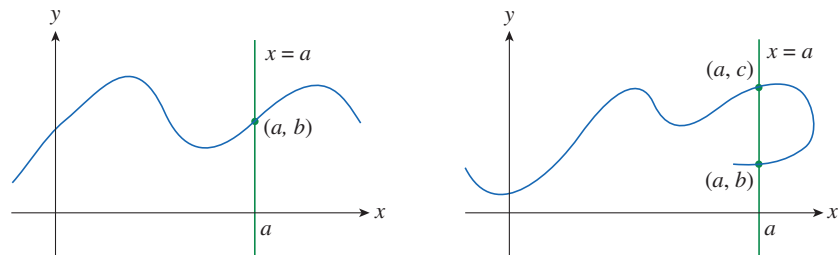


Figure 1.13
Une illustration du test de la verticale.

a) Cette courbe représente une fonction.

b) Cette courbe ne représente pas une fonction.

Ainsi, la parabole $x = y^2 - 2$ dessinée à la figure 1.14 a) ne peut pas être le graphe d'une fonction de x parce que, comme vous pouvez le remarquer, il y a des droites verticales qui coupent la parabole deux fois.

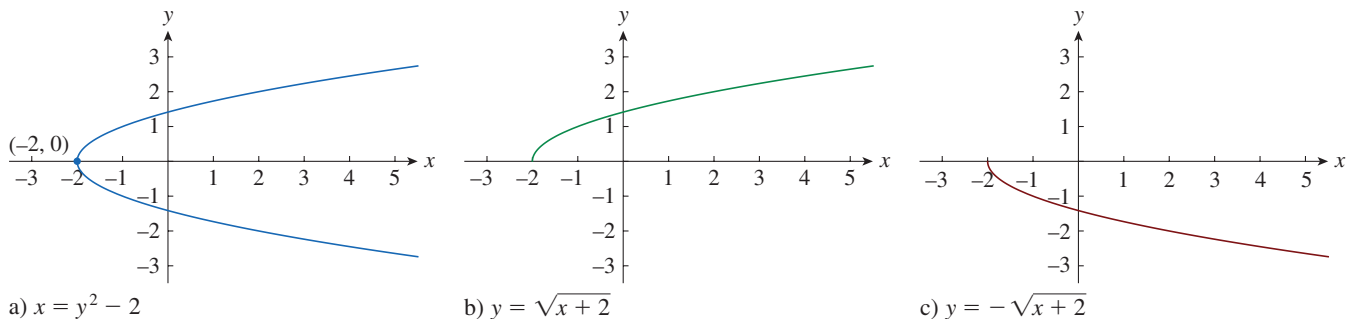


Figure 1.14

Une même courbe peut être la représentation graphique d'une ou de plusieurs fonctions.

La parabole comprend en fait le graphe de *deux* fonctions de x . En effet, $x = y^2 - 2$ entraîne $y^2 = x + 2$, et de là $y = \pm \sqrt{x + 2}$.

La moitié supérieure de la parabole est alors le graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{x + 2}$ [celle de l'exemple 6 a) ; voir figure 1.14b)] et la moitié inférieure de la parabole, celui de $g(x) = -\sqrt{x + 2}$ [voir la figure 1.14c)].

Si nous intervertissons les rôles de x et y , nous remarquons que l'équation $x = h(y) = y^2 - 2$ définit x comme une fonction de y (dans laquelle y est la variable indépendante et x , la variable dépendante) et la parabole apparaît maintenant comme la représentation graphique de la fonction h .

■ Les fonctions définies par morceaux

Les fonctions des quatre exemples suivants sont définies par différentes formules selon les parties de leur domaine de définition. De telles fonctions sont dites **définies par morceaux**.

Exemple 7 Calculer et dessiner le graphe d'une fonction définie par morceaux

La fonction f est définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1. \end{cases}$$

Quelles sont les valeurs de $f(-2)$, $f(-1)$ et $f(0)$ et quelle est la représentation graphique de cette fonction ?

Solution

Il faut se souvenir qu'une fonction est une règle. Dans le cas présent, la règle est la suivante :

regardez d'abord la valeur d'entrée x .

Si $x \leq -1$, alors la valeur de $f(x)$ est donnée par la formule $1 - x$.

Par contre, si $x > -1$, la valeur de $f(x)$ est donnée par la formule x^2 .

Comme $-2 \leq -1$, $f(-2) = 1 - (-2) = 3$.

Comme $-1 \leq -1$, $f(-1) = 1 - (-1) = 2$.

Comme $0 \geq -1$, $f(0) = 0^2 = 0$.

Comment faire pour obtenir le graphe de f ? D'une part, comme $f(x) = 1 - x$ lorsque $x \leq -1$, nous reconnaissons que la partie du graphe située à gauche de la droite verticale $x = -1$ coïncide avec la droite $y = 1 - x$, de pente -1 et d'ordonnée à l'origine 1 .

D'autre part, $f(x) = x^2$ lorsque $x > -1$; de ce fait, la partie du graphe située à droite de la droite verticale $x = -1$ coïncide avec la parabole $y = x^2$.

Tout ceci nous mène au graphe de la figure 1.15. Le point de coordonnées $(-1, 2)$ est plein pour indiquer qu'il fait partie du graphe à la différence du point de coordonnées $(-1, 1)$ qui est vide parce qu'il n'en fait pas partie. ■

La fonction définie par morceaux suivante est la fonction valeur absolue. Rappelez-vous que la **valeur absolue** d'un nombre a , notée $|a|$, est la distance qui sépare a de 0 sur la droite réelle. Vu que les distances sont toujours positives ou nulles, il se fait que

$$|a| \geq 0 \text{ quel que soit } a.$$

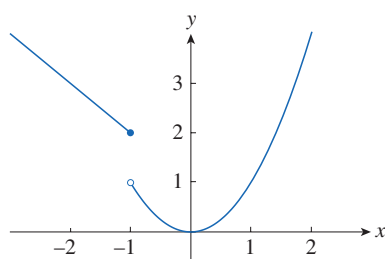


Figure 1.15
Graphique de f .

Se reporter à l'annexe A pour une révision plus complète de la fonction valeur absolue.

Par exemple,

$$|3| = 3, \quad |-3| = 3, \quad |0| = 0, \quad |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1, \quad |3 - \pi| = \pi - 3$$

De façon générale, nous avons

$$\begin{aligned} |a| &= a && \text{si } a \geq 0 \\ |a| &= -a && \text{si } a \leq 0 \end{aligned}$$

Rappelons que quand a est négatif, $-a$ est positif.

Exemple 8 Fonction valeur absolue

Tracer le graphe de la fonction $f(x) = |x|$.

Solution

De ce qui précède, nous savons que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

En procédant de la même façon qu'à l'exemple 7, nous voyons que le graphe de f coïncide avec la droite $y = x$ à droite de l'axe Oy et avec la droite $y = -x$, à gauche du même axe (voir la figure 1.16). ■

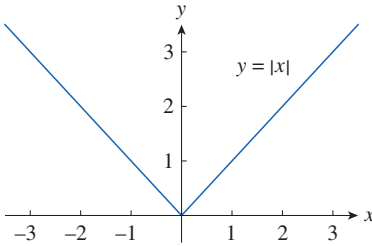


Figure 1.16

Graphique de la fonction valeur absolue.

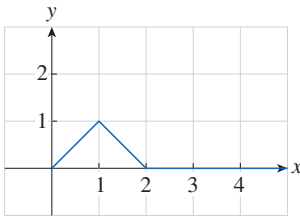


Figure 1.17

Graphique de la fonction f .

Pour rappel, la forme point-pente de l'équation d'une droite est $y - y_1 = m(x - x_1)$. Voir annexe B.

Exemple 9 Formule à partir d'un graphe

Établir une formule pour la fonction f dont le graphe est dessiné à la figure 1.17.

Solution

Comme la droite qui passe par $(0, 0)$ et $(1, 1)$ a une pente $m = 1$ et une ordonnée à l'origine $b = 0$, son équation est $y = x$. La formule pour f qui correspond à cette partie du graphe est donc

$$f(x) = x \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1.$$

La droite qui passe par les points $(1, 1)$ et $(2, 0)$ a une pente $m = -1$ et son équation est $y - 0 = (-1)(x - 2)$ ou $y = 2 - x$

La formule pour f qui correspond à cette partie du graphe est

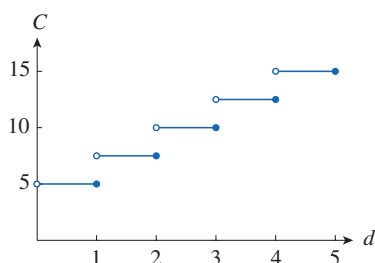
$$f(x) = 2 - x \quad \text{si } 1 < x \leq 2.$$

Nous voyons encore que le graphe de f coïncide avec l'axe Ox pour $x > 2$. En rassemblant toutes ces informations, nous avons finalement pour f une formule en trois morceaux

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Exemple 10 Une course Uber

À l'exemple C au début de cette section, nous avons envisagé le coût $C(d)$ d'une course en taxi Uber depuis l'aéroport jusqu'à un lieu déterminé distant de d km. Cette fonction est définie par morceaux selon la table de valeurs

**Figure 1.18**Graphique de la fonction de coût C .

$$C(d) = \begin{cases} 5,00 & \text{si } 0 < d \leq 1 \\ 7,50 & \text{si } 1 < d \leq 2 \\ 10,00 & \text{si } 2 < d \leq 3 \\ 12,50 & \text{si } 3 < d \leq 4 \\ \vdots & \end{cases}$$

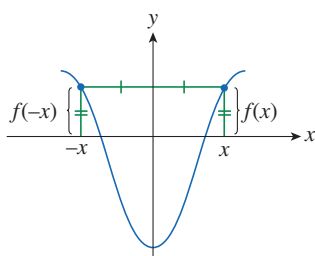
Vous pouvez voir le graphique de C à la figure 1.18 et constater pourquoi ces fonctions sont parfois appelées **en escaliers**—elles sautent d’une valeur à la suivante. Nous étudierons de telles fonctions plus en détail au chapitre 2.

■ Les symétries

Une fonction f qui satisfait à $f(-x) = f(x)$ pour toutes les valeurs de x de son domaine de définition est dite **paire**. La fonction $f(x) = x^2$ en est un exemple car

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Graphiquement, cette propriété se traduit par une symétrie du graphe par rapport à l’axe Oy (voir la figure 1.19). Ce qui signifie qu’ayant déjà dessiné le graphe de f pour $x \geq 0$, il suffit de le compléter en lui ajoutant simplement l’image symétrique par rapport à l’axe Oy .

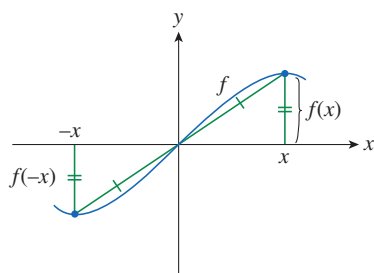
**Figure 1.19**

Graphique d’une fonction paire.

Une fonction f qui satisfait à $f(-x) = -f(x)$ pour toutes les valeurs de x de son domaine de définition est dite **impaire**. La fonction $f(x) = x^3$ est impaire parce que

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Le graphe d’une fonction impaire est symétrique par rapport à l’origine (voir la figure 1.20). Si nous avons déjà dessiné le graphe de f pour $x \geq 0$, il suffit de le compléter en lui adjoignant simplement l’image obtenue après une rotation de 180° autour de l’origine.

**Figure 1.20**

Graphique d’une fonction impaire.

Exemple 11 Paire, impaire ou aucun des deux

Examiner si les fonctions que voici sont paire, impaire ou ni l’un ni l’autre.

a) $f(x) = x^5 + x$

b) $g(x) = 1 - x^4$

c) $h(x) = 2x - x^2$

Solution

$$\begin{aligned} \text{a) } f(-x) &= (-x)^5 + (-x) = (-1)^5 x^5 + (-x) \\ &= -x^5 - x = -(x^5 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Calculer f en $-x$.

Simplifier.

Comparer le résultat avec $f(x)$.

Cette fonction est donc impaire.

$$\text{b) } g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$$

Aussi, g est-elle paire.

$$\text{c) } h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$$

Comme $h(-x) \neq h(x)$ et $h(-x) \neq -h(x)$, nous concluons que h n’est ni paire, ni impaire.

La figure 1.21 montre les graphes des fonctions de l'exemple 11. En particulier, le graphe de h n'est symétrique ni par rapport à Oy , ni par rapport à l'origine.

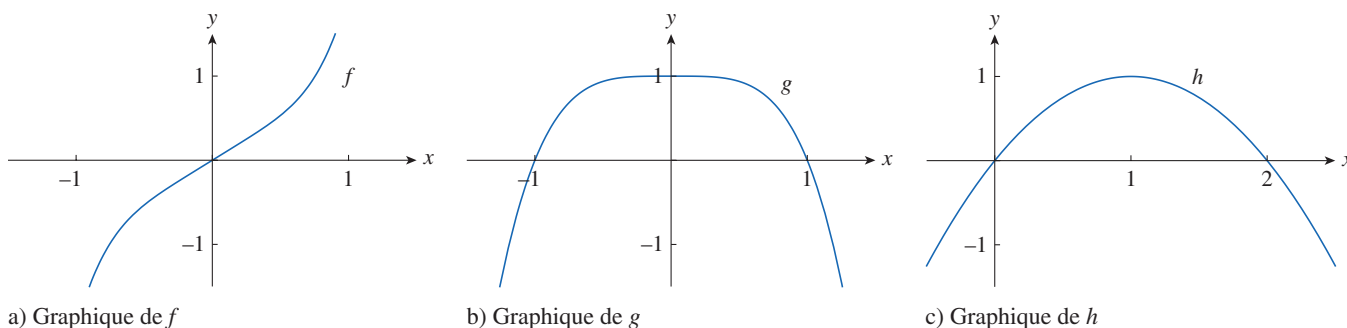


Figure 1.21

Graphiques des fonctions de l'exemple 11.

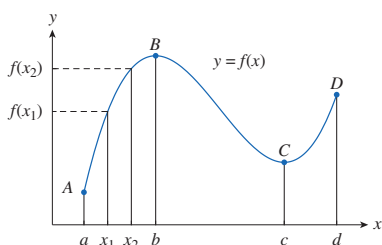


Figure 1.22

La courbe monte sur l'intervalle $[a, b]$, descend sur l'intervalle $[b, c]$ et remonte sur l'intervalle $[c, d]$.

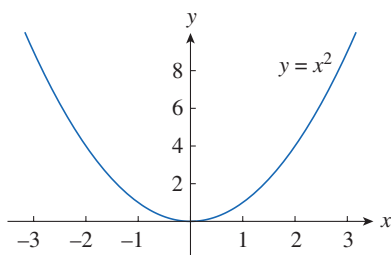


Figure 1.23

Graphique de $y = x^2$.

Fonctions croissantes et décroissantes

La courbe représentée à la figure 1.22 monte de A jusqu'à B , descend de B jusqu'à C et monte à nouveau de C jusqu'à D . On dit que la fonction est strictement croissante sur l'intervalle $[a, b]$, strictement décroissante sur l'intervalle $[b, c]$ et strictement croissante à nouveau sur $[c, d]$. On remarque que, quels que soient deux points x_1 et x_2 de $[a, b]$ tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) < f(x_2)$. Telle est la propriété qui définit une fonction croissante.

Une fonction f est dite **strictement croissante** sur un intervalle I si

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ pour } x_1 < x_2 \text{ dans } I.$$

Une fonction f est dite **strictement décroissante** sur un intervalle I si

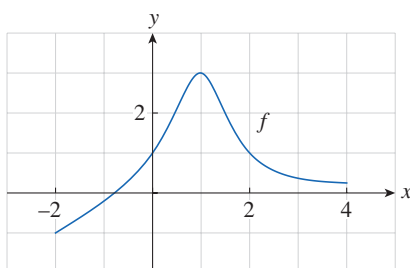
$$f(x_1) > f(x_2) \text{ pour } x_1 < x_2 \text{ dans } I.$$

Il est important de souligner que, dans cette définition, l'inégalité $f(x_1) < f(x_2)$ doit être satisfaite pour *toute* paire de points x_1 et x_2 de I tels que $x_1 < x_2$.

Au vu de la figure 1.23, nous pouvons dire que la fonction $f(x) = x^2$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

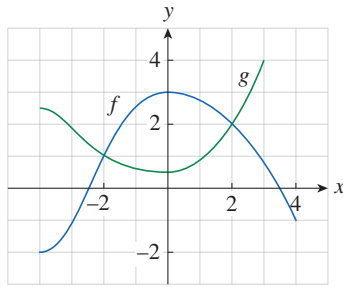
1.1 Exercices

1. Voici la représentation graphique d'une fonction f .



- Quelle est la valeur de $f(1)$?
- Estimez la valeur de $f(-1)$.
- Pour quelle valeur de x a-t-on $f(x) = 1$?
- Estimez les valeurs de x en lesquelles $f(x) = 0$.
- Déterminez le domaine de définition et l'ensemble image de f .
- Sur quel intervalle f est-elle strictement croissante ?

2. Voici les graphes de f et g .



- Que vaut $f(-4)$ et $g(3)$?
- Pour quelles valeurs de x est-ce que $f(x) = g(x)$?
- Estimez la solution de l'équation $f(x) = -1$.
- Sur quel intervalle voyez-vous f strictement décroissante?
- Déterminez le domaine de définition et l'ensemble image de f .
- Déterminez le domaine de définition et l'ensemble image de g .

3. Si f est définie par $f(x) = 3x^2 - x + 2$, calculez

- $f(2)$
- $f(-2)$
- $f(a)$
- $f(-a)$
- $f(a+1)$
- $2f(a)$
- $f(2a)$
- $f(a^2)$
- $[f(a)]^2$
- $f(a+h)$

Calculez le quotient différentiel de la fonction donnée. Simplifiez votre réponse.

4. $f(x) = 4 + 3x - x^2$, $\frac{f(3+h) - f(3)}{h}$

5. $f(x) = x^3$, $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

6. $f(x) = \frac{1}{x}$, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

7. $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$, $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

Recherchez le domaine de définition des fonctions.

8. $f(x) = \frac{x+4}{x^2-9}$

9. $f(x) = \frac{2x^3-5}{x^2+x-6}$

10. $f(t) = \sqrt[3]{2t-1}$

11. $g(t) = \sqrt{3-t} - \sqrt{2+t}$

12. $h(x) = -\frac{1}{\sqrt[4]{x^2-5x}}$

13. $F(p) = \sqrt{2-\sqrt{p}}$

14. $f(u) = \frac{u+1}{1+\frac{1}{u+1}}$

15. Tracez le graphe de chacune des fonctions suivantes.

- $f(x) = |x+1| - 2$
- $f(x) = |x| - 2$
- $f(x) = -|x+2| + 3$
- $f(x) = 4 - |x|$
- $f(x) = 2 - |x+4|$
- $f(x) = 5 + |x^2|$

16. Tracez le graphe de chacune des fonctions suivantes.

- $g(x) = (x-1)^2 + 2$
- $g(x) = x^2 - 3$
- $g(x) = -(x-2)^2 + 3$
- $g(x) = 5 - (x+3)^2$
- $g(x) = 4 + (x+2)^2$

17. Déterminez le domaine de définition et l'ensemble image et tracez la représentation graphique de la fonction $h(x) = \sqrt{4-x^2}$.

Déterminez le domaine de définition et tracez la courbe représentative de la fonction.

18. $f(x) = 1.6x - 2.4$

19. $g(t) = \frac{t^2-1}{t+1}$

20. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

21. $f(x) = x^3 - 1$

22. $h(x) = \frac{x^2}{x+1}$

23. $g(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x^3}$

Pour chacune des fonctions définies par morceaux, calculez $f(-3)$, $f(0)$ et $f(2)$ et tracez le graphe de la fonction.

24. $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 0 \\ 1-x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

25. $f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{x}{2} & \text{si } x < 2 \\ 2x-5 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$

26. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1. \end{cases}$

27. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 1 \\ 7-2x & \text{si } x > 1. \end{cases}$

Cherchez une expression algébrique de la fonction qui correspond à la courbe décrite.

28. Le segment de droite qui passe par les points $(1, -3)$ et $(5, 7)$.

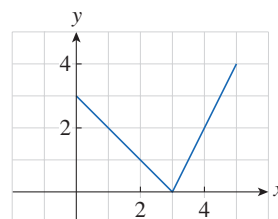
29. Le segment de droite qui passe par les points $(-5, 10)$ et $(7, -10)$.

30. La moitié inférieure de la parabole $x + (y-1)^2 = 0$.

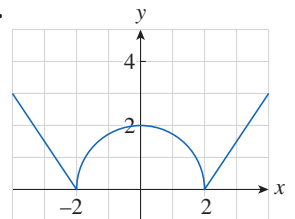
31. La moitié supérieure du cercle d'équation $x^2 + (y-2)^2 = 4$.

Déterminez une expression de la fonction définie par morceaux dont le graphe est présenté.

32.

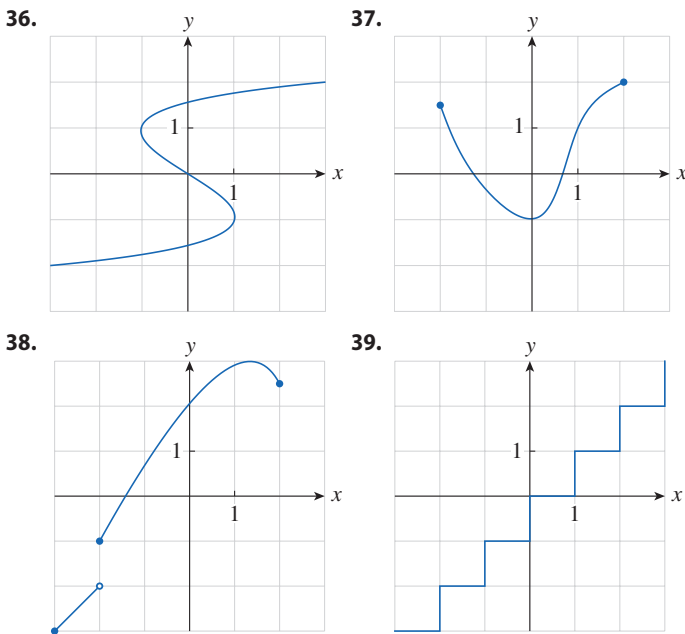


33.

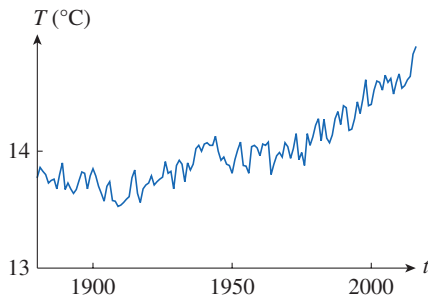


34. La figure 1.1 montre le graphe de la consommation d'eau à New York au moment de la super Bowl en 2018. À l'aide de cette figure, déterminez l'intervalle de variation du taux de consommation durant cette période.
35. Nous avons décrit dans cette section plusieurs exemples de fonctions ordinaires du quotidien : la population en fonction du temps, le coût d'une course de taxi Uber en fonction de la distance et la température de l'eau en fonction du temps. Donnez trois exemples de fonctions de la vie de tous les jours décrites verbalement. Que pouvez-vous dire au sujet du domaine de définition et de l'ensemble image de chacune de vos fonctions ? Faites si possible un tracé graphique de celles-ci.

Parmi les courbes que voici lesquelles sont la représentation graphique d'une fonction. Si c'est le cas, déterminez le domaine de définition et l'ensemble image.



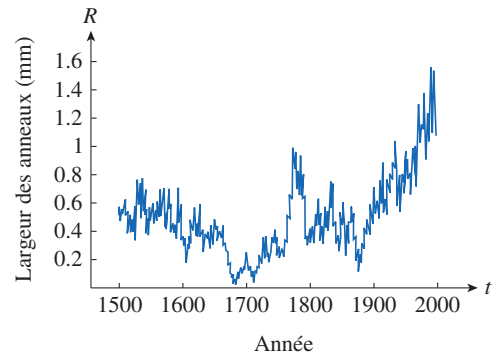
40. Voici le graphe des températures moyennes globales T de 1880 à 2016.



Sur la base de ce graphe, estimez

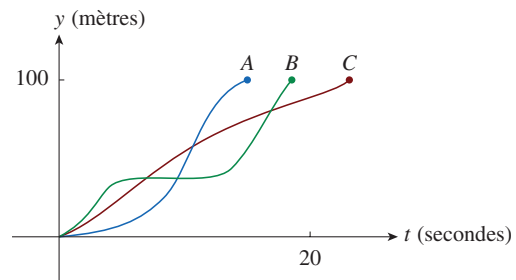
- La température moyenne globale en 1950.
- L'année au cours de laquelle la température moyenne globale a été de $14,2^{\circ}\text{C}$.
- L'année qui a connu la température la plus haute. La plus basse.
- L'ensemble image de T .

41. Les arbres croissent plus vite et forment des anneaux plus larges les années chaudes tandis qu'ils croissent moins vite et forment des anneaux plus étroits durant les années plus froides. La figure montre les largeurs des anneaux d'un pin de Sibérie relevées entre 1500 et 2000.

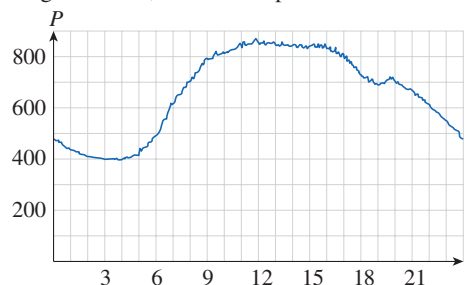


Source: Adapté de G. Jacoby et al., "Mongolian Tree Rings et 20th-Century Warming," *Science* 273 (1996): 771–73.

- Quel est l'ensemble image de la fonction largeur des anneaux ?
 - Quel enseignement peut-on tirer de ce graphe au sujet de la température de la Terre ? Ce graphe porte-t-il la trace des éruptions volcaniques de la moitié du 19^e siècle ? Justifiez votre réponse.
42. Vous jetez quelques glaçons dans un verre, vous le remplissez d'eau froide et le laissez reposer sur une table. Décrivez comment varie la température de l'eau à mesure que le temps passe. Dessinez ensuite un graphe approximatif de la température de l'eau comme une fonction du temps qui s'écoule.
43. Trois athlètes courent le 100 mètres. Le graphe décrit la distance parcourue par chacun en fonction du temps. Commentez la course de chaque athlète à partir de ces courbes. Qui a gagné la course ? Ont-ils tous terminé l'épreuve ?



44. Le graphe montre la consommation électrique de San Francisco un jour de septembre où P est mesuré en megawatts et t , en heures à partir de minuit.



- a) Quelle est la puissance consommée à 6 heures du matin et à 18 heures ?
 b) À quelle heure la consommation était-elle la plus élevée ? La plus faible ? Ces moments vous semblent-ils plausibles ?

45. Faites un rapide graphe de la façon dont les heures de clarté évolue au cours d'une année.
46. Tracez un graphe rapide de la façon dont évolue la température extérieure en fonction du temps au cours d'une journée printanière.
47. Esquissez la façon dont évolue la valeur marchande d'une nouvelle voiture sur une période de 20 ans. Supposez que la voiture est bien entretenue.
48. Faites le graphe de la quantité vendue d'une certaine marque de café dans un magasin en fonction du prix du café.
49. Vous placez une tarte surgelée dans un four et la laissez cuire pendant une heure. Ensuite, vous la sortez du four et la laissez refroidir avant de la manger. Décrivez verbalement d'abord, graphiquement ensuite, comment a évolué la température de la tarte en fonction du temps.
50. Chaque mercredi après-midi, monsieur Dupont tond sa pelouse. Dessinez grossièrement un graphe qui représente la hauteur de l'herbe durant une période de 4 semaines.
51. Un avion quitte un aéroport pour se poser, une heure plus tard, sur un autre aéroport situé à 640 km. Si t désigne le temps en minutes à partir du moment où l'avion a décollé, soit $x(t)$ la distance horizontale qu'il a parcourue et $y(t)$ son altitude.
- Dessinez un graphe possible de x comme fonction de t .
 - Dessinez un graphe possible de y comme fonction de t .
 - Dessinez un graphe possible de la vitesse par rapport au sol en fonction de t .
 - Dessinez un graphe possible de la vitesse verticale de l'avion en fonction de t .
52. Voici sous forme de tableau les températures (en C) qui ont été relevées toutes les deux heures à l'observatoire météorologique d'Uccle (Belgique) entre minuit et midi par une chaude journée d'été. Le temps t est mesuré en heures à partir de minuit.

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	22,5	22,5	21	20,5	22	27	31	32,5

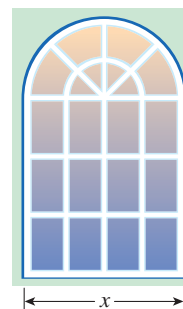
- Faites un rapide graphe de la température T en fonction du temps t .
 - Grâce à ce graphe, estimez la température à 11 h du matin.
53. Des chercheurs ont mesuré la concentration en alcool dans le sang (CAS) de huit adultes après une consommation rapide de 30 mL d'éthanol (ce qui correspond à deux verres classiques de boisson alcoolisée). La table montre les données obtenues en moyenne (en mg/mL) de ces 8 individus.

t (heures)	CAS	t (heures)	CAS
0,00	0,00	1,75	0,22
0,20	0,25	2,00	0,18
0,50	0,41	2,25	0,15
0,75	0,40	2,50	0,12
1,00	0,33	3,00	0,07
1,25	0,29	3,50	0,03
1,50	0,24	4,00	0,01

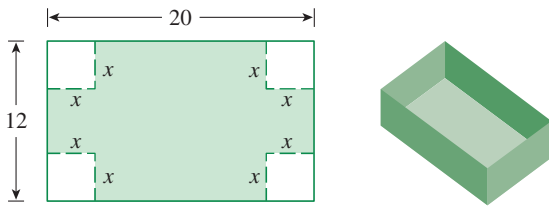
Source: Adapté de P. Wilkinson et al., "Pharmacokinetics of Ethanol after Oral Administration in the Fasting State," *Journal of Pharmacokinetics et Biopharmaceutics* 5 (1977): 207–24.

- Esquissez le graphe de la concentration en alcool dans le sang en fonction du temps.
 - Servez-vous de votre graphe pour décrire comment varie l'effet de l'alcool en fonction du temps.
54. Le volume d'un ballon sphérique de rayon r cm est donné par $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Déterminez une fonction qui représente la quantité d'air à injecter dans le ballon pour que son rayon passe de r cm à $r + 1$ cm.
- Déterminez une formule pour la fonction décrite et définissez son domaine de définition.
55. Le périmètre d'un rectangle mesure 20 m. Exprimez l'aire du rectangle comme une fonction de la longueur de l'un de ses côtés.
56. L'aire d'un rectangle mesure 16 m². Exprimez le périmètre du rectangle comme une fonction de la longueur de l'un de ses côtés.
57. Exprimez l'aire d'un triangle équilatéral comme une fonction de la longueur du côté.
58. La longueur d'une boîte rectangulaire fermée de 8 dm³ est le double de sa largeur. Exprimez la hauteur de la boîte en fonction de sa largeur.
59. Une boîte rectangulaire de 2 m³ de volume a une base carrée. Exprimez la surface de cette boîte en fonction de la longueur d'un côté de la base.

60. Une fenêtre romane a la forme d'un rectangle surmonté d'un demi-cercle. Si le périmètre de la fenêtre est de 9 m, exprimez l'aire A de la fenêtre comme une fonction de sa largeur x .

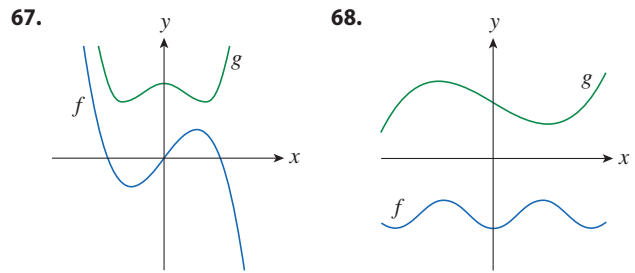


61. Pour construire une boîte sans couvercle, on découpe quatre carrés égaux de côté x aux quatre coins d'un carton de forme rectangulaire, puis on plie pour former les bords de la boîte, comme le montre la figure. Exprimez le volume V de la boîte comme une fonction de x .

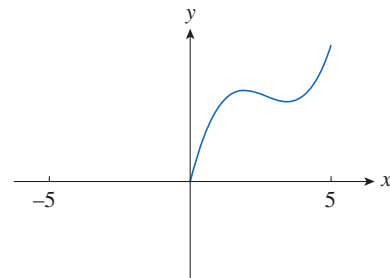


62. Un plan tarifaire de téléphone portable prévoit une redevance de 35 € par mois. Ce plan inclut 2Gb de données et demande 5 € par Gb supplémentaire consommé. Écrivez le coût mensuel C en fonction du nombre x de Gb consommés et tracez le graphe de C en fonction de x pour $0 \leq x \leq 10$.
63. Sur certaines routes, la vitesse maximale autorisée est de 100 km/h, mais une vitesse minimale de 65 km/h est requise. L'amende prévue est de 15 € par km/h en dehors de ces limites. Exprimez le montant de l'amende F comme une fonction de la vitesse x et tracez une courbe représentative de F pour $0 \leq x \leq 120$.
64. Le tarif d'une compagnie d'électricité prévoit un montant mensuel fixe de 10 € auxquels viennent s'ajouter 6 centimes par kilowattheure pour les premiers 1200 kWh et 7 centimes pour les kWh supplémentaires. Exprimer le coût mensuel C comme une fonction de la quantité x d'électricité consommée. Faites ensuite un graphe de C pour $0 \leq x \leq 2000$.
65. Dans certains pays, la taxe sur le revenu est établie comme suit. Il n'y a pas de taxe sur un revenu inférieur à 10 000 €. Tout revenu supérieur à 10 000 € est taxé à 10% jusqu'à un revenu de 20 000 €. Et au-delà de 20 000 €, la taxe est de 15%.
- Dessinez le graphe du taux r de taxation en fonction du revenu R .
 - À combien se monte l'impôt sur un revenu de 14 000 € ? de 26 000 € ?
 - Faites un graphe qui permette de lire l'impôt total dû sur un revenu R .
66. La fonction de l'exemple 10 est appelée *fonction en escaliers* parce que son graphe a l'allure de marches d'escalier. Donnez deux autres exemples tirés de la vie courante qui donne lieu à une fonction en escaliers.

Voici les graphes de f et g . Dites si la fonction est paire, impaire, aucun des deux. Expliquez votre raisonnement.



69. a) Si le point $(5, 3)$ appartient au graphe d'une fonction paire, quel autre point s'y trouve aussi forcément ?
b) Si le point $(5, 3)$ appartient au graphe d'une fonction impaire, quel autre point s'y trouve aussi forcément ?
70. Voici une partie du graphe d'une fonction f dont le domaine de définition est $[-5, 5]$.



- Complétez le graphe s'il est supposé que f est une fonction paire.
- Complétez le graphe s'il est supposé que f est une fonction impaire.

Déterminez si f est paire, impaire ou aucun des deux. Si vous disposez d'une calculatrice graphe, vérifiez votre réponse sur l'écran.

- | | |
|--------------------------------|----------------------------------|
| 71. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ | 72. $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$ |
| 73. $f(x) = \frac{x}{x + 1}$ | 74. $f(x) = x x $ |
| 75. $f(x) = 1 + 3x^2 - x^4$ | 76. $f(x) = 1 + 3x^3 - x^5$ |

77. Si f et g sont des fonctions paires, est-ce que $f + g$ l'est aussi ? Si f et g sont des fonctions impaires, est-ce que $f + g$ l'est aussi ? Qu'en est-il si f est paire et g impaire ? Justifiez votre réponse.
78. Si f et g sont des fonctions paires, est-ce que fg l'est aussi ? Si f et g sont des fonctions impaires, est-ce que fg l'est aussi ? Qu'en est-il si f est paire et g impaire ? Justifiez votre réponse.

1.2 Modèles mathématiques : un catalogue de fonctions essentielles

Un **modèle mathématique** est une description mathématique (qui souvent revêt la forme d'une équation ou d'une fonction) d'un phénomène issu du monde réel, telle la taille d'une population, la demande d'un produit, la vitesse d'un objet qui tombe, la concentration d'un produit au cours d'une réaction chimique, l'espérance de vie d'une personne à sa naissance ou le coût de la réduction de certaines émissions. La construction d'un modèle vise à comprendre le phénomène et peut-être à pouvoir faire des prédictions sur le comportement futur.

Le schéma de la figure 1.24 illustre le processus de modélisation. Face à une situation réelle, notre première tâche en vue de la modélisation mathématique est d'identifier et de dénommer les variables indépendantes et dépendantes et d'émettre des hypothèses suffisamment simplificatrices pour que la situation devienne traitable mathématiquement. Nous exploitons notre connaissance des conditions physiques et nos compétences mathématiques pour écrire des équations qui lient les variables. Dans le cas où aucune loi physique ne peut nous guider, nous sommes obligés de récolter des données (en provenance soit des livres, soit du réseau internet, soit en menant notre propre expérimentation) et d'examiner ces données en les ordonnant de façon à discerner des régularités. Il peut être souhaitable alors de passer des données numériques de la fonction à une représentation graphique en reportant ces données dans un repère. L'allure de cette représentation graphique peut même alors suggérer une formule algébrique dans certains cas.

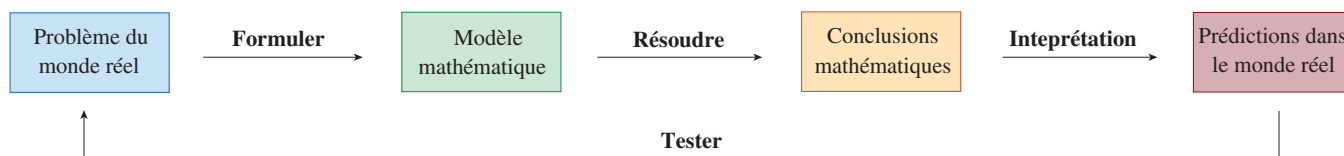


Figure 1.24
Le processus de modélisation.

La deuxième étape est de mettre en oeuvre les mathématiques que nous connaissons (comme le calcul différentiel et intégral qui sera développé tout au long de ce livre) sur le modèle mathématique afin d'en tirer des conclusions mathématiques. En troisième lieu, nous replaçons ces conclusions mathématiques dans le contexte de la situation réelle et en tirons des informations qui peuvent prendre la forme d'explications ou de prédictions. L'étape finale consiste à vérifier les prédictions en les confrontant à de nouvelles données réelles. Si les prédictions ne collent pas bien avec la réalité, il convient de raffiner le modèle ou d'en construire un nouveau et de recommencer le cycle.

Un modèle mathématique n'est jamais une représentation tout à fait précise d'une situation réelle – ce n'en est qu'une *idéalisée*. Un bon modèle est celui qui simplifie suffisamment la réalité pour permettre des calculs mathématiques mais qui, en même temps, reste suffisamment proche de la réalité pour fournir des conclusions valables. Il est important d'avoir conscience des limites d'un modèle. Car en définitive, c'est Dame Nature qui a le dernier mot.

Il existe beaucoup de types de fonctions susceptibles de modéliser des relations observées dans le monde réel. Dans ce qui suit, nous allons présenter le comportement et la représentation graphique de ces fonctions et donner des exemples de situations qu'elles modélisent particulièrement bien.

■ Les modèles linéaires

La géométrie analytique des droites est revue dans l'annexe B.

Quand y est une fonction **linéaire**¹ de x , le graphe de la fonction est une droite. On peut dès lors adopter une des formes de l'équation d'une droite comme expression algébrique de la fonction

$$y = f(x) = mx + b$$

où m est la pente de la droite et b l'ordonnée à l'origine.

¹ « linéaire » est ici pris dans le sens de « du premier degré ». Il serait plus exact de parler de fonction affine.

L'équation d'une droite s'écrit aussi $y = a + bx$. Cette notation est utile lors de l'étude des approximations du premier degré et des polynômes de Taylor.

Nous avons utilisé la même échelle sur les deux axes. Il arrive que l'on soit obligé de choisir des échelles différentes afin de présenter un graphe plus complet.

Ce qui caractérise les fonctions linéaires est qu'elles croissent à taux constant. Par exemple, la figure 2 montre la droite représentative de la fonction affine $f(x) = 3x - 2$, et une table de quelques valeurs. On remarque que quand x augmente de 0,1, la valeur de $f(x)$ augmente de 0,3, c'est-à-dire trois fois plus vite que x . La pente de la droite d'équation $y = 3x - 2$, à savoir 3, peut être vue comme le taux d'accroissement de y par rapport à x .

x	$f(x) = 3x - 2$
1	1
2	4
3	7
4	10
5	13
6	16

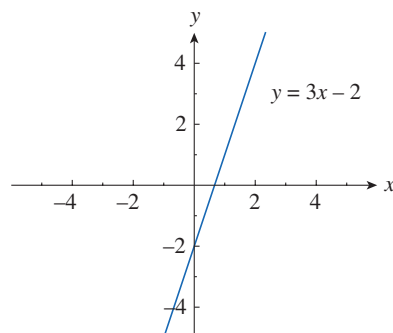


Figure 1.25

Tableau des valeurs d'un graphique de $y = 3x - 2$.

Exemple 1 Interprétation d'un modèle du premier degré

- Lorsque de l'air sec monte, il se dilate et se refroidit. Si la température au sol est de 20°C et à 1 km d'altitude, de 10°C , exprimer la température T (en $^{\circ}\text{C}$) comme une fonction de l'altitude h (en km), en supposant que le modèle qui lie ces deux variables est du premier degré.
- Tracer le graphe de la fonction de la partie a). Que représente la pente ?
- Quelle température fait-il à 2,5 km d'altitude ?

Solution

- Puisqu'il est supposé que T est une fonction du premier degré de h , on peut écrire

$$T = mh + b.$$

On sait que $T = 20$, quand $h = 0$. Par conséquent $20 = m \cdot 0 + b = b$.

Autrement dit, l'ordonnée à l'origine est $b = 20$.

On sait aussi que $T = 10$ quand $h = 1$. D'où $10 = m \cdot 1 + 20$.

La pente de la droite est donc $m = 10 - 20 = -10$. La fonction affine demandée est

$$T = -10h + 20.$$

- Le graphe est présenté à la figure 1.26. La pente $m = -10^{\circ}\text{C}/\text{km}$ représente le taux de variation de la température en fonction de l'altitude.
- À l'altitude $h = 2,5$ km, la température s'élève à

$$T = -10(2,5) + 20 = -5^{\circ}\text{C}.$$

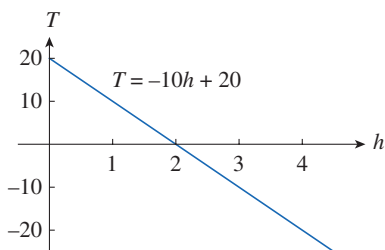


Figure 1.26

Graphique de la fonction T .

Dans le cas où aucune loi physique ou aucun principe ne vient nous aider à élaborer un modèle, nous construisons un **modèle empirique**, basé seulement sur les données récoltées. Nous cherchons une courbe qui « s'ajuste » aux données au sens où elle suit la tendance principale des points observés.

Exemple 2 Un modèle de régression linéaire

La table 1.1 présente le niveau moyen de dioxyde de carbone présent dans l'atmosphère, mesuré en parts par million et relevé entre 1980 et 2018 à l'observatoire de Mauna Loa. Utiliser les données de la table 1.1 pour modéliser le niveau de dioxyde de carbone.

Solution

Les données de la table 1.1 sont reportées dans la figure 1.27, où t représente le temps (en années) et C représente le niveau de CO_2 (en parts par million, ppm).

Année	CO_2 (en ppm)	Année	CO_2 (en ppm)
1980	338,7	2000	369,4
1982	341,2	2002	373,2
1984	344,4	2004	377,5
1986	347,2	2006	381,9
1988	351,5	2008	385,6
1990	354,2	2010	389,9
1992	356,3	2012	393,8
1994	358,6	2014	398,6
1996	362,4	2016	404,2
1998	366,5	2018	408,5

Table 1.1

Table des niveaux moyens de CO_2 .
(Mauna Loa Observatory)

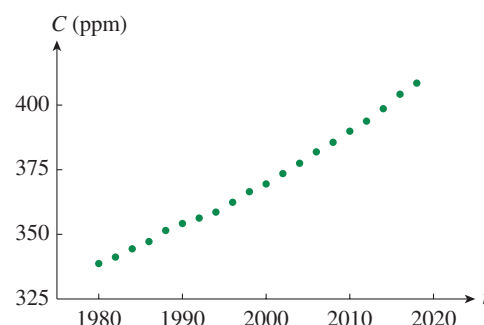


Figure 1.27

Diagramme de points du niveau moyen de CO_2 selon les années.

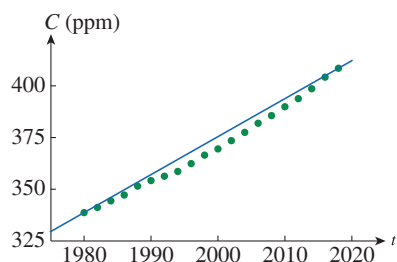


Figure 1.28

Diagramme de points et modèle linéaire construit sur les premier et dernier points.

Un ordinateur ou une calculatrice graphique détermine la droite de régression par la méthode des **moindres carrés**, celle qui consiste à rendre minimale la somme des carrés des distances verticales entre les points donnés et la droite.

Comme les points apparaissent plus ou moins alignés, il est naturel, dans un tel cas, de penser à un modèle linéaire. Mais il y a beaucoup de droites qui passent plus ou moins à travers ces points. Laquelle faut-il donc choisir ? On pourrait, par exemple, choisir la droite qui passe par le premier et le dernier point. Sa pente serait égale à

$$\frac{408,5 - 338,7}{2018 - 1980} = \frac{69,8}{38} \approx 1,83684 \approx 1,837$$

et son équation serait

$$C - 338,7 = 1,837(t - 1980) \quad \text{ou}$$

$$C = 1,837t - 3298,56 \quad (1)$$

L'équation (1) constitue un modèle linéaire possible pour le niveau moyen de dioxyde de carbone dans l'atmosphère. La figure 1.28 montre le diagramme de points superposé au graphe de cette droite.

Même si notre modèle s'ajuste assez bien, il donne des valeurs plus élevées que la plupart des niveaux réels de CO_2 . La technique statistique appelée *régression linéaire* fournit un meilleur modèle. Il suffit d'introduire les données de la Table 1.1 dans une calculatrice graphique et de choisir la commande régression linéaire parmi les commandes dédiées à la statistique. En réponse, la machine donne la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite de régression, à savoir

$$C = 1,81579t - 3259,58 \quad (2)$$

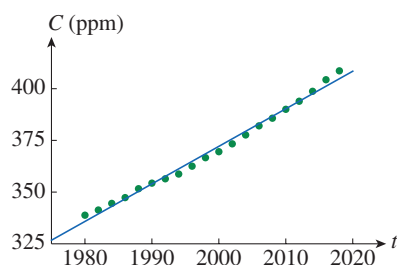


Figure 1.29

Diagramme de points et droite de régression.

La figure 1.29 montre le graphe de la droite de régression ainsi que les points de la table 1.1. Par comparaison avec la figure 1.28, ce modèle est manifestement meilleur que le modèle construit sur deux points seulement. ■

Exemple 3 Prédire sur base d'un modèle linéaire

Sur la base du modèle linéaire donné par l'équation (2), quelle est une estimation du niveau moyen de CO_2 en 1987 et de celui de l'année 2020. Selon ce modèle, en quelle année le niveau de CO_2 dépassera-t-il 420 parts par million ?

Solution

L'équation (2), calculée en $t = 1987$, donne un niveau moyen de CO_2 d'environ $C(1987) = (1,81579)(1987) - 3259,58 \approx 348,4$.

Un tel calcul est un exemple d'*interpolation* car nous avons calculé une valeur située *entre* les valeurs observées. En fait, l'observatoire de Mauna Loa avait noté que le niveau moyen de CO_2 en 1987 était de 348,93 ppm, ce qui est proche de notre estimation.

Avec $t = 2020$, nous obtenons

$$C(2020) = (1,81579)(2020) - 3259,58 \approx 408,31.$$

Le niveau réel de CO_2 en 2020 était de 414,24, supérieur à notre prédiction.

Nous prévoyons donc que le niveau moyen de CO_2 sera en l'an 2020 de 408,31 ppm. Ce calcul est un exemple d'*extrapolation* parce que nous avons prédit une valeur située *en dehors* de notre champ d'observations. Par conséquent, nous sommes beaucoup moins sûrs quant à la précision de notre prédiction.

Nous pouvons encore calculer quand, toujours selon l'équation (2), le niveau moyen de CO_2 excèdera 420 ppm, c'est la valeur de t telle que.

$$1,81579t - 3259,58 > 420$$

ou

$$t > \frac{3679,59}{1,81579} \approx 2026,43.$$

Le niveau moyen de CO_2 pourrait donc excéder 420 ppm vers 2027. Cette prévision est assez risquée parce qu'elle concerne un moment assez éloigné de nos observations. En fait, la figure 1.29 fait apparaître que les niveaux de CO_2 ont tendance à croître plus rapidement ces dernières années, de sorte que le niveau pourrait dépasser 420 ppm avant 2027. ■

■ Les fonctions polynomiales

Une fonction P est appelée un **polynôme** lorsque

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

où n est un entier positif et $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des constantes, appelées les **coefficients** du polynôme. Le domaine de définition de n'importe quel polynôme est $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. L'indice n du premier coefficient a_n non nul donne le **degré** du polynôme. Par exemple, la fonction

$$P(x) = 2x^6 - x^4 + \frac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$$

est un polynôme de degré 6.

Un polynôme de degré 1 est de la forme $P(x) = mx + b$ et est appelé une **fonction affine**. Un polynôme de degré 2 est de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$, et est appelé une **fonction quadratique**. La courbe représentative de P est toujours une parabole obtenue par

déplacement de la parabole $y = ax^2$, comme nous allons le voir dans la section 1.4. La parabole est ouverte vers le haut quand $a > 0$ et vers le bas quand $a < 0$ (voir la figure 1.30).

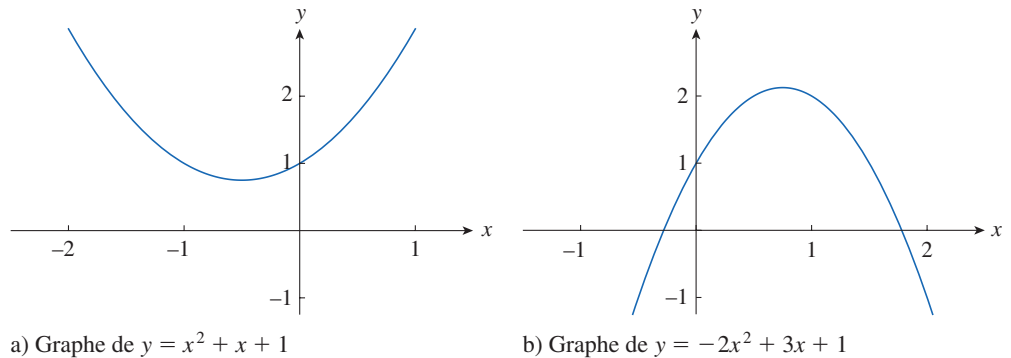


Figure 1.30

Le graphe d'une fonction quadratique est une parabole.

Un polynôme de degré 3 est de la forme

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad a \neq 0$$

et est appelé une **fonction cubique**. La première des figures 1.31 montre le graphe d'une cubique tandis que les deux autres présentent dans l'ordre les graphiques d'un polynôme de degré 4 et de degré 5. Nous verrons plus tard pourquoi ces graphiques ont cette allure.

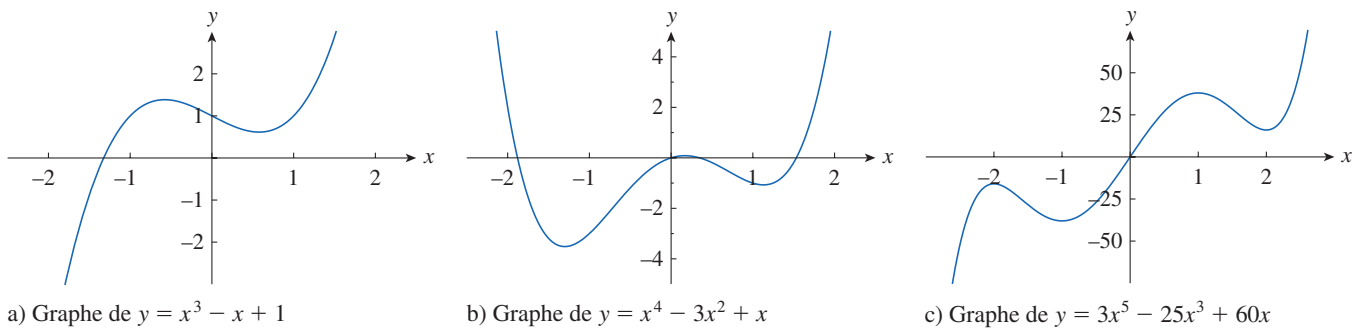


Figure 1.31

Les graphes des polynômes de degré 3, 4 et 5.

Temps (en s)	Hauteur (en m)
0	450
1	445
2	431
3	408
4	375
5	332
6	279
7	216
8	143
9	61

Table 1.2

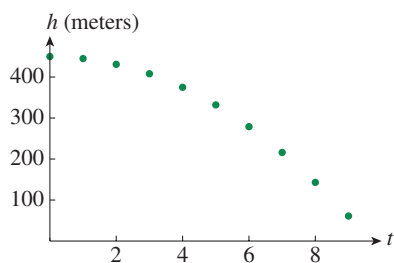
La hauteur de la balle mesurée chaque seconde.

Les polynômes sont très souvent employés pour modéliser des situations issues des sciences naturelles ou des sciences sociales. C'est ainsi qu'à la section 3.9 nous expliquerons pourquoi les économistes ont choisi un polynôme $P(x)$ pour représenter le coût de production de x unités d'un bien. Dans l'exemple que voici, nous utilisons une fonction quadratique pour modéliser la hauteur d'un objet qui chute.

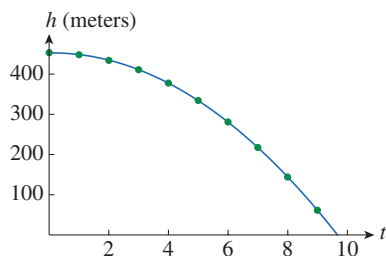
Exemple 4 Un gratte-ciel et un modèle quadratique

Une balle est lâchée du haut d'une tour de New York, à 450 m au-dessus du niveau du sol. Sa hauteur h est enregistrée chaque seconde et reportée dans la table 1.2.

Quel modèle s'ajuste aux données et selon ce modèle à quel moment la balle touchera-t-elle le sol ?


Figure 1.32

Graphique de points d'une balle qui chute.


Figure 1.33

Modèle quadratique de la chute d'une balle et graphique de points.

Solution

On transcrit les données du tableau en un diagramme de points à la figure 1.32 et on observe qu'un modèle du premier degré ne convient pas. Comme les points semblent suivre la trajectoire d'une parabole, on essaie un modèle quadratique. Celui-ci est donné par une calculatrice graphique ou un logiciel (qui emploie la méthode des moindres carrés) :

$$h = 449,36 + 0,96t - 4,90t^2 \quad (3)$$

On constate sur la figure 1.33 qui présente les points représentatifs des données ainsi que le graphe de l'équation (3) que le modèle quadratique s'ajuste vraiment très bien.

Comme la balle touche le sol quand $h = 0$, on résout l'équation quadratique

$$-4,90t^2 + 0,96t + 449,36 = 0.$$

Les solutions en sont

$$t = \frac{-0,96 \pm \sqrt{(0,96)^2 - 4(-4,90)(449,36)}}{2(-4,90)} \Rightarrow t = -9,47887, \quad 9,67479.$$

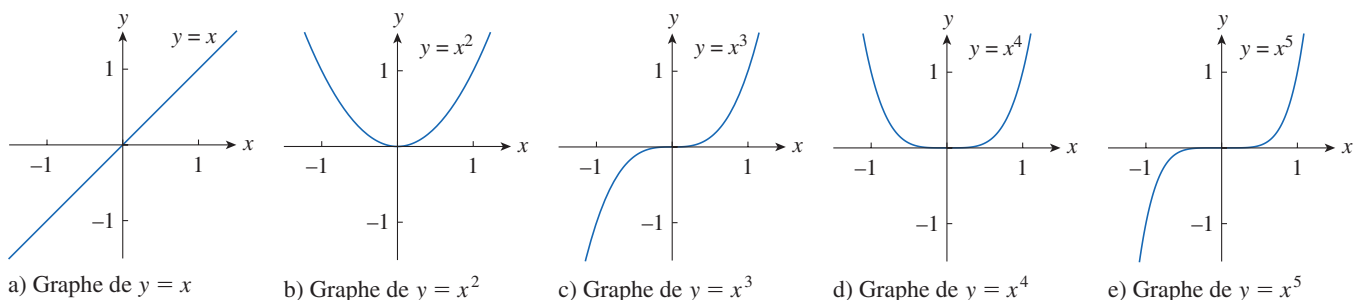
La racine positive est $t \approx 9,67$. On en conclut que la balle atteint le sol après environ 9,7 secondes. ■

■ Les fonctions puissances

Une fonction de la forme $f(x) = x^a$, où a est une constante, est appelée une **fonction puissance**. Nous envisageons plusieurs cas selon la valeur de la constante a .

1) $a = n$, avec n entier strictement positif

La figure 1.34 montre les courbes représentatives de $f(x) = x^n$ pour $n = 1, 2, 3, 4$ et 5 . Ce sont des polynômes à un seul terme. Nous connaissons déjà l'allure des courbes $y = x$ (une droite qui passe par l'origine et de pente 1) et $y = x^2$ (une parabole).


a) Graphe de $y = x$

b) Graphe de $y = x^2$

c) Graphe de $y = x^3$

d) Graphe de $y = x^4$

e) Graphe de $y = x^5$
Figure 1.34

Graphes de $f(x) = x^n$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Une **famille de fonctions** est une collection de fonctions dont les équations sont liées. La figure 1.35 montre deux familles de fonctions puissance, l'une dont les puissances sont paires, l'autre dont les puissances sont impaires.

L'allure générale du graphe de $f(x) = x^n$ change selon que n est un nombre pair ou impair. Lorsque n est pair, $f(x) = x^n$ est une fonction paire et son graphique ressemble à la parabole d'équation $y = x^2$. Lorsque n est impair, $f(x) = x^n$ est une fonction impaire et son graphe a la même allure que celui d'équation $y = x^3$. La figure 1.35 montre toutefois que, plus n est grand, plus le graphe s'aplatit à proximité de 0 et se raidit quand $|x| > 1$. Lorsque x est petit, c'est-à-dire $|x| < 1$, alors x^2 est plus petit, x^3 plus petit encore, x^4 plus petit encore que x^3 , etc.

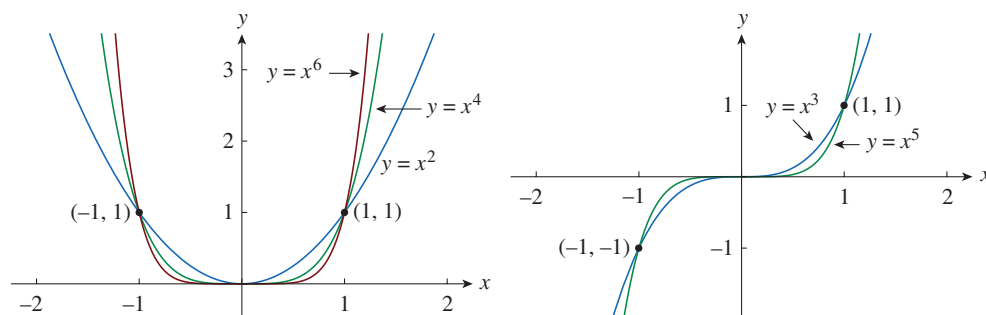


Figure 1.35

Graphes de deux familles de fonctions.

Erreur fréquente

$\sqrt{x^2} = \pm x$. Par exemple, $\sqrt{9} = \pm 3$

Correction

La fonction racine carrée est une fonction, elle ne peut donc donner qu'une seule image à une valeur d'entrée. La fonction racine carrée fournit toujours la racine carrée positive.

2) $a = \frac{1}{n}$, avec n entier strictement positif

La fonction $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ est une **fonction racine**. Lorsque $n = 2$, il s'agit de la fonction racine carrée définie sur $[0, \infty[$ et dont la courbe représentative est la moitié supérieure de la parabole $x = y^2$. [voir figure 1.36 a)]. Lorsque n est un autre nombre pair, le graphe de $y = \sqrt[n]{x}$ est semblable à celui de $y = \sqrt{x}$. À la valeur impaire $n = 3$ correspond la fonction racine cubique $f(x) = \sqrt[3]{x}$ définie sur $\mathbb{R}$ (rappelez-vous que tout nombre réel a une racine cubique) et dont la courbe est représentée à la figure 1.36 b). Le graphe de $y = \sqrt[n]{x}$ pour n impair ($n > 3$) ressemble à celui de $y = \sqrt[3]{x}$.

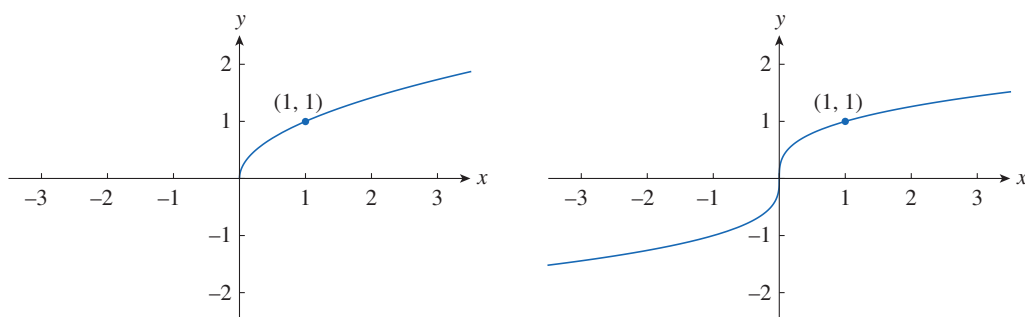
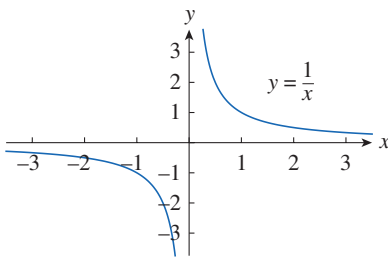


Figure 1.36

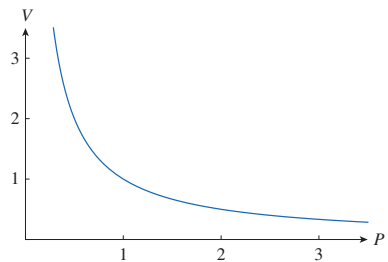
Graphes de fonctions racine.

a) Graphe de $f(x) = \sqrt{x}$

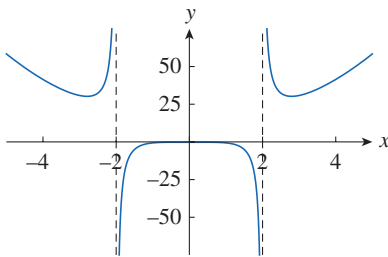
b) Graphe de $f(x) = \sqrt[3]{x}$

**Figure 1.37**

Graph de la fonction inverse.

**Figure 1.38**

Le volume comme fonction de la pression, à température constante.

**Figure 1.39**

Graph de $y = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$.

3) $a = -1$

Le graph de la fonction **inverse** de x , $f(x) = x^{-1} = 1/x$ est présenté à la figure 1.37. Cette courbe a pour équation $y = 1/x$ ou $xy = 1$ et est une hyperbole équilatère dont les axes de coordonnées sont les asymptotes. Le domaine de définition est $\{x | x \neq 0\}$ et l'ensemble image $\{y | y \neq 0\}$. Cette fonction apparaît en physique et en chimie. En effet, la loi de Boyle dit que, à température constante, le volume V d'un gaz est inversement proportionnel à la pression P :

$$V = \frac{C}{P}$$

où C est une constante. Le graph de V en fonction de P (voir la figure 1.38) a donc la même allure générale que la moitié droite de la figure 1.37. Le domaine de définition de P est $\{P | P > 0\}$.

Les fonctions puissances sont utilisées pour modéliser la relation entre les espèces animales et leur milieu de vie (exercice 60), l'intensité lumineuse en fonction de la distance de la source lumineuse (exercice 59) et la période de révolution d'une planète en fonction de sa distance vis-à-vis du soleil (exercice 61).

■ Les fonctions rationnelles

Une **fonction rationnelle** f est un rapport de deux polynômes

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

où P et Q sont des polynômes. Le domaine de définition comprend toutes les valeurs de x qui n'annulent pas $Q(x)$. Si P et Q n'ont pas de facteurs en commun, alors le graph de f admet une asymptote verticale aux racines de Q . Au cas où P et Q ont un facteur commun, mettons $(x - r)^n$ est un facteur de P et $(x - r)^m$ est un facteur de Q , alors le graph de f admet une asymptote verticale en $x = r$ si $m > n$ et présente un trou si $m \leq n$.

Une fonction rationnelle très simple est $f(x) = 1/x$ dont le domaine de définition est $\{x | x \neq 0\}$; c'est celle de la figure 1.37. La fonction

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

est une fonction rationnelle dont le domaine de définition est $\{x | x \neq \pm 2\}$. Sa représentation graphique est donnée à la figure 1.39.

■ Les fonctions algébriques

Une fonction est dite **algébrique** si la formule qui la définit ne comporte que des opérations algébriques (addition, soustraction, multiplication, division et radicaux) sur des polynômes. Il est évident que toute fonction rationnelle est une fonction algébrique. Voici deux exemples supplémentaires :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x - 2)\sqrt[3]{x + 1}$$

Lorsqu'au chapitre 4 nous étudierons les fonctions algébriques, nous nous apercevrons que les courbes qui les représentent peuvent prendre toutes sortes de forme. La figure 1.40 en dévoile dès à présent quelques-unes.

En théorie de la relativité, par exemple, intervient une fonction algébrique qui exprime la masse d'une particule en fonction de sa vitesse v

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

où m_0 est la masse de la particule au repos et où $c = 3,0 \times 10^5$ km/s est la vitesse de la lumière dans le vide.

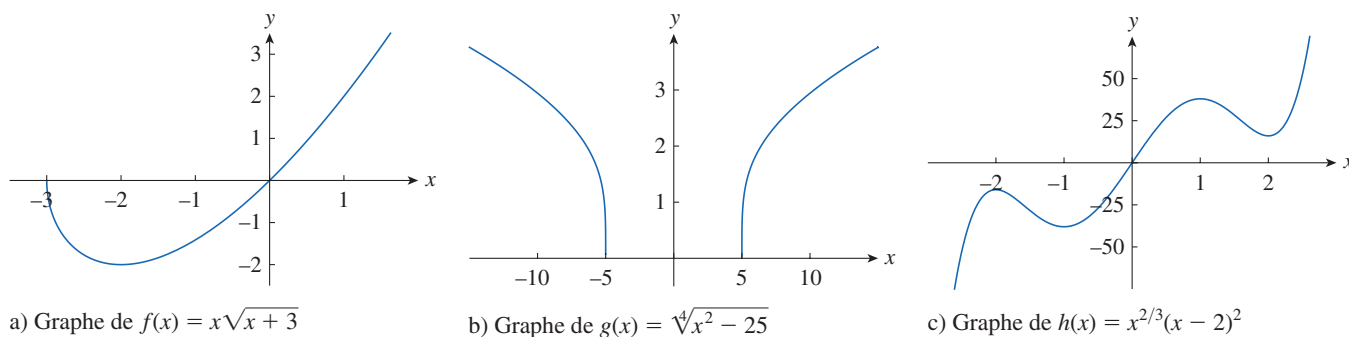


Figure 1.40

Graphes de fonctions algébriques.

■ Les fonctions trigonométriques

La trigonométrie et les fonctions trigonométriques occupent une large place dans l'annexe C. En analyse, il est entendu que c'est toujours le radian qui sert d'unité de mesure (sauf indication contraire). Par exemple, si nous parlons de la fonction $f(x) = \sin x$, il est entendu que la mesure de l'angle x est en radians. De ce fait, les graphiques des fonctions sinus et cosinus sont ceux de la figure 1.41.

Tant pour la fonction sinus que pour la fonction cosinus, le domaine de définition est $]-\infty, +\infty[$ et l'ensemble image, l'intervalle fermé $[-1, 1]$. Il s'ensuit que, quel que soit x ,

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

ou, en termes de valeur absolue,

$$|\sin x| \leq 1 \quad |\cos x| \leq 1$$

De plus, la fonction sinus s'annule pour chaque valeur de x égale à un multiple entier de π . Autrement dit

$$\sin x = 0 \quad \text{quand} \quad x = n\pi \quad \text{avec } n \text{ entier}$$

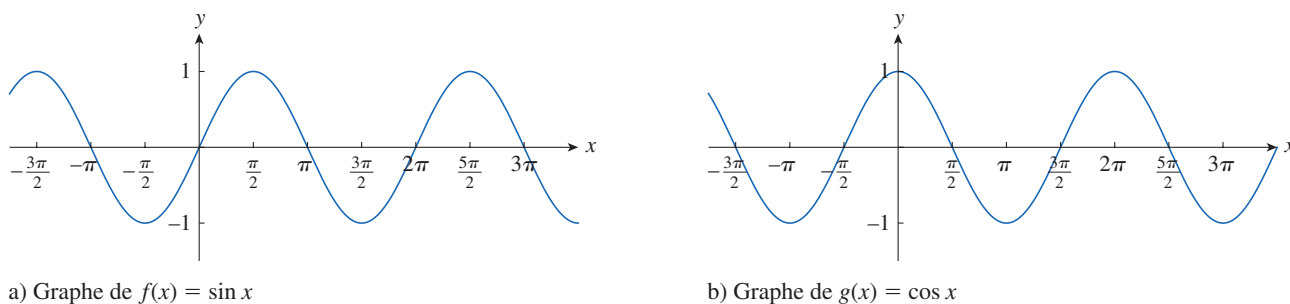


Figure 1.41

Graphes de fonctions trigonométriques.

Une importante propriété des fonctions sinus et cosinus est leur caractère périodique, de période 2π . Cela signifie que, quel que soit x ,

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

Le caractère périodique de ces fonctions les rend particulièrement aptes à modéliser des phénomènes répétitifs comme les marées, les ressorts animés de vibrations ou les ondes sonores. Par exemple, à l'exemple 4 de la section 1.3, nous verrons qu'un assez bon modèle du nombre d'heures de clarté à Madrid, t jours après le premier janvier est donné par la fonction

$$L(t) = 12 + 2,8 \sin \left[\frac{2\pi}{365}(t - 80) \right].$$

La fonction tangente est liée aux fonctions sinus et cosinus par l'équation

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

et son graphe est celui de la figure 1.42. Elle n'est pas définie lorsque $\cos x = 0$, c'est-à-dire lorsque $x = \pm \pi/2, \pm 3\pi/2, \dots$. Son ensemble image est $]-\infty, +\infty[$. Il est à noter que la fonction tangente est aussi périodique, mais de période π :

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x \quad \text{quel que soit } x$$

Les trois autres fonctions trigonométriques (cosécante, sécante et cotangente) sont les inverses des fonctions sinus, cosinus et tangente. Leur graphe se trouve à l'annexe C.

■ Les fonctions exponentielles

Sont appelées **fonctions exponentielles** les fonctions de la forme $f(x) = a^x$, où la base a est une constante strictement positive. Vous pouvez voir à la figure 1.43 les graphiques de $y = 2^x$ et $y = (0,5)^x$. Dans les deux cas, le domaine de définition est $]-\infty, +\infty[$ et l'ensemble image, $]0, +\infty[$.

La section 1.4 est consacrée à l'étude de ces fonctions et nous verrons ultérieurement que ces fonctions sont utilisées pour modéliser des phénomènes naturels comme la croissance d'une population (avec $a > 1$) et la désintégration radioactive (avec $a < 1$).

■ Les fonctions logarithmes

Sont appelées **fonctions logarithme** les fonctions $f(x) = \log_a x$, où la base a est une constante strictement positive différente de 1. Elles sont les fonctions réciproques des fonctions exponentielles et seront étudiées à la section 1.5. La figure 1.44 montre les

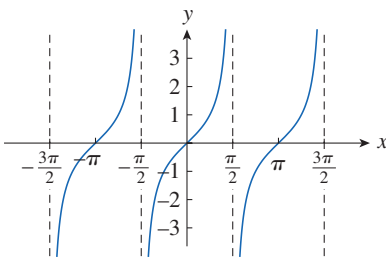


Figure 1.42

Graphe de $y = \tan x$.

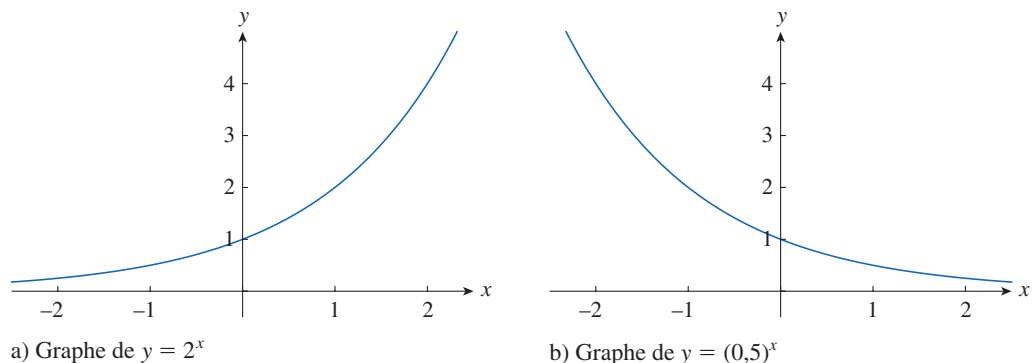


Figure 1.43

Graphes de fonctions exponentielles.

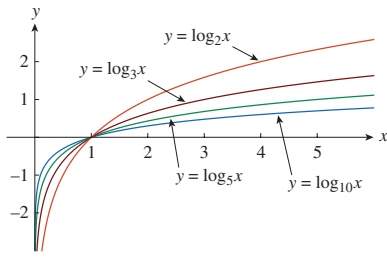


Figure 1.44
Graphes de fonctions logarithme.

courbes représentatives de quatre fonctions logarithmes de bases différentes. Elles ont toutes les quatre le même domaine de définition, $]0, +\infty[$, le même ensemble image, $] -\infty, +\infty[$ et elles croissent lentement à partir de $x = 1$.

Exemple 5 Classification de fonctions

À quel type les fonctions suivantes appartiennent-elles ?

- a) $f(x) = 5^x$ b) $g(x) = x^5$
 c) $h(x) = \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$

Solution

- a) $f(x) = 5^x$ est une fonction exponentielle (x est en exposant).
 b) $g(x) = x^5$ est une fonction puissance (x est la base). La fonction g peut aussi être considérée comme une fonction polynomiale de degré 5.
 c) $h(x) = \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ est une fonction algébrique.
 d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$ est un polynôme de degré 4. ■

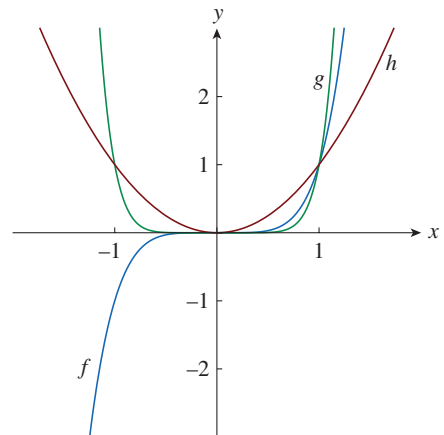
1.2 Exercices

Rangez chaque fonction dans l'une des familles de fonctions, puissances, polynomiales (avec le degré), rationnelles, algébriques, trigonométriques, exponentielles ou logarithmes.

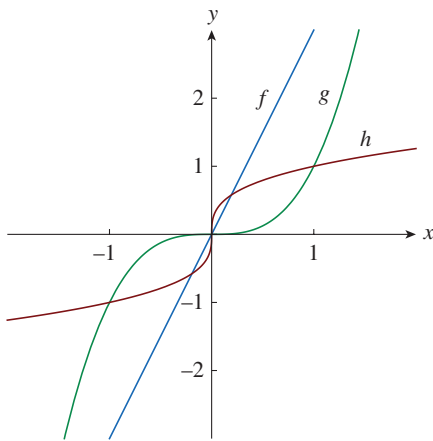
1. a) $f(x) = \log_2 x$ b) $g(x) = \frac{2x^3}{1-x^2}$
 c) $u(t) = 1 - 2t + 3t^2$ d) $u(t) = 1 - 1,1t + 2,54t^2$
 e) $h(x) = x^{-2/7}$ f) $k(x) = (x-3)^4(x+2)^2$
 g) $v(t) = 5^t$ h) $w(t) = \sin t \cos^2 t$
2. a) $y = x^4$ b) $y = x^2(2 - x^3)$
 c) $y = \frac{x}{1+x}$ d) $y = \frac{\sqrt{x^3-1}}{1+\sqrt[3]{x}}$
 e) $y = x^{3/5} + 7$ f) $y = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}$
 g) $y = \frac{x^2-7x+5}{x^3+x-1}$ h) $y = \operatorname{tg} t - \cos t$

Associez chaque équation avec son graphique. Expliquez votre raisonnement. (N'employez pas d'ordinateur ni de calculatrice graphique).

3. a) $y = x^2$ b) $y = x^5$ c) $y = x^8$



4. a) $y = 3x$ b) $y = x^3$ c) $y = \sqrt[3]{x}$



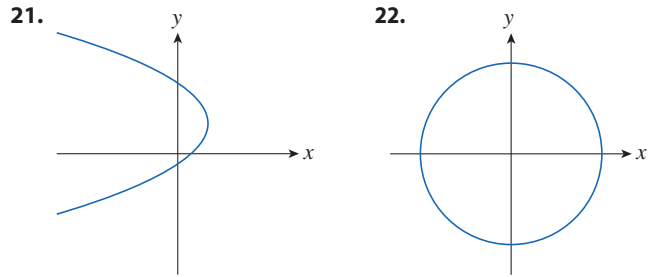
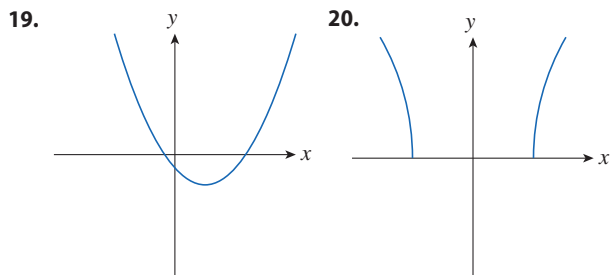
Déterminez le domaine de définition et l'ensemble image de la fonction.

5. $f(x) = 2x - 3$ 6. $f(x) = x^2 + 4$
 7. $g(x) = x^3 + 1$ 8. $g(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$
 9. $h(x) = x^3 + 2x + 2$ 10. $h(x) = \sqrt{x} + 2$
 11. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ 12. $f(x) = \frac{1}{|x+2|}$

Déterminez les asymptotes horizontales et verticales de chaque fonction (ou décidez qu'il n'y en a pas).

13. $f(x) = \frac{x}{x+4}$ 14. $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$
 15. $g(x) = \frac{x-2}{(x+2)(x-2)}$ 16. $g(x) = \frac{x}{x^3-1}$
 17. $h(x) = \frac{|x+2|}{x-2}$ 18. $h(x) = \frac{x+1}{x^3-1}$

Utilisez le test de la droite verticale pour juger si le graphe donné est celui d'une fonction y de x .



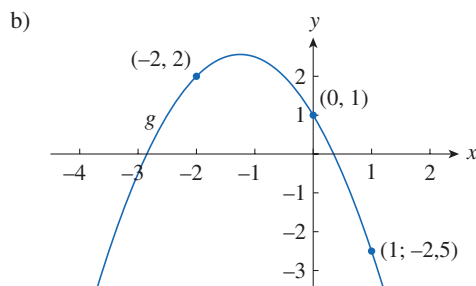
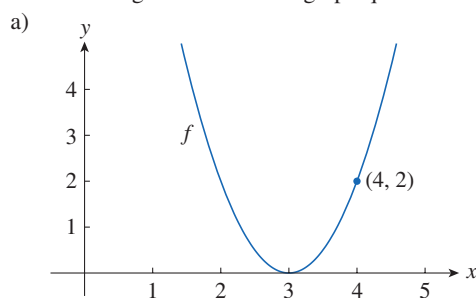
23. Cherchez une fonction f du premier degré telle que $f(3) = 1$ et $f(7) = 19$.
 24. Si $f(x) = 3x + 5$ et si a et b sont deux valeurs distinctes du domaine de définition de f , expliquez pourquoi le quotient

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

a toujours la même valeur. Quelle est cette valeur ?

25. Calculez $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ pour la fonction $f(x) = 5x + 2$.
 26. Déterminez le domaine de définition et l'ensemble image de la fonction du second degré $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$.
 27. Déterminez l'expression algébrique d'une fonction f du second degré dont l'ensemble image est $\{y \mid y \leq 6\}$ et telle que $f(4+d) = f(4-d)$ quel que soit le nombre réel d .
 28. Quelle est la fonction racine g pour laquelle $g(64) = 4$.
 29. Quelle est la fonction rationnelle h telle que son dénominateur soit du premier degré, que son graphe coupe l'axe Ox en 4 et admette une asymptote verticale $x = 3$.
 30. Cherchez une fonction rationnelle f qui ne soit pas définie en $x = 2$ et qui n'admette pas une asymptote verticale en $x = 2$.
 31. a) Écrivez une équation de la famille des fonctions du premier degré de pente 2 et dessinez-en quelques-unes.
 b) Écrivez une équation de la famille des fonctions du premier degré telles que $f(2) = 1$ et dessinez-en quelques-unes.
 c) Quelles sont les fonctions communes à ces deux familles ?
 32. Qu'ont en commun toutes les fonctions du premier degré de la famille $f(x) = 1 + m(x+3)$? Dessinez-en quelques-unes.
 33. Qu'ont en commun toutes les fonctions du premier degré de la famille $f(x) = c - x$? Dessinez-en quelques-unes.

34. Déterminez les expressions analytiques des fonctions du deuxième degré dont voici les graphiques.



35. Déterminez l'expression analytique d'une fonction du troisième degré f sachant que $f(1) = 6$, $f(-1) = f(0) = f(2) = 0$.

Tracez le graphe d'une fonction qui satisfasse au critère donné.

36. $f(x)$ est une fonction cubique, croissante sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.
37. $f(x)$ est un polynôme du second degré qui coupe l'axe Ox en -2 .
38. $f(x)$ est une fonction polynomiale du quatrième degré dont les racines sont $-2, 0, 1, 6$.

39. Des études récentes indiquent que la température moyenne à la surface de la Terre est en augmentation constante. Certains scientifiques ont construit un modèle du premier degré $T = 0,02t + 8,50$ entre la température T mesurée en $^{\circ}\text{C}$ et le temps t mesuré en années, à partir de 1900.

- a) Que représentent la pente et l'ordonnée à l'origine dans le contexte de ce problème ?
- b) D'après ce modèle, quelle sera la température moyenne globale en 2100 ?

40. Soit D la dose d'un médicament recommandée pour un adulte et soit c celle pour un enfant d'âge a . Les pharmaciens emploient la formule $c = 0,0417D(a + 1)$ pour adapter le dosage. On suppose que la dose pour un adulte est de 200 mg.
- a) Quelle est la pente du graphe de c ? Que représente cette pente ?
- b) Quelle est la dose conseillée pour un nouveau-né ?

41. La fonction $d = kv^2$ fournit la distance d approximative de freinage, en mètres, d'une voiture qui roule à la vitesse de

v km/h. On sait qu'une voiture qui roule à 50 km/h a besoin de 14 mètres pour s'arrêter. Servez-vous de cette information pour déterminer combien de mètres seraient nécessaires pour que la même voiture s'arrête, si elle roule à 110 km/h.

42. La table suivante donne le salaire horaire minimum aux USA pour trois années.

Année	Salaire horaire
1981	\$3,35
1996	\$4,75
2015	\$7,25

Utilisez les données des années 1981 et 2015 pour construire un modèle du premier degré qui donnerait le salaire horaire minimum pour une certaine année.

Quelle serait, d'après ce modèle le salaire minimum en 1996 ? De combien votre estimation diffère-t-elle du salaire minimum en 1996 donné dans la table ?

43. Le gestionnaire d'un marché aux puces sait d'expérience que s'il demande x € pour un emplacement, il va en louer y , où $y = 200 - 4x$.

- a) Dessinez le graphe de cette fonction du premier degré. (Rappelez-vous que le loyer d'un emplacement et le nombre d'emplacements ne peuvent pas être négatifs. En outre, y doit être un nombre entier.)
- b) Que représentent la pente, l'ordonnée à l'origine et l'intersection avec l'axe Ox dans ce contexte ?

44. La relation entre les échelles de température en degrés Celsius (C) et en degrés Fahrenheit (F) est donnée par une fonction du premier degré $F = \frac{9}{5}C + 32$.

- a) Tracez le graphe de cette fonction.
- b) Quelle est la pente de cette droite et que représente-t-elle ? Quelle est l'ordonnée à l'origine et que représente-t-elle ?

45. Un pilote d'essai se met en route sur une piste à 14 h et roule à vitesse constante. À 14 h 50, il est à 40 km de son point de départ.

- a) Exprimez la distance parcourue par rapport au temps écoulé.
- b) Faites le graphe de l'équation de la partie a).
- c) Que vaut la pente de cette droite ? Que représente-t-elle dans le contexte du problème ?

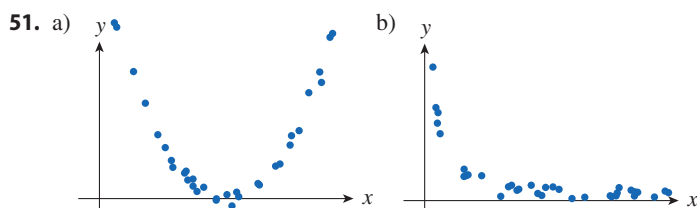
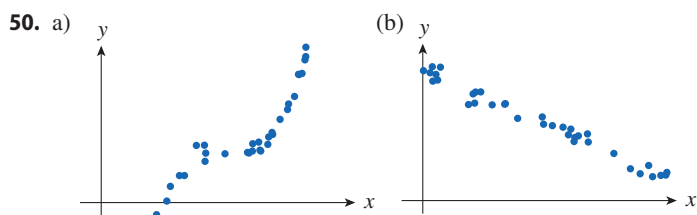
46. Des biologistes ont observé une relation entre l'intensité des chants de certaines espèces de grillons et la température et que cette relation n'est pas loin d'être du premier degré. Un grillon pousse 113 chants par minute à 20° et 173 à 25° .

- a) Déterminez une relation du premier degré qui modélise la température T comme une fonction du nombre de chants par minute N .
- b) Quelle est la pente et que représente-t-elle ?
- c) Si le grillon pousse 150 chants par minute, quelle température fait-il probablement ?

47. Le responsable d'une fabrique de meubles a calculé que la production de 100 chaises par jour lui coûtait 2200 € alors que la production de 300 chaises par jour lui coûtait 4800 €.
- Exprimez le coût comme une fonction du nombre de chaises fabriquées, en supposant que cette relation est du premier degré. Faites le graphique.
 - Que représente la pente du graphique ?
 - Que représente l'ordonnée à l'origine ?
48. À la surface de l'océan, la pression de l'eau est la même que la pression de l'air au niveau de la mer, soit $1,01324 \times 10^5 \text{ N/m}^2$. Sous la surface de l'eau, la pression augmente de 10^4 N/m^2 pour chaque mètre de profondeur.
- Écrivez une expression de la pression P en fonction de la profondeur d sous la surface de l'océan.
 - À quelle profondeur la pression est-elle de $700 \times 10^3 \text{ N/m}^2$?
49. Le coût mensuel d'une automobile dépend du nombre de km parcourus. Claudia a calculé qu'en mai, elle a dépensé 380 € pour 480 km et en juin, 460 € pour 800 km.
- Exprimez le coût mensuel CM comme une fonction de la distance d parcourue, en supposant qu'une relation du premier degré est un modèle acceptable.
 - Utilisez la partie a) pour évaluer ce que lui coûterait de rouler 1500 km par mois.
 - Représentez graphiquement la fonction du premier degré. Que représente la pente dans ce contexte ?
 - Que représente l'ordonnée à l'origine dans ce problème ?
 - Pourquoi une fonction du premier degré est un bon modèle dans cette situation ?

Pour chaque diagramme de points, choisissez le type de fonction qui convient le mieux comme modélisation des données.

Expliquez votre choix.



52. La table présente les taux d'ulcère gastro-duodéal (par 100 personnes) pour différents revenus tels que les rapporte le ministère de la santé.

Revenu	Taux d'ulcères (par 100 personnes)
\$4 000	14,1
\$6 000	13,0
\$8 000	13,4
\$12 000	12,5
\$16 000	12,0
\$20 000	12,4
\$30 000	10,5
\$45 000	9,4
\$60 000	8,2

- Faites un diagramme de points de ces données et décidez si un modèle du premier degré serait approprié. Expliquez votre raisonnement.
- Tracez le modèle du premier degré basé sur les premier et dernier points et donnez-en l'expression.
- Utilisez un logiciel pour obtenir le modèle du premier degré basé sur les moindres carrés et donnez-en la représentation graphique.
- Quel taux d'ulcère ce dernier modèle attribue-t-il à un revenu de \$25 000.
- Selon ce modèle, quelle est la probabilité qu'une personne dont le revenu est de \$80 000 souffre d'un ulcère gastro-duodéal ?
- Pensez-vous qu'il soit raisonnable d'appliquer ce modèle à une personne dont le revenu serait de \$200 000 ? Expliquez votre raisonnement.

53. Des biologistes ont observé que l'intensité des chants de certaines espèces de grillons est liée à la température. La table donne cette intensité (nombre de chants par minute) pour diverses températures.

Température (°C)	Intensité (chants/min)	Température (°C)	Intensité (chants/min)
10	20	22,5	140
12,5	46	25	173
15	79	27,5	198
17,5	91	30	211
20	113		

- Faites un diagramme de points des données.
- Déterminez la droite de régression et tracez-la.
- Utilisez le modèle linéaire de la partie b) pour évaluer l'intensité des chants à 35° ?

54. Les spécialistes du corps humain utilisent un modèle du premier degré pour lier la longueur du fémur à la taille de l'individu. C'est ainsi qu'ils sont capables de prédire la taille de quelqu'un à partir d'une partie du squelette (incluant le fémur). Voici une table qui donne pour huit individus la longueur de leur fémur et leur taille, de quoi construire une modélisation.

Longueur du fémur (en cm)	Taille (en cm)	Longueur du fémur (en cm)	Taille (en cm)
50,1	178,5	44,5	168,3
48,3	173,6	42,7	165,0
45,2	164,8	39,5	155,4
44,7	163,7	38,0	155,8

- Construisez un diagramme de points de ces données.
- Déterminez la droite de régression qui modélise ces données et tracez cette droite.
- Quelle est la taille prédite par le modèle pour un fémur de 53 cm ?

55. Voici une table des hauteurs franchies au saut à la perche aux jeux olympiques jusqu'en 2016.

Année	Hauteur (m)	Année	Hauteur (m)
1896	3,30	1964	5,10
1900	3,30	1968	5,40
1904	3,50	1972	5,64
1908	3,71	1976	5,64
1912	3,95	1980	5,78
1920	4,09	1984	5,75
1924	3,95	1988	5,90
1928	4,20	1992	5,87
1932	4,31	1996	5,92
1936	4,35	2000	5,90
1948	4,30	2004	5,95
1952	4,55	2008	5,96
1956	4,56	2012	5,97
1960	4,70	2016	6,03

- Faites un diagramme de points et décidez si un modèle du premier degré convient.
- Déterminez la droite de régression et représentez-la.
- D'après le modèle, quelle serait la hauteur franchie lors des jeux de 2020 ? Comparez-la avec la hauteur actuellement franchie de 6,02 m.
- Est-il raisonnable d'utiliser ce modèle pour prédire la hauteur qui sera franchie aux jeux olympiques de 2100 ? Pourquoi ou pourquoi pas ?

56. Lorsque des souris sont soumises en laboratoire à des fibres d'amiante, certaines développent des tumeurs des poumons. La table ci-après fournit les données relevées par différents scientifiques

Amiante (fibres/mL)	Souris (en %)	Amiante (fibres/mL)	Souris (en %)
50	2	1600	42
400	6	1800	37
500	5	2000	38
900	10	3000	50
1100	26		

- Déterminez à l'aide d'un tableur la droite de régression pour ces données.
 - Tracez un diagramme de points et la droite de régression. Cette droite semble-t-elle être un bon modèle pour les données ? Expliquez votre raisonnement.
 - Que représente l'ordonnée à l'origine de la droite de régression dans le contexte de ce problème ?
57. La table suivante reprend la consommation mondiale quotidienne de pétrole depuis 1985 jusqu'en 2019, mesurée en milliards de barils par jour.

Années depuis 1985	Milliards de barils par jour	Années depuis 1985	Milliards de barils par jour
0	59,25	18	79,91
1	60,99	19	82,65
2	62,29	20	83,89
3	64,27	21	84,92
4	65,60	22	86,10
5	66,74	23	85,17
6	66,86	24	84,08
7	67,88	25	86,86
8	67,62	26	87,82
9	69,33	27	88,78
10	70,09	28	90,15
11	71,64	29	90,90
12	73,74	30	92,61
13	74,12	31	94,40
14	75,67	32	96,10
15	76,48	33	97,35
16	77,37	34	98,27
17	78,24		

- Construisez un diagramme de points et voyez si un modèle du premier degré est approprié. Expliquez votre raisonnement.
- Utilisez un tableur pour calculer les coefficients de la droite de régression et tracez-la.
- Servez-vous du modèle pour estimer la consommation de pétrole en 2002.
- Selon la modèle, quelle sera la consommation en 2020 ? Cherchez la réelle consommation quotidienne de pétrole en 2020 et comparez-la avec votre estimation.

58. La table reprend les prix moyens de détail de l'électricité aux USA de 2000 à 2019, exprimés en cents par kWh.

Années depuis 2000	Cents/kWh	Années depuis 2000	Cents/kWh
0	8,24	10	11,54
1	8,58	11	11,72
2	8,44	12	11,88
3	8,72	13	12,13
4	8,95	14	12,52
5	9,45	15	12,65
6	10,40	16	12,55
7	10,65	17	12,89
8	11,26	18	12,87
9	11,51	19	13,01

- a) Construisez un diagramme de points et voyez si un modèle du premier degré est approprié. Expliquez votre raisonnement.
- b) Utilisez un tableur pour calculer les coefficients de la droite de régression et tracez-la.
- c) Servez-vous de votre modèle pour estimer le prix moyen de détail de l'électricité en 2005 et en 2017.
59. Beaucoup de grandeurs physiques sont liées par une loi qui fait intervenir l'inverse du carré, c'est-à-dire par une fonction puissance de la forme $f(x) = kx^{-2}$. C'est le cas, par exemple, de l'intensité lumineuse sur un objet en fonction de la distance par rapport à la source lumineuse. Supposez que vous êtes dans une pièce obscure et que vous essayez de lire un livre. Comme la lumière est trop faible, vous vous rapprochez à mi-chemin de la lampe. De combien aura varié l'intensité lumineuse ?
60. Plusieurs écologistes ont modélisé la relation entre les espèces animales et leur milieu de vie par une fonction

puissance. En particulier, le nombre S d'espèces de chauve-souris vivant dans les grottes de Mexico a été lié à la taille A de ces grottes par l'équation $S = 0,7 A^{0,3}$.

- a) La grotte appelée *Misión Imposible* près de Puebla, Mexico, a une superficie de 60 m^2 . Combien d'espèces de chauve-souris pensez-vous trouver là ?
- b) Si vous découvrez qu'il y a 4 espèces de chauve-souris dans cet espace, donnez une estimation de la superficie de la grotte.

61. La table reprend à quelle distance moyenne du Soleil se trouvent les planètes (l'unité est la distance Terre-Soleil) ainsi que la durée T de leur révolution (durée de révolution en années).

Planète	d	T
Mercury	0,387	0,241
Venus	0,723	0,615
Earth	1,000	1,000
Mars	1,523	1,881
Jupiter	5,203	11,861
Saturn	9,541	29,457
Uranus	19,190	84,008
Neptune	30,086	164,784

- a) Ajustez sur ces données un modèle de type fonction puissance ?
- b) La troisième loi de Kepler sur le mouvement des planètes établit que « Le carré de la période de révolution d'une planète est proportionnel au cube de sa distance moyenne au Soleil ». Votre modèle corrobore-t-il la troisième loi de Kepler ? Expliquez votre raisonnement.
62. Écrivez l'expression de la fonction
- $$f(x) = |x| + |x + 3| + 2 \text{ sans valeur absolue.}$$

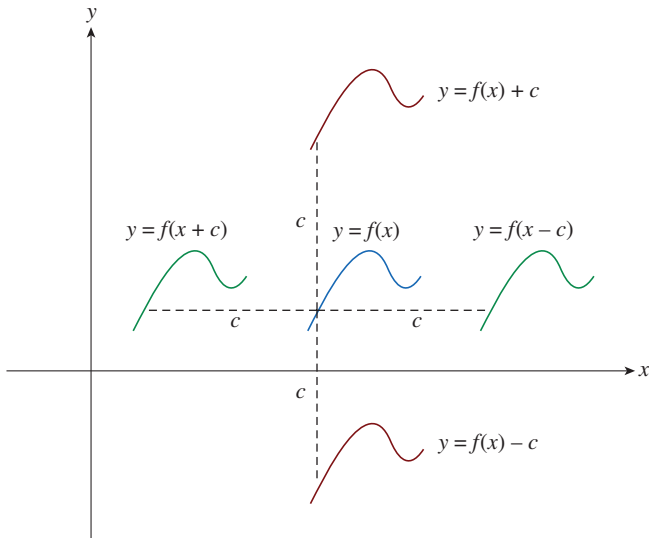
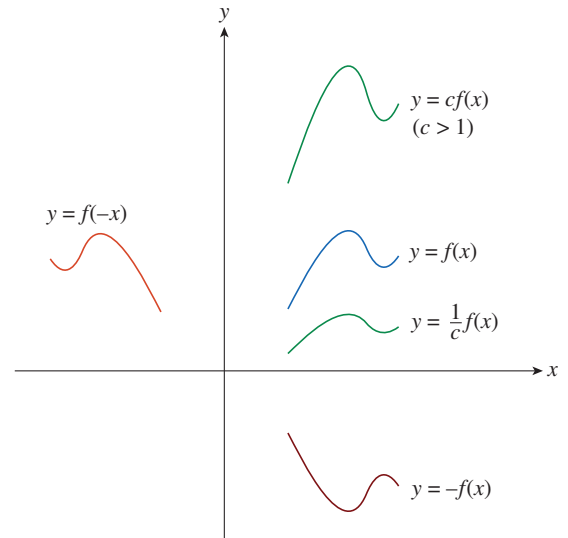
1.3 De nouvelles fonctions avec des anciennes

Dans cette section, nous allons nous appuyer sur les divers types de fonctions étudiés dans la section 1.2 pour en obtenir de nouvelles en les transformant par translation, compression et étirement, et réflexion de leurs graphes. Nous allons également montrer comment assembler deux fonctions par les simples opérations arithmétiques classiques et par composition.

■ Transformations de fonctions

En appliquant certaines transformations au graphe d'une fonction donnée, on obtient les graphes de fonctions apparentées, ce qui facilite grandement le tracé à la main de graphes de beaucoup de fonctions.

Considérons en premier lieu les **translations**. Si c est un nombre strictement positif, le graphe de $y = f(x) + c$ est juste le même que celui de $y = f(x)$ déplacé vers le haut de c unités (puisque chaque ordonnée y est augmentée de la même quantité c). Semblablement, si $g(x) = f(x - c)$ avec $c > 0$, la valeur de g en x est la même que la valeur de f en $x - c$ (point situé c unités à gauche de x). De là, le graphe de $y = f(x - c)$ est le même que celui de $y = f(x)$ déplacé de c unités vers la droite (voir la figure 1.45).

**Figure 1.45**Graphes de fonctions obtenus par translation du graphe de f .**Figure 1.46**Graphes de fonctions obtenus par compression et étirement du graphe de f .

Venons-en maintenant aux **étirements et compressions** et aux **réflexions**. Si $c > 1$, alors le graphe de $y = cf(x)$ est le graphe de $y = f(x)$ étiré ou comprimé verticalement d'un facteur c (parce que chaque ordonnée y est multipliée par le même nombre c). Le graphe de $y = -f(x)$ est le graphe de $y = f(x)$ réfléchi par rapport à l'axe Ox parce que le point (x, y) est remplacé par le point $(x, -y)$ (voir la figure 1.46 et l'encadré suivant où sont décrits les résultats d'autres étirements et réflexions).

Étirements verticaux et horizontaux et réflexions

Supposons $c > 1$. Pour obtenir le graphe de

$y = cf(x)$, étirer verticalement le graphe de $y = f(x)$ d'un facteur c .

$y = (1/c)f(x)$, comprimer verticalement le graphe de $y = f(x)$ d'un facteur c .

$y = f(cx)$, comprimer horizontalement le graphe de $y = f(x)$ d'un facteur c .

$y = f(x/c)$, étirer horizontalement le graphe de $y = f(x)$ d'un facteur c .

$y = -f(x)$, appliquer au graphe de $y = f(x)$ une symétrie par rapport à l'axe Ox .

$y = f(-x)$, appliquer au graphe de $y = f(x)$ une symétrie par rapport à l'axe Oy .

La figure 1.47 montre le résultat de ces étirements et compressions sur la fonction cosinus dans le cas où $c = 2$. Pour obtenir le graphe de $y = 2 \cos x$, par exemple, on multiplie l'ordonnée y de chaque point du graphe de $y = \cos x$ par 2. Cela *amplifie* le graphe du cosinus, il est étiré verticalement d'un facteur 2.

Pour obtenir le graphe de $y = \cos 2x$, on multiplie l'abscisse par 2. Ce qui change la période du graphe du cosinus, il est comprimé d'un facteur 2.

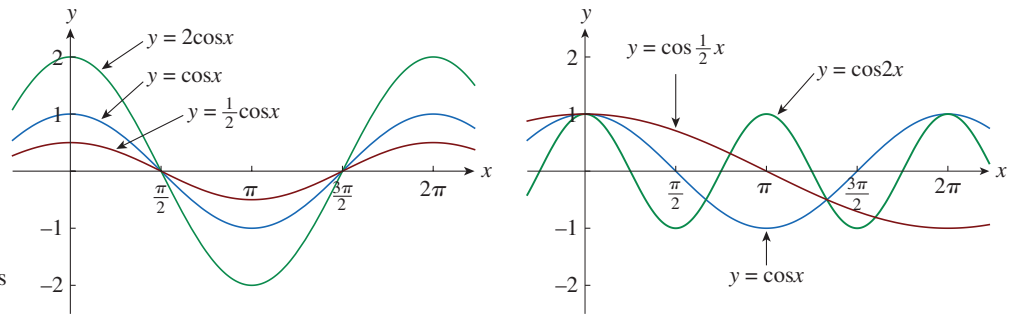


Figure 1.47

Étirement et compression appliqués à la fonction cosinus.

Exemple 1 Transformation de la fonction racine carrée

Étant donné la représentation graphique de $y = \sqrt{x}$, appliquer les transformations adéquates pour obtenir le graphe de $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x - 2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ et $y = \sqrt{-x}$.

Solution

La figure 1.48 reproduit la courbe représentative de $y = \sqrt{x}$ sous l'étiquette Graphe A.

Le graphe de $y = \sqrt{x} - 2$ est obtenu par translation de la courbe $y = \sqrt{x}$ de 2 unités vers le bas.

Le graphe de $y = \sqrt{x - 2}$ est obtenu par translation de la courbe $y = \sqrt{x}$ de 2 unités vers la droite.

Le graphe de $y = -\sqrt{x}$ est obtenu en appliquant à la courbe $y = \sqrt{x}$ une symétrie par rapport à l'axe Ox .

Le graphe de $y = 2\sqrt{x}$ est obtenu en étirant verticalement la courbe $y = \sqrt{x}$ d'un facteur 2.

Le graphe de $y = \sqrt{-x}$ est obtenu en appliquant à la courbe $y = \sqrt{x}$ une symétrie par rapport à l'axe Oy .

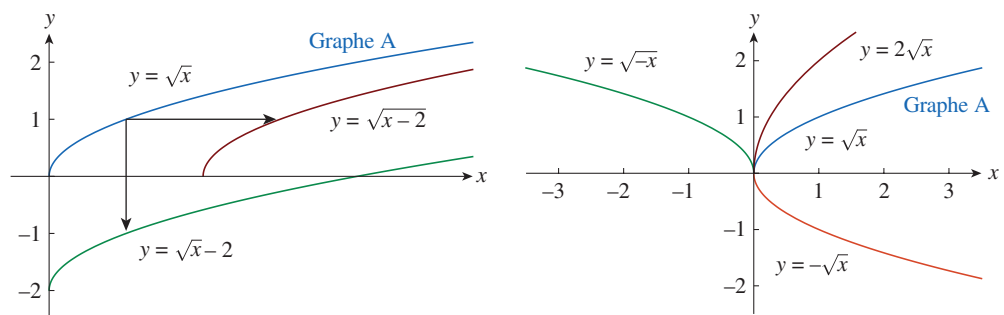


Figure 1.48

Graphe de la fonction racine carrée et de ses diverses transformées.

Exemple 2 Utiliser les transformations

Dessiner la courbe représentative de la $f(x) = x^2 + 6x + 10$.

Solution

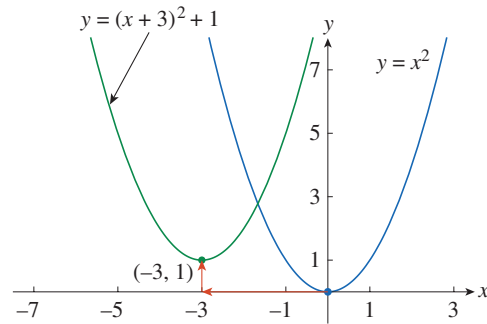
$$y = x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$$

Compléter le carré.

Dès lors, la courbe s'obtient par translation de la parabole $y = x^2$ de 3 unités vers la gauche et de 1 unité vers le haut (voir figure 1.49).

Figure 1.49

Graphe de $y = (x + 3)^2 + 1$ obtenu par translation du graphe de $y = x^2$ vers la gauche et vers le haut.



Exemple 3 Transformation de la fonction sinus

Tracer les graphes des fonctions suivantes :

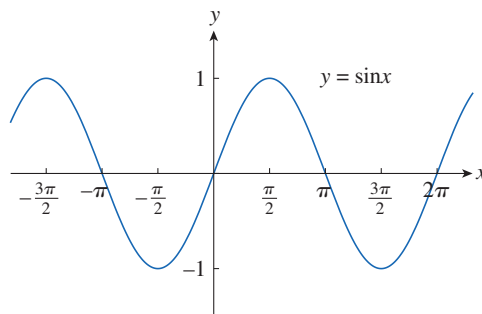
a) $y = \sin 2x$

b) $y = 1 - \sin x$

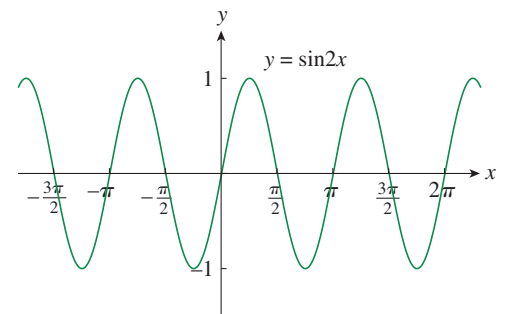
Solution

a) Le graphe de $y = \sin x$ est reproduit à la figure 1.50.

Le graphe de $y = \sin 2x$ est obtenu en le comprimant horizontalement d'un facteur 2. Voir la figure 1.51.

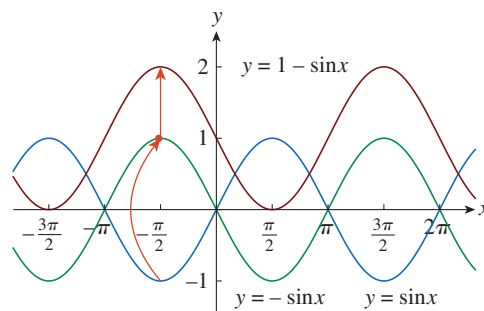
**Figure 1.50**

Graphe de $y = \sin x$.

**Figure 1.51**

Graphe de $y = \sin 2x$.

- b) Pour obtenir le graphe de $y = \sin x$, on prend à nouveau celui de $y = -\sin x$ auquel on applique d'abord une symétrie par rapport à l'axe Ox pour produire celui de $y = 1 - \sin x$ et ensuite une translation de 1 unité vers le haut. Voir la figure 1.52.

**Figure 1.52**

Graphe de $y = 1 - \sin x$ obtenu à partir de celui de $y = \sin x$ et $y = -\sin x$.

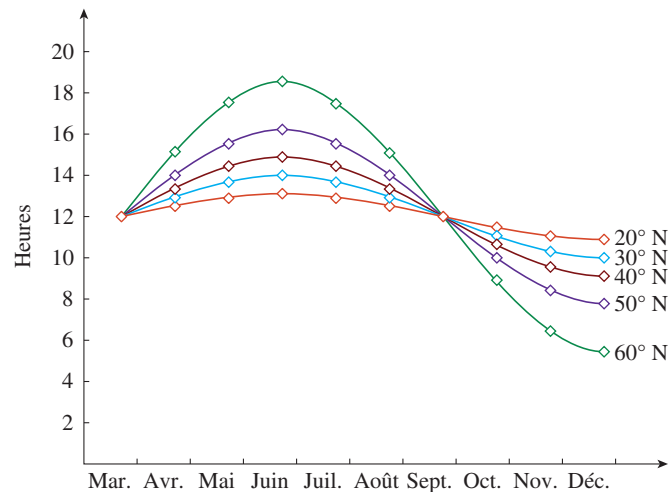
Exemple 4 Un modèle pour les heures de clarté

La figure 1.53 montre les graphes du nombre d'heures de clarté en fonction du moment de l'année sous plusieurs latitudes. Sachant que Madrid se situe à 40° de latitude nord, chercher une fonction qui modélise le nombre d'heures de clarté à Madrid.

Figure 1.53

Graphes du nombre d'heures de clarté entre le 21 mars et le 21 décembre sous diverses latitudes.

Source: Adaptée de L. Harrison, *Daylight, Twilight, Darkness et Time* (New York: Silver Burdett, 1935), page 40.



Solution

On remarque que chaque courbe ressemble à une sinusoïde qui a subi une translation et un étirement. Selon la courbe relative aux heures de clarté à la latitude de Madrid, le nombre d'heures de clarté va d'environ 14,8 h le 21 juin jusqu'à 9,2 h le 21 décembre. Par conséquent, l'amplitude de la courbe (le facteur par lequel il faut étirer verticalement la sinusoïde) est de $\frac{1}{2}(14,8 - 9,2) = 2,8$.

Comme il y a environ 365 jours dans une année, la période de notre modèle doit être 365. Or, celle de $y = \sin t$ est 2π . D'où, le facteur de compression horizontale est $2\pi/365$.

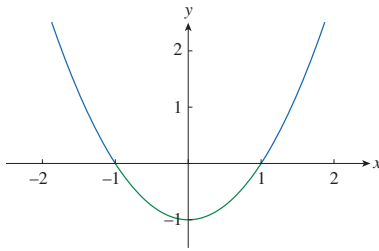
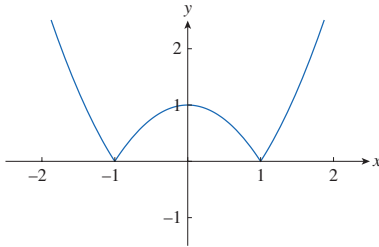
De plus, la courbe commence son cycle le 21 mars, c'est-à-dire le 80^e jour de l'année. La sinusoïde doit donc être déplacée horizontalement de 80 unités vers la droite.

Enfin, elle est aussi déplacée de 12 unités vers le haut.

Il résulte de tout cela que la fonction qui modélise le nombre d'heures de clarté à Madrid le jour t de l'année est donnée par la formule

$$L(t) = 12 + 2,8 \sin \left[\frac{2\pi}{365}(t - 80) \right].$$

Une autre transformation intéressante des fonctions consiste à savoir prendre « graphiquement » la *valeur absolue* d'une fonction. Selon la définition de la valeur absolue, $y = |f(x)| = f(x)$ quand $f(x) \geq 0$ et $y = |f(x)| = -f(x)$ quand $f(x) < 0$. Graphiquement, cela revient à laisser inchangée la partie du graphe de $y = f(x)$ située *au-dessus* de l'axe Ox et à appliquer à la partie du graphe situé *sous* l'axe Ox une symétrie par rapport à Ox .

**Figure 1.54**Graphe de $y = x^2 - 1$.**Figure 1.55**Graphe de $y = |x^2 - 1|$.**Exemple 5 Effet valeur absolue**Dessiner la courbe représentative de $y = |x^2 - 1|$.**Solution**

D'abord, nous traçons la parabole $y = x^2 - 1$ en déplaçant la parabole $y = x^2$ d'une unité vers la bas. C'est la figure 1.54. Entre -1 et $+1$, la courbe est sous l'axe Ox .

On applique à cette partie une symétrie par rapport à l'axe Ox . C'est à la figure 1.55 le graphe de $y = |x^2 - 1|$ ■

Opérations sur les fonctions

Tout comme, à deux nombres réels, on peut en associer un autre par addition, soustraction, multiplication ou division, on peut associer à deux fonctions f et g de nouvelles fonctions $f + g$, $f - g$, fg et f/g .

Les fonctions somme et différence sont définies par

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Si A est le domaine de définition de f et B , celui de g , alors le domaine de définition de $f + g$ est leur intersection, $A \cap B$ parce qu'il faut que $f(x)$ et $g(x)$ soient toutes deux définies. Par exemple, comme le domaine de définition de $f(x) = \sqrt{x}$ est $A = [0, +\infty[$ et celui de $g(x) = \sqrt{2 - x}$ est $B =]-\infty, 2]$, le domaine de définition de $(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2 - x}$ est $A \cap B = [0, 2]$.

De même, les fonctions produits et quotients sont définies par

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Le domaine de définition de fg est $A \cap B$ tandis que, comme on ne peut pas diviser par 0, celui de f/g est $\{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$. Par exemple, si $f(x) = x^2$ et si $g(x) = x - 1$, alors le domaine de définition de $(f/g)(x) = x^2/(x - 1)$ est $\{x \mid x \neq 1\}$, ou $B =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

Voici encore une autre façon d'associer à deux fonctions une nouvelle. Supposons, par exemple, que $y = f(u) = \sqrt{u}$ et $u = g(x) = x^2 + 1$. Comme y est une fonction de u et comme u est, à son tour, une fonction de x , il s'ensuit que y est finalement une fonction de x . Cette relation entre y et x se calcule par substitution

$$y = f(u) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

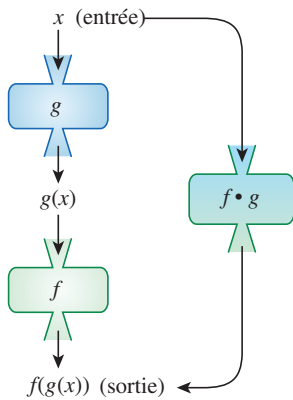
Cette opération s'appelle *composition* parce que la nouvelle fonction est *composée* des deux fonctions initiales f et g .

De façon générale, étant donné deux fonctions f et g , nous partons d'une valeur de x dans le domaine de définition de g , nous calculons son image $g(x)$. Si le nombre $g(x)$ appartient au domaine de définition de f , nous pouvons calculer la valeur $f(g(x))$. Le résultat est une nouvelle fonction $h(x) = f(g(x))$ obtenue en introduisant g dans f . Elle s'appelle la *composée* de f et g et est notée $f \circ g$ (f rond g).

Définition • Fonction composée

Étant donné deux fonctions f et g , la fonction **composée** $f \circ g$ (appelée aussi la **composée** de f et g) est définie par

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

**Figure 1.56**

La machine $f \circ g$ est la composée de la machine g (d'abord) suivie de la machine f .

Le domaine de définition de $f \circ g$ est l'ensemble de toutes les valeurs de x du domaine de définition de g qui sont telles que $g(x)$ appartient au domaine de définition de f . Autrement dit, $(f \circ g)(x)$ est définie là où à la fois $g(x)$ et $f(g(x))$ sont définies. La meilleure image que l'on puisse donner de $f \circ g$ est le diagramme dans lequel les fonctions en jeu sont vues comme des espèces de machine (Figure 1.56).

Exemple 6 Composer des fonctions

Par quelles formules sont définies les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$, si $f(x) = x^2$ et $g(x) = x - 3$?

Solution

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = (x - 3)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$

REMARQUE : L'exemple 6 montre clairement que, en général, $f \circ g \neq g \circ f$.

Souvenez-vous que la notation $f \circ g$ signifie que la première fonction appliquée est g et la seconde f . Ce qui, à l'exemple 6, fait que pour appliquer $f \circ g$, on soustrait d'abord 3, puis on élève au carré ; alors que, pour appliquer $g \circ f$, on doit d'abord élever au carré, puis soustraire 3.

Exemple 7 Entraînement à la composition de fonctions

Si $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \sqrt{2 - x}$, par quelle formule est définie chaque fonction et quel est son domaine de définition.

- a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ f$ d) $g \circ g$

Solution

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{2 - x}) = \sqrt{\sqrt{2 - x}} = \sqrt[4]{2 - x}$

Le domaine de définition de $f \circ g$ est $\{x \mid 2 - x \geq 0\} = \{x \mid x \leq 2\} =]-\infty, 2]$.

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$

Pour que $\sqrt{x}$ soit défini, il faut $x \geq 0$.

Pour que $\sqrt{2 - \sqrt{x}}$ soit défini, il faut $2 - \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 2 \Rightarrow x \leq 4$.

Finalement, le domaine de définition de $g \circ f$ est l'intervalle fermé $[0, 4]$.

c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$

Le domaine de définition de $f \circ f$ est $[0, +\infty[$.

d) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{2 - x}) = \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}}$

Cette expression est définie quand $2 - x \geq 0$ et $2 - \sqrt{2 - x} \geq 0$.

$$2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

$$2 - \sqrt{2 - x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2 - x} \leq 2 \Rightarrow 2 - x \leq 4 \Rightarrow x \geq -2$$

En conclusion, le domaine de définition de $g \circ g$ est l'intervalle fermé $[-2, 2]$.

L'opération de composition s'applique aussi à trois fonctions ou davantage. Par exemple, la fonction composée $f \circ g \circ h$ consiste à appliquer d'abord h , ensuite g et finalement f

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

Exemple 8 Composition multiple

Définir l'expression de $f \circ g \circ h$ si $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = x^{10}$ et $h(x) = x + 3$.

Solution

$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= (f(g(h))) = f(g(x+3)) \\ &= f((x+3)^{10}) = \frac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10} + 1}\end{aligned}$$

Jusqu'à présent, par composition, nous avons construit des fonctions compliquées à partir de fonctions plus simples. Mais en analyse il est souvent utile ou nécessaire de décomposer une fonction compliquée en de plus simples, comme l'illustre l'exemple 9.

Exemple 9 Décomposer une fonction

Étant donnée la fonction $F(x) = \cos^2(x+9)$, quelles sont les fonctions f , g et h telles que $F = f \circ g \circ h$.

Solution

Traduite en mots, la formule qui définit F dit : d'abord ajouter 9, puis prendre le cosinus du résultat, enfin, élever au carré.

Ce qui suggère de poser $h(x) = x + 9$ $g(x) = \cos x$ $f(x) = x^2$

Effectivement

$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x+9)) \\ &= f(\cos(x+9)) \\ &= [\cos(x+9)]^2 \\ &= \cos^2(x+9) = F(x)\end{aligned}$$

Attention, la *décomposition* n'est pas unique.

1.3 Exercices

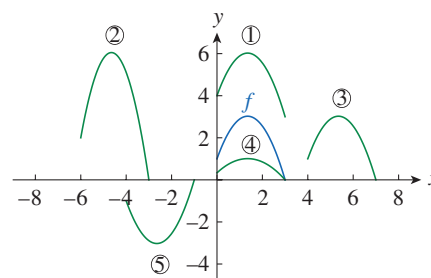
1. Supposons que le graphe de f soit donné. Écrivez une équation pour chaque graphe obtenu à partir de celui de f par la transformation suivante.

- Translation de 3 unités vers le haut.
- Translation de 3 unités vers le bas.
- Translation de 3 unités vers la droite.
- Translation de 3 unités vers la gauche.
- Symétrie par rapport à l'axe Ox .
- Symétrie par rapport à l'axe Oy .
- Étirement vertical de facteur 3.
- Compression verticale de facteur 3.

2. Expliquez comment obtenir les graphes suivants à partir de celui de $y = f(x)$.

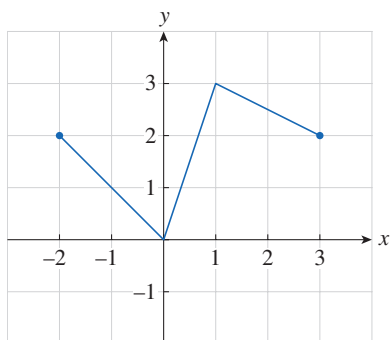
- $y = f(x) + 8$
- $y = f(x + 8)$
- $y = 8f(x)$
- $y = f(8x)$
- $y = -f(x) - 1$
- $y = 8f\left(\frac{1}{8}x\right)$

3. Le graphe de f est donné dans la figure. Associez à chaque graphe son équation et justifiez votre choix.



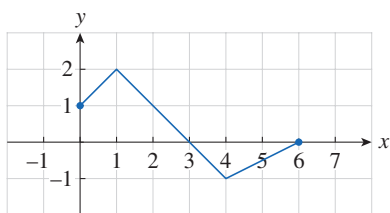
- $y = f(x - 4)$
- $y = f(x) + 3$
- $y = \frac{1}{3}f(x)$
- $y = -f(x + 4)$
- $y = 2f(x + 6)$

4. Voici le graphe de f . Utilisez-le pour tracer celui des fonctions suivantes.



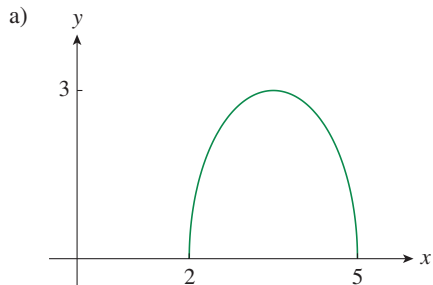
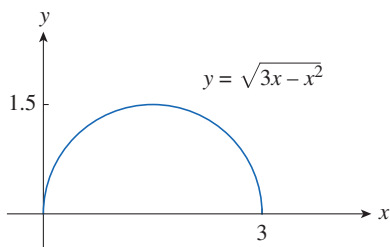
- a) $y = f(x) - 3$ b) $y = f(x + 1)$
 c) $y = \frac{1}{2}f(x)$ d) $y = -f(x)$

5. Voici le graphe de f . Utilisez-le pour tracer celui des fonctions suivantes.

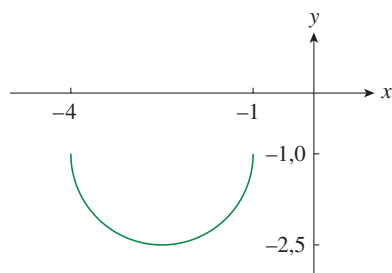


- a) $y = f(2x)$ b) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$
 c) $y = f(-x)$ d) $y = -f(-x)$

6. Voici le graphe de $y = \sqrt{3x - x^2}$. Utilisez des transformations pour créer une fonction dont le graphe est celui ci-dessous.

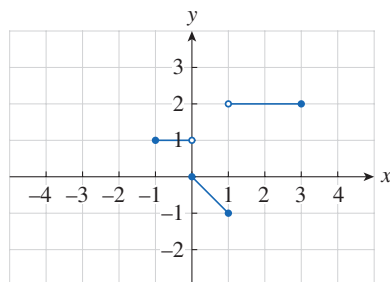


b)



7. Soit $f = \{(1, 4), (0, 2), (-4, 3), (2, 9)\}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$. Calculez les couples de $g \circ f$.

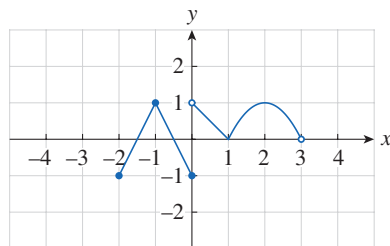
8. Le graphe de $y = f(x)$ est donné dans la figure ci-dessous.



Déterminez l'ensemble image de chaque fonction.

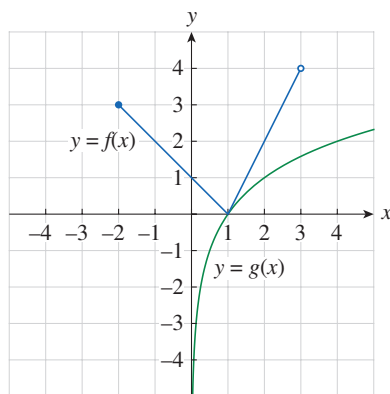
- a) $y = f(|x|)$ b) $y = f(-x)$
 c) $f(f(x))$

9. Utilisez le graphe de $y = f(x)$ donné ci-après pour tracer celui de chaque fonction.



- a) $y = |2f(x)|$ b) $y = -f\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$

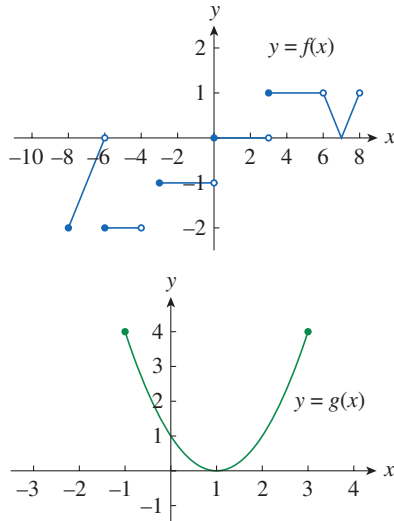
10. Voici les graphes de $y = f(x)$ et $y = g(x)$.



Déterminez les domaines de définition de chacune des fonctions suivantes.

- a) $y = g(x)$ b) $y = (f + g)(x)$
 c) $y = f(g(x))$ d) $y = f(|x|)$
 e) $y = f(2x)$

11. Voici les graphes de $y = f(x)$ et $y = g(x)$.



Déterminez les domaines de définition de chacune des fonctions suivantes.

- a) $y = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ b) $y = (g \circ f)(x)$
 c) $y = f(|x|)$ d) $y = f(2x)$

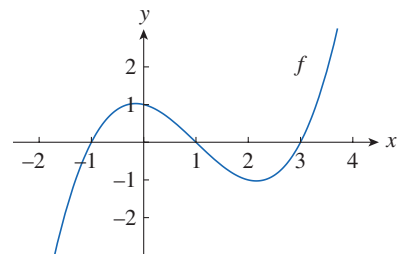
12. Tracez les graphes de $f(x) = -2|x|$ et $g(x) = |2x|$ dans le même repère et expliquez la relation entre ces deux courbes.
13. Utilisez les méthodes de transformation pour tracer le graphe de $y = \sqrt{x+1} + 2$.
14. a) Comment se présente le graphe de $y = 2 \sin x$ par rapport au graphe de $y = \sin x$? À l'aide de votre réponse et de la figure 1.50, dessinez le graphe de $y = 2 \sin x$.
 b) Comment le graphe de $y = 1 + \sqrt{x}$ est-il lié au graphe de $y = \sqrt{x}$? À l'aide de votre réponse et de la figure 1.48, dessinez le graphe de $y = 1 + \sqrt{x}$.

Tracez le graphe de chaque fonction en partant du graphe d'une des fonctions standard données dans la section 1.2 et en lui appliquant les transformations appropriées.

15. $y = -x^3$ 16. $y = (x-3)^2$
 17. $y = x^3 + 1$ 18. $y = 1 - \frac{1}{x}$
 19. $y = 2 \cos 3x$ 20. $y = 2\sqrt{x+1}$
 21. $y = x^2 - 4x + 5$ 22. $y = 1 + \sin \pi x$
 23. $y = 2 - \sqrt{x}$ 24. $y = 3 - 2 \cos x$
 25. $y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ 26. $y = |x| - 2$

27. $y = |x - 2|$ 28. $y = \frac{1}{4} \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
 29. $y = |\sqrt{x} - 1|$ 30. $y = |\cos \pi x|$

31. Le Caire est située à 30° de latitude nord. Utilisez la figure 1.53 pour déterminer une fonction qui modélise le nombre d'heures de clarté en fonction du moment de l'année. Pour vérifier la précision de votre modèle, utilisez le fait qu'au Caire, le 31 mars, le soleil se lève à 5h 51 et se couche à 6h18.
32. Une étoile est dite variable lorsque son éclat augmente et diminue périodiquement. En ce qui concerne l'étoile variable la plus visible, Delta Cephei, ses moments de brillance maximale apparaissent tous les 5,4 jours, son intensité moyenne est 4 et son intensité varie de ± 0.35 . Construisez un modèle de la brillance de Delta Cephei en fonction du temps.
33. Les plus hautes marées se produisent sur la côte atlantique du Canada dans la baie de Fundy. Au cap de Hopewell, la profondeur de l'eau est d'environ 2 mètres à marée basse et de 12 m à marée haute. La période naturelle d'oscillation est de 12 heures. Le 26 janvier 2020, la marée haute s'est produite à 13h 02. Modélisez par une fonction cosinus la profondeur $D(t)$ de l'eau (en mètres) par rapport au temps t (en heures à partir de minuit) ce jour-là.
34. Lors d'un cycle normal de la respiration, le volume d'air qui entre et qui sort des poumons est d'environ 500 mL. Les volumes en réserve et résiduels occupent environ 2000 mL et un seul cycle respiratoire d'un être humain prend environ 4 secondes. Modélisez le volume total d'air $V(t)$ dans les poumons en fonction du temps.
35. a) Expliquez comment est le graphe de $y = f(|x|)$ par rapport au graphe de f ?
 b) Dessinez la courbe d'équation $y = \sin |x|$.
 c) Dessinez la courbe d'équation $y = \sqrt{|x|}$.
36. Utilisez le graphe de f que voici pour tracer celui de $y = \frac{1}{f(x)}$. Quelles sont à cette fin les particularités les plus importantes de f ? Expliquez votre raisonnement.



Déterminez les fonctions a) $f + g$, b) $f - g$, c) fg et d) f/g et leur domaine de définition.

37. $f(x) = x^3 + 2x^2$, $g(x) = 3x^2 - 1$
 38. $f(x) = \sqrt{3-x}$, $g(x) = \sqrt{x^2-1}$

Définissez les fonctions **a)** $f \circ g$, **b)** $g \circ f$, **c)** $f \circ f$ et **d)** $g \circ g$ et déterminez leur domaine de définition.

39. $f(x) = 3x + 5$, $g(x) = x^2 + x$

40. $f(x) = x^3 - 2$, $g(x) = 1 - 4x$

41. $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = 4x - 3$

42. $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2 + 1$

43. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$

44. $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $g(x) = \sin 2x$

Quelle est l'expression qui définit $f \circ g \circ h$?

45. $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = x^2$

46. $f(x) = |x - 4|$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \sqrt{x}$

47. $f(x) = \sqrt{x-3}$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3 + 2$

48. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = \frac{x}{x-1}$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$

Écrivez la fonction F sous la forme $F = f \circ g$.

49. $F(x) = (2x + x^2)^4$ 50. $F(x) = \cos^2 x$

51. $F(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$ 52. $F(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{1+x}}$

53. $F(t) = \sec(t^2) \operatorname{tg}(t^2)$ 54. $F(t) = \frac{\operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg} t}$

Écrivez la fonction F sous la forme $F = f \circ g \circ h$.

55. $F(x) = \sqrt{\sqrt{x} - 1}$ 56. $F(x) = \sqrt[8]{2 + |x|}$

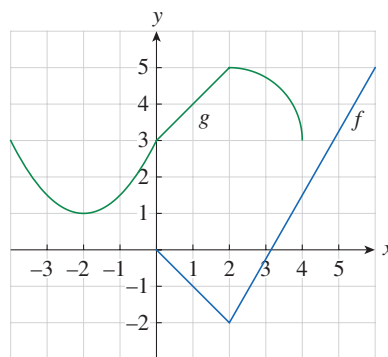
57. $F(t) = \sin^2(\cos t)$ 58. $F(t) = \operatorname{tg} \left| \frac{1}{t^3} \right|$

59. Servez-vous de la table pour calculer chaque expression.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

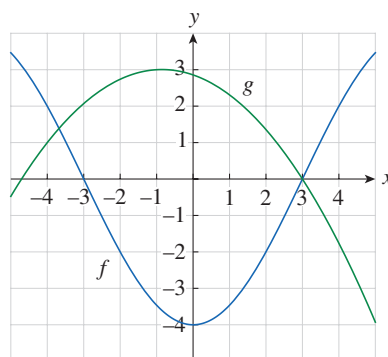
- a) $f(g(1))$ b) $g(f(1))$ c) $f(f(1))$
d) $g(g(1))$ e) $(g \circ f)(3)$ f) $(f \circ g)(6)$

60. Sur simple lecture des graphes de f et g que voici, calculez chaque expression ou expliquez pourquoi elle n'est pas définie.



- a) $f(g(2))$ b) $g(f(0))$ c) $(f \circ g)(0)$
d) $(g \circ f)(6)$ e) $(g \circ g)(-2)$ f) $(f \circ f)(4)$

61. Utilisez les graphes donnés de f et g pour estimer les valeurs de $f(g(x))$ pour $x = -5, -4, -3, \dots, 5$. Grâce à ces estimations, esquissez le graphe de $f \circ g$.



62. Une pierre, en tombant dans un lac, crée une onde circulaire qui se propage à la vitesse de 60 cm/s.

- a) Cherchez une expression du rayon r de ce cercle comme une fonction du temps t (en secondes).
b) Si A désigne l'aire de ce cercle comme fonction du rayon, écrivez l'expression de $A \circ r$ et donnez-en une interprétation dans le contexte de ce problème.

63. Un ballon sphérique est en train d'être gonflé et son rayon croît à la vitesse de 2 cm/s.

- a) Exprimez le rayon r du ballon comme fonction du temps t (en s).
b) Si V désigne le volume du ballon comme fonction du rayon, cherchez l'expression de $V \circ r$ et donnez-en une interprétation dans le contexte de ce problème.

64. Un bateau se déplace parallèlement à une côte rectiligne à une vitesse de 30 km/h. Il navigue à 6 km de la côte et passe à la hauteur d'un phare à midi.

- a) Donnez une expression de la distance s entre le phare et le bateau comme fonction de la distance d que le bateau a parcourue depuis midi ; autrement dit, cherchez f telle que $s = f(d)$.

- b) Cherchez une expression de d en fonction du temps t écoulé depuis midi ; autrement dit, découvrez g telle que $d = g(t)$.
 c) Quelle est l'expression de $f \circ g$ et que représente cette fonction composée ?

65. Un avion vole à la vitesse de 650 km/h à une altitude de 1600 m et passe exactement à la verticale d'une station radar au moment $t = 0$.

- a) Exprimez la distance horizontale d (en km) parcourue par l'avion en fonction du temps t .
 b) Exprimez la distance s entre l'avion et la station radar comme une fonction de d .
 c) Par composition, trouvez l'expression de s en fonction de t .

66. La fonction de Heaviside H est définie par

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Cette fonction est utilisée dans le domaine des circuits électriques pour rendre compte de la soudaine mise sous tension au moment où un interrupteur se ferme.

- a) Tracez le graphe de la fonction de Heaviside.
 b) Tracez le graphe de la tension $V(t)$ dans un circuit si l'interrupteur est fermé au moment $t = 0$ et qu'une tension de 120 V est appliquée instantanément au circuit. Écrivez une formule de $V(t)$ en termes de $H(t)$.
 c) Tracez le graphe de la tension $V(t)$ d'un circuit si l'interrupteur est fermé au moment $t = 5$ s et qu'une tension de 240 V est appliquée instantanément au circuit. Écrivez une formule de $V(t)$ en termes de $H(t)$. (Remarquez que le démarrage à 5 s correspond à une translation).

67. La fonction de Heaviside, définie à l'exercice 66, intervient également dans la fonction **rampe** $y = ctH(t)$, qui rend compte d'un accroissement progressif de la tension ou du courant dans un circuit.

- a) Représentez la fonction rampe $y = tH(t)$.
 b) Représentez la fonction qui donne la tension $V(t)$ du circuit si l'interrupteur est fermé au moment $t = 0$ et qu'une tension est appliquée régulièrement et progressivement jusqu'à atteindre 120 V après 60 s. Écrivez une formule de $V(t)$ en fonction de $H(t)$ pour $t \leq 60$.

- c) Représentez la fonction qui donne la tension $V(t)$ du circuit si l'interrupteur est fermé au moment $t = 7$ et qu'une tension est appliquée régulièrement et progressivement jusqu'à atteindre 100 V après 25 s. Écrivez une formule de $V(t)$ en fonction de $H(t)$ pour $t \leq 32$.

68. Soient f et g les fonctions affines d'équations $f(x) = m_1x + b_1$ et $g(x) = m_2x + b_2$. La fonction $f \circ g$ est-elle aussi une fonction affine ? Si oui, quelle est la pente de son graphe ? Si non, pourquoi ?

69. Lorsque vous placez x € à un taux d'intérêt composé annuellement de 4%, le montant $A(x)$ de votre placement au bout d'un an est de $A(x) + 1,04x$. Calculez $A \circ A$, $A \circ A \circ A$ et $A \circ A \circ A \circ A$. Que représentent ces compositions dans ce contexte ? Quelle est la formule qui définit A composée n fois.

70. a) Soit $g(x) = 2x + 1$ et $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$. Déterminez une fonction f telle que $f \circ g = h$. (Pensez aux opérations qu'il faut faire subir à g pour arriver à h .)
 b) Soit $f(x) = 3x + 5$ et $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$. Déterminez une fonction g telle que $f \circ g = h$.

71. Soit $f(x) = x + 4$ et $h(x) = 4x - 1$. Déterminez une fonction g telle que $g \circ f = h$.

72. Supposez que g soit une fonction paire. Est-il certain que $h = f \circ g$ le soit aussi ? Expliquez votre raisonnement.

73. Supposez que g soit une fonction impaire. Est-il certain que $h = f \circ g$ le soit aussi ? Qu'en est-il si f est impaire ? Si f est paire ?

74. a) On suppose que f est une fonction paire, que $g(x) = \sin x$ et $h = f \circ g$. Est-ce que h est une fonction paire ? impaire ? Ni l'un, ni l'autre. Justifiez.
 b) On suppose que f est une fonction paire, que $g(x) = \cos x$ et $h = g \circ f$. Est-ce que h est une fonction paire ? impaire ? Ni l'un, ni l'autre. Justifiez.
 c) On suppose que f , g et h sont des fonctions paires et $k = f \circ g \circ h$. Est-ce que k est une fonction paire ? impaire ? Ni l'un, ni l'autre. Justifiez.

1.4 Fonctions exponentielles

La fonction $f(x) = 2^x$ est appelée une *fonction exponentielle* parce que sa variable x est en exposant. Attention de ne pas la confondre avec la fonction puissance $g(x) = x^2$, dans laquelle la variable est la base.

De façon générale, une **fonction exponentielle** est une fonction de la forme

$$f(x) = b^x$$

où b est une constante strictement positive. Rappelons ce que cette écriture signifie.

Quand $x = n$, un entier strictement positif, alors $b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ facteurs}}$.

Quand $x = 0$, alors $b^0 = 1$.

Quand $x = -n$, où n est un entier strictement positif, alors $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$.

Quand x est un nombre rationnel, $x = \frac{p}{q}$ avec p et q des nombres entiers et $q > 0$, alors $b^x = b^{p/q} = \sqrt[q]{b^p} = (\sqrt[q]{b})^p$.

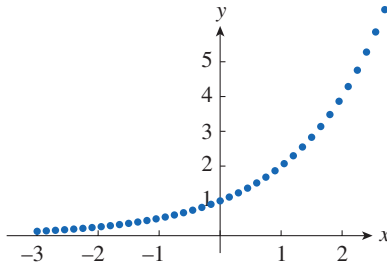


Figure 1.57
Représentation de $y = 2^x$,
pour x rationnel.

Pour achever la définition d'une fonction exponentielle, il reste à déterminer ce que signifie $y = b^x$ lorsque x est un nombre irrationnel. Que signifie, par exemple, $2^{\sqrt{3}}$ ou 5^π ? Et comment trouver la valeur de ces nombres ?

Pour nous aider à répondre à cette question, jetons d'abord un coup d'oeil au graphe de $y = 2^x$, où x est rationnel (voir figure 1.57). Nous voudrions étendre le domaine de définition de $f(x) = 2^x$ aux irrationnels.

Dans le graphe de la figure 1.57, il y a des trous qui correspondent aux valeurs irrationnelles de x . Nous voudrions boucher les trous en définissant $f(x) = 2^x$ pour tout x réel de sorte que f soit une fonction strictement croissante dont le graphe serait sans à-coup.

Prenons par exemple le nombre irrationnel $\sqrt{3}$.

Comme 1,7 et 1,8 sont des nombres rationnels, on peut calculer $2^{1,7}$ et $2^{1,8}$.

En utilisant de meilleures approximations de $\sqrt{3}$, il semble raisonnable d'obtenir une meilleure approximation de $2^{\sqrt{3}}$:

$$\begin{aligned} 1,73 < \sqrt{3} < 1,74 & \Rightarrow 2^{1,73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,74} \\ 1,733 < \sqrt{3} < 1,732 & \Rightarrow 2^{1,732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,733} \\ 1,7320 < \sqrt{3} < 1,7321 & \Rightarrow 2^{1,7320} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,7321} \\ 1,73205 < \sqrt{3} < 1,73206 & \Rightarrow 2^{1,73205} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,73206} \\ \vdots & \end{aligned}$$

Il est possible de démontrer qu'il n'y a qu'un seul nombre qui soit plus grand que tous les nombres

$$2^{1,7}, 2^{1,73}, 2^{1,732}, 2^{1,7320}, 2^{1,73205}, \dots$$

et plus petit que tous les nombres

$$2^{1,8}, 2^{1,74}, 2^{1,733}, 2^{1,7321}, 2^{1,73206}, \dots$$

Nous définissons $2^{\sqrt{3}}$ comme étant ce nombre unique. Grâce au procédé d'approximation précédent, nous pouvons le calculer avec 6 décimales correctes :

$$2^{\sqrt{3}} \approx 3,321997$$

De même, nous pouvons définir 2^x (ou b^x , pour $b > 0$) de la même façon pour d'autres valeurs irrationnelles de x . La figure 1.58 montre comment les points de la figure 1.57 ont été reliés jusqu'à former le graphe de la fonction $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

La figure 1.59 présente les graphes de quelques-unes des fonctions de la famille des fonctions $y = b^x$, pour différentes valeurs de la base b . Il est à noter que toutes ces fonctions passent par le point $(0,1)$ puisque $b^0 = 1$, quel que soit $b \neq 0$ et aussi que, plus la base b est grande, plus la fonction exponentielle croît rapidement (pour $x > 0$).

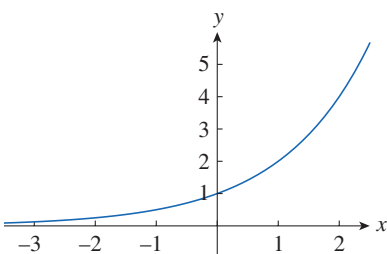
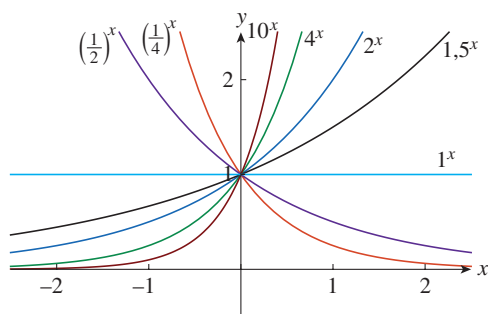


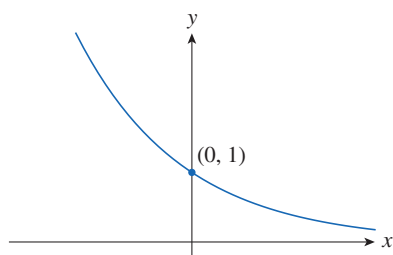
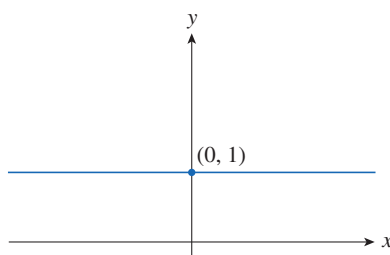
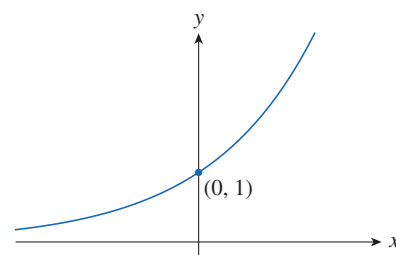
Figure 1.58
Un graphe complet de $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Figure 1.59

Quand $0 < b < 1$, b^x s'approche de 0 lorsque x devient grand. Quand $b > 1$, b^x s'approche de 0 à mesure que x diminue dans les négatifs. Dans les deux cas, l'axe Ox est une asymptote horizontale.



Au vu de la figure 1.59, il y a essentiellement trois types de fonctions exponentielles de la forme $y = b^x$. Quand $0 < b < 1$, la fonction exponentielle est strictement décroissante ; quand $b = 1$, elle est constante ; et quand $b > 1$, elle croît strictement. Ces trois situations sont illustrées séparément à la figure 1.60. On y voit que le domaine de définition de $y = b^x$ ($b \neq 1$) est $\mathbb{R}$ et que l'ensemble image est $]0, +\infty[$. On remarque encore que les courbes représentatives de $y = b^x$ et de $y = (1/b)^x$ sont symétriques par rapport à l'axe Oy . C'est dû au fait que $(1/b)^x = 1/b^x = b^{-x}$.

a) Graphe de $y = b^x$, $0 < b < 1$ b) Graphe de $y = 1^x$ c) Graphe de $y = b^x$, $b > 1$ **Figure 1.60**

Graphes des trois types de fonctions exponentielles.

La fonction exponentielle est importante, entre autres, à cause des propriétés ci-après. Si ces règles de calcul sont bien connues pour des exposants x et y rationnels, elles restent valables (et ce serait à démontrer) dans le cas où les exposants x et y sont des nombres réels quelconques.

Propriétés algébriques des exposants

Soit a et b des nombres strictement positifs et x et y , des nombres réels quelconques.

$$1. b^{x+y} = b^x b^y \quad 2. b^{x-y} = \frac{b^x}{b^y} \quad 3. (b^x)^y = b^{xy} \quad 4. (ab)^x = a^x b^x$$

Exemple 1 Graphe, domaine de définition et ensemble image

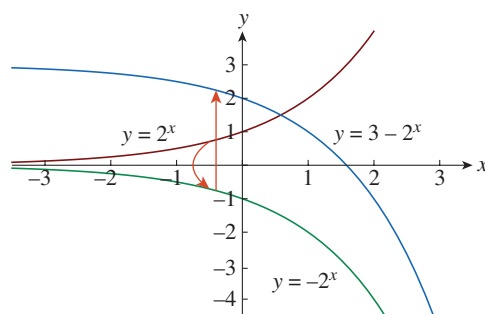
Esquisser le graphe de $y = 3 - 2^x$ et déterminer son domaine de définition et son ensemble image.

Solution

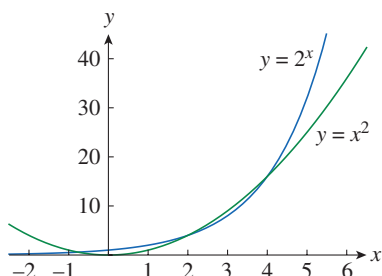
Nous prenons la courbe $y = 2^x$ et lui appliquons des transformations :

d'abord l'image par symétrie par rapport à l'axe Ox pour obtenir la courbe $y = -2^x$, ensuite, une translation de 3 unités vers le haut afin d'arriver à la courbe d'équation $y = 3 - 2^x$. Voir figure 1.61.

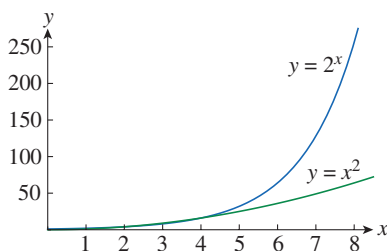
Le domaine de définition est $\mathbb{R}$: cette fonction peut être calculée en n'importe quelle nombre réel.

**Figure 1.61**

Graphes de $y = 3 - 2^x$ obtenu par transformations.

**Figure 1.62**

Les graphes de $f(x) = 2^x$ et $g(x) = x^2$ se coupent en trois points.

**Figure 1.63**

La fonction exponentielle $f(x) = 2^x$ croît beaucoup plus vite que la fonction puissance $g(x) = x^2$.

Année	Population (millions)	Année	Population (millions)
1900	1650	1970	3710
1910	1750	1980	4450
1920	1860	1990	5280
1930	2070	2000	6080
1940	2300	2010	6870
1950	2560	2020	7755
1960	3040		

Table 1.3

Table de la population mondiale.

L'ensemble image est $] -\infty, 3[$: quand x décroît sans borne, y s'approche de 3 et quand x croît sans borne, y décroît sans borne.

Exemple 2 Comparaison entre fonction exponentielle et puissance

Comparer la fonction exponentielle $y = 2^x$ et la fonction puissance $y = x^2$. Laquelle de ces deux fonctions croît le plus rapidement avec x ?

Solution

La figure 1.62 montre les courbes représentatives de ces deux fonctions. Elles semblent se couper trois fois.

À partir de $x > 4$, la courbe de $f(x) = 2^x$ est au-dessus de celle de $g(x) = x^2$. La figure 1.63 donne une vue plus globale et fait voir, sans doute possible, que pour de grandes valeurs de x la fonction exponentielle $f(x) = 2^x$ croît considérablement plus vite que la fonction puissance $g(x) = x^2$.

■ Applications des fonctions exponentielles

La fonction exponentielle intervient fréquemment dans les modèles mathématiques en sciences naturelles ou en sciences humaines. Ici, nous ne ferons qu'indiquer brièvement comment elle intervient dans la description de la croissance d'une population et de la désintégration radioactive. Dans les chapitres ultérieurs, nous étudierons ces exemples plus en détail ainsi que d'autres applications.

Voici un exemple de modèle exponentiel. Nous envisageons une population de bactéries évoluant dans un milieu homogène quant à la nourriture. Le comptage des bactéries, effectué par échantillonnage à des intervalles de temps régulier, révèle que la population double toutes les heures. Si le nombre de bactéries au temps t est $p(t)$, où t est mesuré en heure, et si la population initiale est $p(0) = 1000$, alors

$$p(1) = 2p(0) = 2 \times 1000$$

$$p(2) = 2p(1) = 2^2 \times 1000$$

$$p(3) = 2p(2) = 2^3 \times 1000$$

De ce schéma, il semble qu'on puisse dire que, en général,

$$p(t) = 2^t \times 1000$$

L'effectif de cette population est un multiple constant de la fonction exponentielle $y = 2^t$, ce qui laisse présager une croissance rapide comme celles vues précédemment. Sous des conditions idéales (espace illimité, nourriture suffisante et absence de maladie), cette croissance exponentielle est conforme à ce qui a réellement lieu dans la nature.

Et qu'en est-il de la population humaine ? La table 1.3 donne une estimation de cette population mondiale au 20^e siècle et la figure 1.64 donne le diagramme en points correspondant.

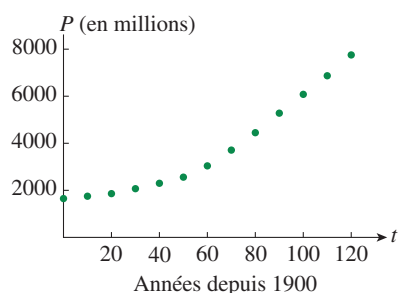
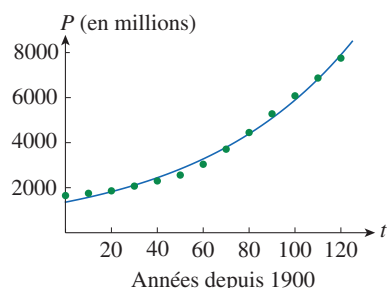
**Figure 1.64**

Diagramme de points de la population mondiale.

**Figure 1.65**

Graphique du modèle exponentiel de la croissance de la population mondiale et diagramme de points.

Jour	Hauteur (m)	Jour	Hauteur (m)
0	13,07	5	6,26
1	11,38	6	5,85
2	10,16	7	5,48
3	8,64	8	4,97
4	7,11	9	4,61

Table 1.4

Table des niveaux de la rivière.

La position des points de la figure 1.64 suggère une croissance exponentielle. À l'aide d'une calculatrice graphique pourvue d'un logiciel de régression exponentielle, nous appliquons la méthode des moindres carrés et obtenons le modèle exponentiel

$$P = (1358,03) \cdot (1,01478)^t$$

où $t = 0$ correspond à l'année 1900.

La figure 1.65 montre superposés cette fonction exponentielle et le graphique de points. L'ajustement est assez bon. La période de croissance relativement lente de la population s'explique par les deux guerres mondiales et la crise des années 1930.

Voici un exemple d'un autre type de modèle exponentiel. La table 1.4 reprend les hauteurs $h(t)$ de la rivière Susquehanna à Bloomsburg, Pennsylvanie, t jours après d'importantes précipitations en novembre 2019 (U.S. Geological Survey).

La figure 1.66 reproduit ces données sous forme de diagramme de points.

La baisse rapide du niveau de l'eau et sa stabilisation visibles dans le diagramme de points suggère un modèle exponentiel $y = b^x$ avec $b < 1$. L'ajustement selon la méthode des moindres carrés mène à

$$h = (12,8626) \cdot (0,880114)^t$$

La figure 1.67 montre, superposés, le modèle et les points des données d'origine. Ce modèle s'ajuste particulièrement bien à ce phénomène de crue.

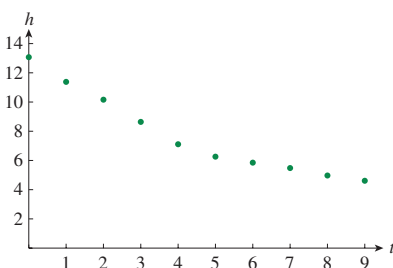
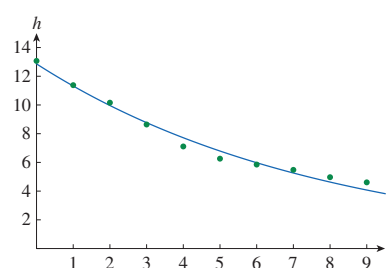
**Figure 1.66**

Diagramme de points des données sur la crue de la rivière.

**Figure 1.67**

Graphique du modèle exponentiel des niveaux de la rivière et diagramme de points des données observées.

Notez qu'il serait possible d'utiliser le graphe de la figure 1.67 (et le modèle exponentiel) pour estimer la **demi-vie** de h , c'est-à-dire le temps qu'il faudrait pour que le niveau revienne à la moitié de sa valeur initiale. Dans l'exemple suivant, on nous donne la demi-vie d'une substance radioactive et nous allons trouver la masse d'un échantillon à tout moment.

Exemple 3 Demi-vie et décomposition exponentielle

La *demi-vie* du strontium-90, ^{90}Sr , est de 25 ans. Cela veut dire que la moitié de n'importe quelle quantité de ^{90}Sr se sera désintégrée au bout de 25 ans.

- Chercher une expression de la masse $m(t)$ après t années d'une masse de 24 mg de ^{90}Sr .
- Calculer au milligramme près ce qui en restera après 40 ans.
- Faire le graphe de $m(t)$ et estimer le temps nécessaire pour qu'il ne reste que 5 mg.

Solution

- a) La masse initiale est de 24 mg et est réduite de moitié à la fin de chaque période de 25 ans. Par conséquent

$$m(0) = 24$$

$$m(25) = \frac{1}{2}(24)$$

$$m(50) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(24) = \frac{1}{2^2}(24)$$

$$m(75) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2}(24) = \frac{1}{2^3}(24)$$

$$m(100) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3}(24) = \frac{1}{2^4}(24)$$

La structure de ces quelques lignes nous permet de dégager que la masse résiduelle après t années est donnée par la formule

$$m(t) = \frac{1}{2^{t/25}}(24) = 24 \cdot 2^{-t/25} = 24 \cdot (2^{-1/25})^t.$$

C'est une fonction exponentielle de base $b = 2^{-1/25} = \frac{1}{2^{1/25}}$.

- b) Après 40 ans, il restera

$$m(40) = 24 \cdot 2^{-40/25} \approx 7,9 \text{ mg.}$$

- c) La figure 1.68 montre la courbe représentative de la fonction $m(t) = 24 \cdot 2^{-t/25}$ et de la droite $m = 5$.

Pour trouver le moment où la masse est réduite à 5 mg, il faut résoudre l'équation $m(t) = 5$ par rapport à t . Graphiquement, cela revient à situer la valeur de t en laquelle la courbe et la droite se coupent. Selon le graphe de la figure 1.68, cela semble se produire aux environs de $t \approx 57,576$. C'est donc au terme de 57 années qu'il ne restera qu'5 mg. ■

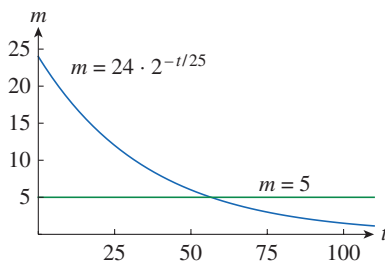


Figure 1.68

Graphe du modèle exponentiel et de la droite $m = 5$.

■ Le nombre e

De toutes les bases possibles pour la fonction exponentielle, il y en a une qui convient particulièrement au calcul différentiel et intégral. Le choix de la base b a quelque chose à voir avec la façon dont la courbe $y = b^x$ traverse l'axe Oy . Les figures 1.71 et 1.72 attirent l'attention sur la tangente aux courbes $y = 2^x$ et $y = 3^x$ au point $(0, 1)$ (la notion de droite tangente sera définie avec soin plus tard). Pour le moment, il suffit de voir la tangente à la courbe exponentielle en un point comme une droite qui ne touche la courbe qu'en ce point et qui a la même *direction* que la courbe. Si nous mesurons les pentes m de ces tangentes en $(0, 1)$, nous trouvons $m \approx 0,7$ pour $y = 2^x$ et $m \approx 1,1$ pour $y = 3^x$.

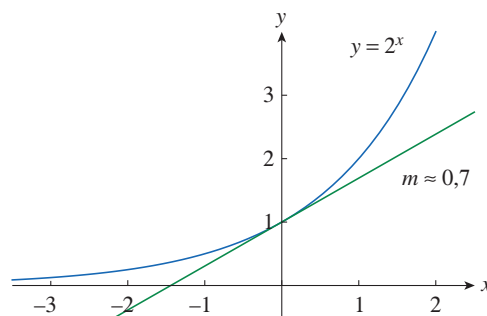


Figure 1.69

Graphe de $y = 2^x$ et de la tangente à la courbe en $(0, 1)$.

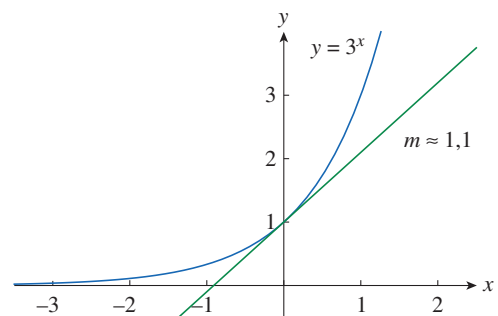


Figure 1.70

Graphe de $y = 3^x$ et de la tangente à la courbe en $(0, 1)$.

C'est la notation qu'a choisie le mathématicien suisse Leonhard Euler en 1727.

Ces graphes suggèrent, et il semble raisonnable de le conjecturer, qu'il existe une base b strictement comprise entre 2 et 3 telle que la pente de la tangente à la courbe $y = b^x$ au point $(0, 1)$ est exactement égale à 1. Ce nombre existe vraiment et est noté e . Voir la figure 1.71. Sa valeur à 5 décimales correctes est $e \approx 2,71828$ et la courbe $y = e^x$ est située entre celles de $y = 2^x$ et $y = 3^x$. Voir la figure 1.72. La fonction $f(x) = e^x$ est appelée **fonction exponentielle naturelle**.

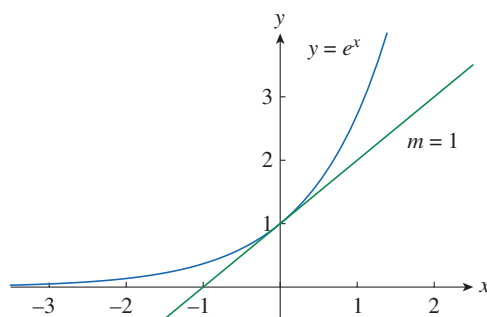


Figure 1.71
Graphe de $y = e^x$ et de la tangente en $(0, 1)$.

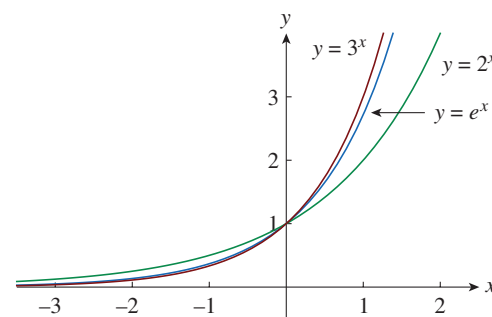


Figure 1.72
Graphe de $y = 2^x$, $y = e^x$ et $y = 3^x$.

Exemple 4 Graphe, domaine de définition, ensemble image et e

Quelle est la courbe représentative de la fonction $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$ et quel est le domaine de définition, l'ensemble image de cette fonction ?

Solution

Nous prenons la courbe $y = e^x$ et lui appliquons des transformations :

d'abord l'image par symétrie par rapport à l'axe Oy pour obtenir la courbe $y = e^{-x}$,
ensuite, une compression verticale de facteur 2 pour obtenir le graphe de $y = \frac{1}{2}e^{-x}$,

enfin, une translation d'une unité vers le bas pour arriver au graphe voulu de $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$.
La figure 1.73 retrace ces transformations.

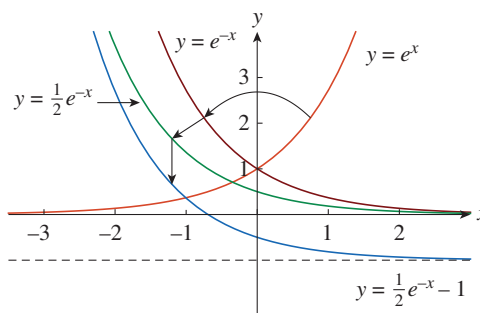


Figure 1.73
Le graphe de $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$ obtenu par transformations du graphe de $y = e^x$.

Le domaine de définition est $\mathbb{R}$; on peut donc calculer la fonction en n'importe quel nombre réel.

L'ensemble image est $] -1, +\infty[$: lorsque x croît sans borne, y s'approche de -1 et quand x décroît sans borne, y croît sans borne. ■

1.4 Exercices

Utilisez les propriétés algébriques des exposants pour réécrire et simplifier l'expression.

1. a) $\frac{4^{-3}}{2^{-8}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$
2. a) $8^{4/3}$ b) $x(3x^2)^3$
3. a) $b^8(2b)^4$ b) $\frac{(6y^3)^4}{2y^5}$
4. a) $5^{3-2\sqrt{7}} \cdot 25^{-1+\sqrt{7}}$ b) $\frac{4^{n-2} \cdot 8^{2-n}}{16^{2-n}}$
5. a) $(20)^{1/2} + 5^{3/2}$ b) $8^{1/2} + 2^{3/2}$
6. a) $(3^{x+1})(9^{2x})$ b) $\frac{3^{1/3}}{3^{-2/3}}$
7. a) $\frac{x^{2n} \cdot x^{3n-1}}{x^{n+2}}$ b) $\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt[3]{ab}}$

8. Situez chacun des nombres suivants dans un intervalle $[a, b]$ où a et b sont deux nombres entiers consécutifs.

- a) $2^{\sqrt{5}}$ b) $3^{\sqrt{2}}$ c) $4^{1.6}$ d) $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

9. a) Écrivez une équation qui définit la fonction exponentielle de base $b > 0$.
 b) Quel est le domaine de définition de cette fonction ?
 c) Si $b \neq 1$, quel est l'ensemble image de cette fonction ?
 d) Tracez l'allure générale du graphe de la fonction exponentielle dans chacun des cas suivants.
 i) $b > 1$ (ii) $b = 1$ (iii) $0 < b < 1$

10. a) Expliquez comment est défini le nombre e ?
 b) Combien vaut à peu près e ?
 c) Qu'entend-on par fonction exponentielle naturelle ?

Utilisez une calculatrice graphique pour faire apparaître dans un même repère les fonctions données. Quels liens ont-elles entre elles ?

11. $y = 2^x$, $y = e^x$, $y = 5^x$, $y = 20^x$

12. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = 8^x$, $y = 8^{-x}$

13. $y = 3^x$, $y = 10^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

14. $y = 0,9^x$, $y = 0,6^x$, $y = 0,3^x$, $y = 0,1^x$

Dessinez le graphe de chaque fonction en utilisant les transformations de graphes.

15. $y = 4^x - 1$

16. $y = (0,5)^{x-1}$

17. $y = -2^{-x}$

18. $y = e^{|x|}$

19. $y = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$

20. $y = 2(1 - e^x)$

21. $y = -2^{-|x|} + 1$

22. $y = |-e^x + 2|$

23. Quelle est l'équation de la courbe qui résulte des opérations suivantes appliquées à la courbe initiale $y = e^x$?

- a) translation de 2 unités vers le bas.
- b) translation de 2 unités vers la droite.
- c) symétrie par rapport à l'axe Ox .
- d) symétrie par rapport à l'axe Oy .
- e) réflexion par rapport à l'axe Ox suivi d'une réflexion par rapport à l'axe Oy .

24. Quelle est l'équation de la courbe qui résulte des opérations suivantes appliquées à la courbe initiale $y = e^{-x}$?

- a) réflexion par rapport à la droite $y = 4$.
- b) réflexion par rapport à la droite $x = 2$.

Déterminez le domaine de définition de chaque fonction.

25. $f(x) = \frac{1 - e^{x^2}}{1 - e^{1-x^2}}$

26. $f(x) = \frac{1 + x}{e^{\cos x}}$

27. $g(t) = \sqrt{10^t - 100}$

28. $g(t) = \sin(e^t - 1)$

Résolvez l'équation par rapport à x .

29. $9^x = \left(\frac{1}{27}\right)^{x-2}$

30. $(\sqrt{2})^{2x-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+5}$

31. $8^x = (\sqrt{2})^{2x^2+4}$

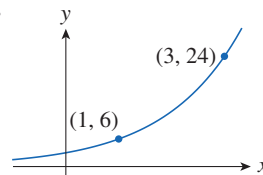
32. $(5^{3x})^2 = (5^x)^3 \cdot 5^{x+6}$

33. $3^{1/x} = 27^{x^2}$

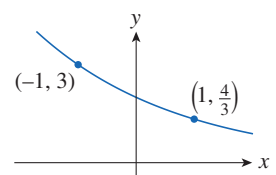
34. $4^{x+4} - 4^{x+3} = 96$

Déterminez la fonction exponentielle $f(x) = Cb^x$ dont voici le graphe.

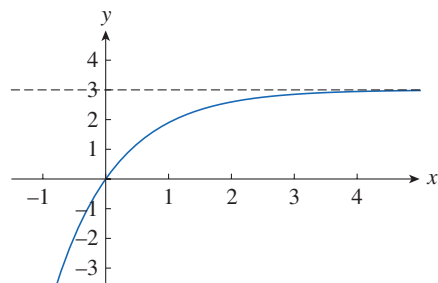
35.



36.



37. Déterminez la fonction exponentielle $f(x) = Cb^x$ dont le graphe est donné.



38. Tracez dans le même repère de coordonnées les courbes représentatives de $y = 2^x$ et $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Expliquez la relation entre elles.

39. Tracez le graphe de $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$. À l'aide de ce graphe, expliquez le comportement de f lorsque x croît sans borne.

40. Soit $f(x) = 5^x$. Montrez que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 5^x \left(\frac{5^h - 1}{h} \right)$$

41. On vous offre un poste de travail qui ne dure qu'un mois. Entre les deux modes de paiement suivants, lequel préférez-vous ?

- I. Un million d'euros à la fin du mois.
- II. Un centime le premier jour, deux centimes le deuxième jour, quatre centimes le troisième jour et ainsi de suite, c'est-à-dire 2^{n-1} centimes le $n^{\text{ième}}$ jour.

42. Supposez que les graphes de $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2^x$ soient dessinés dans un système de coordonnées où l'unité est le centimètre. Montrez qu'à 10 cm à droite de l'origine, le point du graphe de f est à 1 m de haut tandis que celui de g est à plus de 10 m de haut.

43. Comparez, grâce à un logiciel graphique, les fonctions $f(x) = x^5$ et $g(x) = 5^x$ en les faisant apparaître dans un même système d'axes. Localisez tous les points d'intersection de ces deux graphes avec une précision de 3 décimales. Laquelle de ces deux fonctions croît plus rapidement avec x ?

44. Grâce à un logiciel graphique, faites apparaître les graphes des fonctions $f(x) = x^{10}$ et $g(x) = e^x$ dans un même repère. Quand le graphe de g réussit-il à surpasser celui de f ?

45. Estimez la valeur de x telle que $e^x > 1\,000\,000\,000$.

46. Une façon de juger de la valeur d'un investissement est de calculer le temps qu'il met pour doubler de valeur.

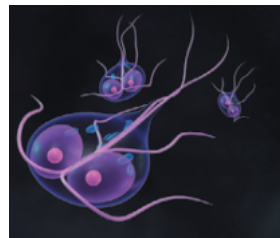
- a) Au cas où l'argent est investi à taux fixe constant, une méthode (appelée règle de 72) consiste à diviser 72 par le taux d'intérêt. Selon cette règle, combien de temps faudra-t-il pour doubler votre mise si l'intérêt est de 10%, 5% ou 2%.
- b) Une autre méthode pour déterminer le nombre d'années requises pour doubler l'investissement initial est de repérer approximativement le point d'intersection des graphes de $y = 0,95 e^{rt}$ et $y = 2$. Utilisez des moyens techniques pour obtenir une valeur approximative si l'intérêt est de 10%, 5% ou 2%.

47. Un chercheur aimerait connaître le temps de doublement d'une population de bactéries *Giardia lamblia*. Il démarre une culture dans une solution nutritive et compte les bactéries toutes les 4 heures.

- a) Construisez un diagramme de points à partir des données de la table.

Temps (en h)	0	4	8	12	16	20	24
Nombre de bactéries	37	47	63	78	105	130	173

- b) À l'aide de moyens techniques, cherchez une fonction exponentielle $f(x) = a \cdot b^t$ qui modélise la population de bactéries après t heures.
- c) À l'aide de moyens techniques, déterminez combien de temps il faudra pour que la population de bactéries double.



G. lamblia

Sebastian Kaulitzki/Shutterstock.com

48. Une culture de bactéries se met en route avec 500 bactéries et cet effectif double toutes les heures.

- a) Combien y a-t-il de bactéries après 3 heures ?
- b) Combien y a-t-il de bactéries après t heures ?
- c) Combien y a-t-il de bactéries après 40 minutes ?
- d) Faites un graphe de l'évolution de cette population en fonction du temps et estimez le temps qu'il faudra pour que l'effectif de cette population atteigne 100 000 unités.

49. Le bismuth 210, ^{210}Bi , a une demi-vie de 5 jours.

- a) Que reste-t-il d'un échantillon de 200 mg après 15 jours ?
- b) Que reste-t-il après t jours ?
- c) Estimez la quantité restante après 3 semaines.
- d) Utilisez une représentation graphique pour estimer après combien de temps il ne restera que 1 mg.

50. Un isotope de sodium, le ^{24}Na , a une demi-vie de 15 heures. D'un échantillon de cet isotope de 2 g.

- a) Combien en reste-t-il après 60 heures ?
- b) Combien en reste-t-il après t heures ?
- c) Estimez ce qu'il en reste après 4 jours.
- d) Sur la base d'un graphe, estimez le temps qu'il faut pour qu'il n'en reste que 0,01 g.

51. Utilisez le modèle exponentiel du niveau de la rivière $h = (12,8626) \cdot (0,880114)^t$ pour estimer quand la rivière sera revenue à la moitié de son niveau original.

52. Après que l'alcool consommé a été complètement absorbé dans le corps, il est métabolisé avec une demi-vie d'environ 1,5 heure. Supposez que vous ayez consommé trois boissons alcoolisées et qu'une heure plus tard, à minuit, votre concentration d'alcool dans le sang est de 0,6 mg/mL.

- a) Construisez un modèle exponentiel décroissant de cette concentration en fonction du nombre d'heures après minuit.
- b) Faites une représentation graphique de votre modèle et estimez à quel moment la concentration sera à 0,08 mg/mL.

Source : Adapté de P. Wilkinson et al., "Pharmacokinetics of Ethanol after Oral Administration in the Fasting State," *Journal of Pharmacokinetics et Biopharmaceutics* 5 (1977): 207–24.

53. Les données de la table 1.3 sur la population mondiale depuis les années 1900 ont permis d'établir le modèle $P = (1358,03) \times (1,01478)^t$. Utilisez ce modèle pour estimer la population mondiale en 1997 et en 2022.
54. Voici une table de la population des États-Unis, en millions d'habitants, entre 1900 et 2020.

année	population	année	population
1900	76	1970	203
1910	92	1980	227
1920	106	1990	250
1930	123	2000	281
1940	131	2010	310
1950	150	2020	331
1960	179		

Utilisez une calculatrice graphique munie d'un logiciel de régression exponentielle pour modéliser cette population depuis 1900. D'après votre modèle, quel était l'effectif de la population en 1925 et quel sera-t-il en 2025 ?

55. Tracez le graphe de la fonction

$$f(x) = \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$$

Pensez-vous que la fonction soit paire ou impaire, ou aucun des deux ? Justifiez votre réponse.

56. Faites apparaître le graphe de quelques fonctions de la famille

$$f(x) = \frac{1}{1 + ae^{bx}}$$

où $a > 0$. Décrivez les changements dans le graphe lorsque b varie. Décrivez les changements dans le graphe lorsque a varie.

1.5 Fonction réciproque et fonction logarithme

■ Fonction réciproque

Après avoir présenté le concept général de fonction réciproque, cette section définit une fonction logarithme, la réciproque d'une exponentielle.

La table 1.5 énumère les données expérimentales d'une culture de bactéries dont l'effectif initial était 100 dans un milieu où la nourriture était limitée ; la taille de la population a été mesurée chaque heure. Le nombre N de bactéries est une fonction du temps : $N = f(t)$.

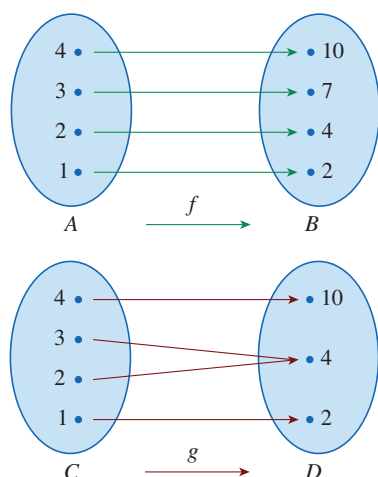
Mais voilà que le biologiste change de point de vue et souhaite connaître le moment où la population atteindra certains niveaux qu'il s'est fixé. En d'autres mots, il raisonne sur t comme fonction de N . Cette fonction est appelée la *fonction réciproque* de f , est notée f^{-1} et se lit *fonction réciproque* de f . Donc, $t = f^{-1}(N)$ est le temps requis pour que la population atteigne le niveau N . Les valeurs de f^{-1} s'obtiennent soit en lisant la table de droite à gauche, soit en consultant la table 1.6. Par exemple, $f^{-1}(550) = 6$ car $f(6) = 550$.

t (en h)	$N = f(t)$ = population au temps t
0	100
1	168
2	259
3	358
4	445
5	509
6	550
7	573
8	586

Table 1.5
 N en fonction de t .

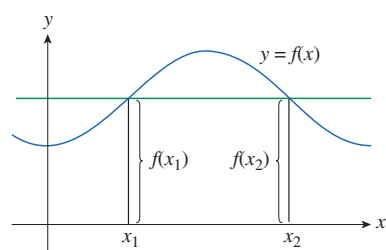
N	$t = f^{-1}(N)$ = temps pour N bactéries
100	0
168	1
259	2
358	3
445	4
509	5
550	6
573	7
586	8

Table 1.6
 t en fonction de N .

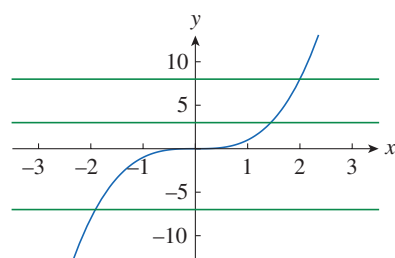
**Figure 1.74**

f est injective ; g ne l'est pas.

En termes d'entrée et sortie, la définition dit que f est injective lorsque chaque entrée correspond à une seule sortie.

**Figure 1.75**

Cette fonction n'est pas injective car $f(x_1) = f(x_2)$.

**Figure 1.76**

$f(x) = x^3$ est injective. En limitant son domaine de définition à l'ensemble des réels positifs, on pourrait rendre cette fonction injective

Toutes les fonctions n'ont pas une fonction réciproque. Comparons les fonctions f et g dont voici les diagrammes sagittaux à la figure 1.74. On remarque que f ne prend jamais deux fois la même valeur (deux entrées différentes quelconques conduisent à des sorties différentes), alors que g prend deux fois la même valeur (2 et 3 ont tous les deux la même image 4). Avec les symboles des fonctions, cela s'écrit $g(2) = g(3)$, alors que

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{dès que} \quad x_1 \neq x_2$$

Les fonctions qui jouissent de cette dernière propriété sont dites *injectives*.

Définition • Fonction injective

Une fonction est dite **injective** si elle ne prend jamais deux fois la même valeur ; autrement dit

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{dès que} \quad x_1 \neq x_2$$

L'examen du graphe d'une fonction f permet de voir si elle est injective. Si une droite horizontale le coupe en plus d'un point, comme sur la figure 1.75, c'est que les nombres x_1 et x_2 sont tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Il s'ensuit que f n'est pas injective.

Nous disposons donc d'un test géométrique pour savoir si une fonction est injective ou non.

Test de la droite horizontale

Une fonction est injective si et seulement si aucune droite horizontale ne traverse son graphe plus d'une fois.

Pour démontrer qu'une fonction est injective, autrement que par le test graphique, on emploie habituellement l'énoncé contraposé équivalent à la définition, à savoir, si $f(x_1) = f(x_2)$, alors $x_1 = x_2$.

Exemple 1 Fonction injective

La fonction $f(x) = x^3$ est-elle injective ?

Solution

La figure 1.76 montre le graphe de f et plusieurs droites horizontales.

Selon le test de la droite horizontale, il semble évident que f est injective.

Montrons-le analytiquement:

Supposons $f(x_1) = x_1^3 = x_2^3 = f(x_2)$.

Alors, $x_1 = x_2$. (On prend la racine cubique de chaque membre de $x_1^3 = x_2^3$.)

On peut donc conclure que f est injective. ■

Exemple 2 Fonction non injective

La fonction $g(x) = x^2$ est-elle injective ?

Solution

La figure 1.77 montre le graphe de f ainsi que deux droites horizontales qui coupent le graphe de g plus d'une fois.

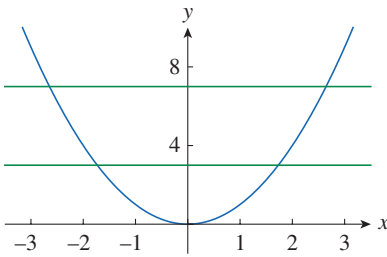


Figure 1.77

$g(x) = x^2$ n'est pas injective.
En limitant son domaine de définition à l'ensemble des réels positifs, on pourrait rendre cette fonction injective.

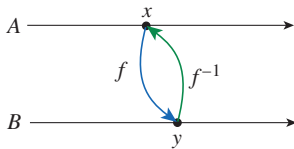


Figure 1.78

Diagramme sagittal pour montrer l'effet de f^{-1} .

Selon le test de la droite horizontale, la fonction n'est pas injective.

Analytiquement, il n'est pas difficile de trouver deux valeurs différentes dans le domaine de définition de g qui ont la même image.

Par exemple, $g(-1) = 1 = g(1)$. ■

Les fonctions injectives sont importantes car ce sont justement celles qui ont une fonction réciproque d'après la définition formelle suivante.

Définition • Fonction réciproque

Soit f une fonction injective de domaine de définition A et d'ensemble image B . Alors, sa **fonction réciproque** a B comme domaine de définition et A comme ensemble image et est définie par

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

quel que soit y dans B .

Cette définition dit que si f envoie x sur y , f^{-1} renvoie y sur x . (Si f n'était pas injective, f^{-1} ne serait pas univoquement définie.)

Le diagramme sagittal de la figure 1.78 est là pour mettre en évidence que f^{-1} a l'effet inverse de celui de f . Il est à noter que

$$\text{domaine de définition de } f^{-1} = \text{ensemble image de } f$$

$$\text{ensemble image de } f^{-1} = \text{domaine de définition de } f$$

Par exemple, la fonction réciproque de $f(x) = x^3$ est $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ parce que, si $y = x^3$, alors

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$

ATTENTION : Ne commettez pas l'erreur de prendre -1 dans f^{-1} comme un exposant.

$$f^{-1}(x) \text{ ne signifie pas } \frac{1}{f(x)}$$

Cela n'empêche pas d'écrire $\frac{1}{f(x)}$ sous la forme $[f(x)]^{-1}$.

Exemple 3 Calculer les valeurs d'une fonction réciproque

Si $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ et $f(8) = -10$, calculez $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(5)$ et $f^{-1}(-10)$.

Solution

Selon la définition de f^{-1} ,

$$f^{-1}(7) = 3 \text{ parce que } f(3) = 7$$

$$f^{-1}(5) = 1 \text{ parce que } f(1) = 5$$

$$f^{-1}(-10) = 8 \text{ parce que } f(8) = -10$$

Le diagramme de la figure 1.79 rend manifeste que f^{-1} a l'effet contraire de celui de f . ■

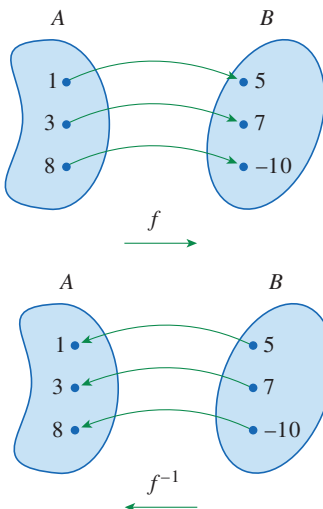
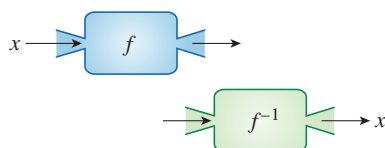


Figure 1.79

La fonction réciproque intervertit entrée et sortie.

Comme la lettre x est généralement réservée à la variable indépendante, il est normal, quand nous parlons plus spécialement de f^{-1} , d'intervertir les lettres x et y dans la définition précédente et d'écrire

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \quad (1)$$

**Figure 1.80**

Tout ce que fait f , f^{-1} le défait.

Dans les notations conventionnelles, nous arrivons aux **équations d'annulation** suivantes :

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{pour tout } x \text{ dans } A \quad (2)$$

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{pour tout } x \text{ dans } B$$

La première équation d'annulation dit que si nous partons de x , lui appliquons f , puis appliquons f^{-1} au résultat, nous revenons à x d'où nous étions parti (voir le diagramme sous forme de machine de la figure 1.80). En quelque sorte, f^{-1} défait ce qu'a fait f . La deuxième de ces équations dit que f défait ce que f^{-1} fait.

Par exemple, si $f(x) = x^3$, alors $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ et les équations d'annulation deviennent

$$f^{-1}(f(x)) = (x^3)^{1/3} = x$$

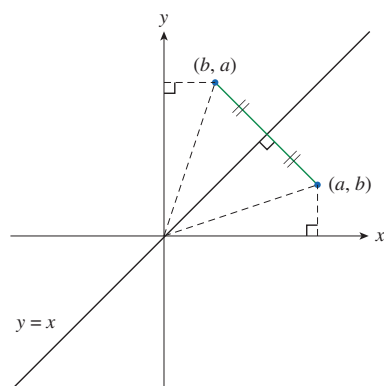
$$f(f^{-1}(x)) = (x^{1/3})^3 = x$$

Ces équations expriment simplement que les fonctions puissance 3 et racine cubique s'annulent l'une l'autre quand elles sont appliquées à la suite l'une de l'autre.

La méthode pour obtenir la formule de la fonction réciproque d'une fonction donnée est très précise. Si nous avons une fonction $y = f(x)$ et que nous pouvons résoudre cette équation par rapport à x , alors, en accord avec la définition de fonction réciproque, nous devons avoir $x = f^{-1}(y)$. Si maintenant, nous voulons désigner la variable indépendante par la lettre x , nous échangeons x et y et aboutissons à l'équation $y = f^{-1}(x)$.

Comment obtenir la fonction réciproque d'une fonction injective f

- 1 Écrire $y = f(x)$.
- 2 Résoudre (si possible) l'équation en x .
- 3 Échanger x et y afin d'exprimer f^{-1} comme une fonction de x . L'équation finale est $y = f^{-1}(x)$.

**Figure 1.81**

Le point (b, a) est l'image du point (a, b) par une symétrie orthogonale d'axe $y = x$.

Exemple 4 Obtenir la fonction réciproque

Quelle est la fonction réciproque de $f(x) = x^3 + 2$?

Solution

Conformément à la méthode décrite, nous écrivons.

$$y = x^3 + 2$$

$$x^3 = y - 2$$

$$x = \sqrt[3]{y - 2}$$

$$y = \sqrt[3]{x - 2}$$

La fonction réciproque cherchée est $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$. ■

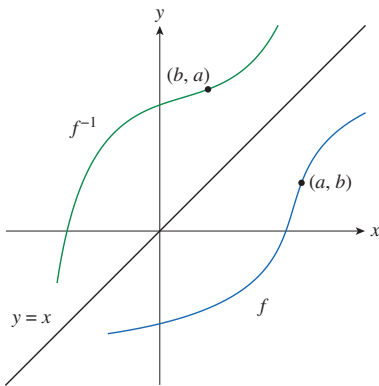
Le fait d'échanger x et y pour obtenir la fonction réciproque fournit aussi une méthode pour obtenir le graphe de f^{-1} à partir de celui de f . Puisque $f(a) = b$ si et seulement si $f^{-1}(b) = a$, le point (a, b) appartient au graphe de f si et seulement si le point (b, a) appartient au graphe de f^{-1} . Or, les points (b, a) et (a, b) sont symétriques par rapport à la droite $y = x$ (voir la figure 1.81). Dès lors, comme illustré à la figure 1.82 : le graphe de f^{-1} s'obtient en prenant l'image symétrique par rapport à la droite $y = x$ du graphe de f .

Écrire $y = f(x)$.

Isoler le ou les termes en x .

Exprimer x en fonction de y .

Échanger x et y .

**Figure 1.82**

Le graphe de f^{-1} est obtenu par réflexion du graphe de f par rapport à l'axe $y = x$.

Exemple 5 f^{-1} , domaine de définition, ensemble image

Soit $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$.

- Déterminer le domaine de définition et l'ensemble image de f .
- Chercher l'expression de f^{-1} et identifier son domaine de définition et son ensemble image f^{-1} .
- Dessiner les graphes de f et f^{-1} dans le même repère.

Solution

a) $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow$ domaine de définition de f : $[1, +\infty[$

$\sqrt{x-1} \in [0, +\infty[\Rightarrow f(x) = \sqrt{x-1} + 2 \in [2, +\infty[\Rightarrow$ ensemble image de f : $[2, +\infty[$

b) $y = \sqrt{x-1} + 2$

Poser $y = f(x)$.

$$y - 2 = \sqrt{x-1}$$

Soustraire 2 dans les deux membres.

$$(y - 2)^2 = x - 1$$

Élever au carré les deux membres.

$$x = (y - 2)^2 + 1$$

Résoudre par rapport à x .

$$y = (x - 2)^2 + 1$$

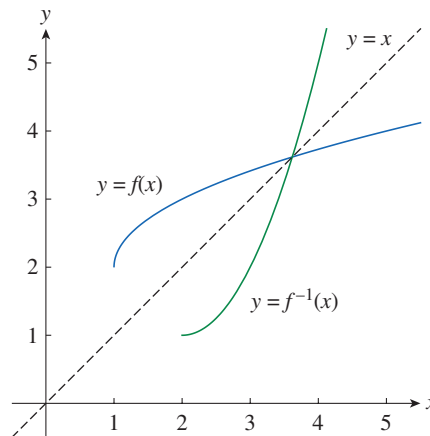
Intervertir x et y .

La fonction réciproque est $f^{-1}(x) = (x - 2)^2 + 1$.

Le domaine de définition de f^{-1} : $[2, +\infty[$ (ensemble image de f)

L'ensemble image de f^{-1} : $[1, +\infty[$ (domaine de définition de f)

- c) Graphe de f et f^{-1}



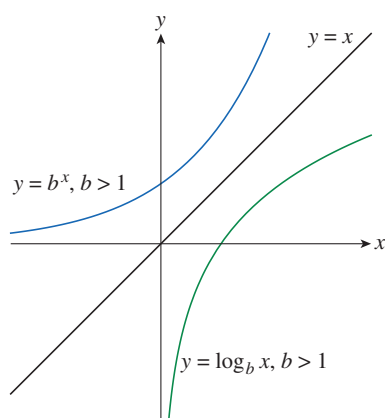
■ Fonction logarithme

Dans le cas où $b > 0$ et $b \neq 1$, la fonction exponentielle $f(x) = b^x$ est soit strictement croissante, soit strictement décroissante. Le test de la droite horizontale le suggère et on peut démontrer que f injective. Elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} , appelée **fonction logarithme de base b** , notée $\log_b$. En adoptant l'écriture d'une fonction réciproque

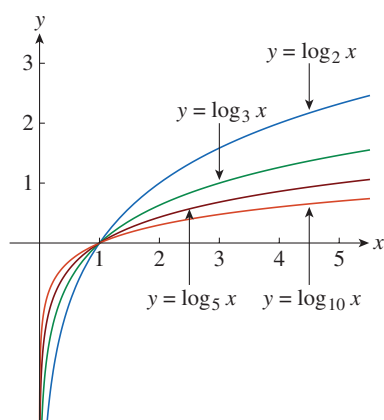
$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

nous avons ici

$$\log_b x = y \Leftrightarrow b^y = x \quad (3)$$

**Figure 1.83**

Le graphe de $y = \log_b x$ est l'image du graphe de $y = b^x$ par une symétrie orthogonale d'axe $y = x$.

**Figure 1.84**

Les graphes de plusieurs fonctions logarithmes.

Notation des logarithmes

La plupart des livres de calcul différentiel et intégral utilisent la notation $\ln x$ pour le logarithme naturel et $\log_{10} x$ pour le logarithme classique. Toutefois, dans la littérature scientifique plus avancée et en informatique, la notation $\log x$ désigne le logarithme naturel.

En mots, si $x > 0$ alors $\log_b x$ est l'exposant auquel il faut élever la base b pour obtenir x . Par exemple, $\log_{10} 0,001 = -3$ parce que $10^{-3} = 0,001$.

Les équations d'annulation appliquées aux fonctions $f(x) = b^x$ et $f^{-1}(x) = \log_b x$ s'écrivent ici

$$\log_b(b^x) = x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

$$b^{\log_b x} = x \quad \text{pour tout } x > 0$$

Le domaine de définition de la fonction logarithme $\log_b x$ est $]0, +\infty[$ et son ensemble image $\mathbb{R}$. Son graphe est l'image du graphe de $y = b^x$ par la symétrie orthogonale d'axe $y = x$. La figure 1.83 montre ce graphe dans le cas où $b > 1$.

Notez qu'à la rapide croissance de $y = b^x$ pour $x > 0$ correspond une croissance lente de $y = \log_b x$ pour $x > 1$.

La figure 1.84 présente les courbes de quelques fonctions logarithmes différentes par leur base $b > 1$. Comme $\log_b 1 = 0$ quelle que soit la base b , toutes ces courbes passent par le point $(1, 0)$.

Les propriétés des fonctions logarithmes, énumérées ci-après, découlent des propriétés correspondantes des fonctions exponentielles énoncées à la section 1.4.

Propriétés algébriques des logarithmes

Si x et y sont des nombres strictement positifs,

1. $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$
2. $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$
3. $\log_b(x^r) = r \log_b x$ (où r est un nombre réel quelconque)

Exemple 6 Les propriétés algébriques des fonctions logarithmes

Employer les propriétés algébriques ci-dessus pour calculer $\log_2 80 - \log_2 5$.

Solution

$$\begin{aligned} \log_2 80 - \log_2 5 &= \log_2 \left(\frac{80}{5} \right) \\ &= \log_2 16 = 4 \end{aligned}$$

Propriété algébrique 2.

$$2^4 = 16.$$

Le logarithme naturel

Parmi toutes les bases b possibles, le choix du nombre e tel que défini à la section 1.4, est particulièrement indiqué. Le logarithme dans cette base e s'appelle **logarithme naturel** ou **népérien** (du nom de Neper (1550-1617)) et reçoit une notation spéciale

$$\log_e x = \ln x$$

Si nous posons $b = e$ dans la formule (3), la propriété qui définit la fonction logarithme naturel devient

$$\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x \quad (5)$$

et les équations d'annulation,

$$\ln(e^x) = x \quad \text{pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R} \quad (6)$$

$$e^{\ln x} = x \quad \text{pour tout } x > 0$$

Dans le cas particulier $x = 1$, on a $\ln e = 1$.

Si la notation $\ln$ vous fait problème, remplacez-la par $\log_e$.
L'équation proposée est alors $\log_e x = 5$ et la solution, par définition du logarithme, $e^5 = x$.

Exemple 7 Équation avec $\ln$

Quelle valeur de x satisfait à l'équation $\ln x = 5$?

Solution 1

$$\ln x = 5 \text{ signifie } e^5 = x$$

Utiliser (5).

Donc, $x = e^5$.

Solution 2

$$\ln x = 5$$

$$e^{\ln x} = e^5$$

Appliquer la fonction exponentielle aux deux membres de l'équation.

$$x = e^5$$

Utiliser la deuxième équation d'annulation.

Exemple 8 Équation avec e

Résoudre l'équation $e^{5-3x} = 10$.

Solution

$$e^{5-3x} = 10$$

$$5 - 3x = \ln 10$$

Prendre le logarithme naturel des deux membres de l'équation.

$$3x = 5 - \ln 10$$

Réarranger les termes.

$$x = \frac{1}{3}(5 - \ln 10)$$

Diviser les deux membres par 3.

Note : Une calculatrice scientifique qui dispose de la touche $\ln$ donne la solution avec quelques décimales correctes : $x \approx 0,899$.

Exemple 9 Simplifier une expression logarithmique

Écrire avec un seul logarithme l'expression $\ln a + \frac{1}{2} \ln b$.

Solution

$$\ln a + \frac{1}{2} \ln b = \ln a + \ln b^{1/2}$$

Propriété 3 des logarithmes.

$$= \ln a + \ln \sqrt{b}$$

Écrire avec une racine carrée.

$$= \ln(a\sqrt{b})$$

Propriété 1 des logarithmes.

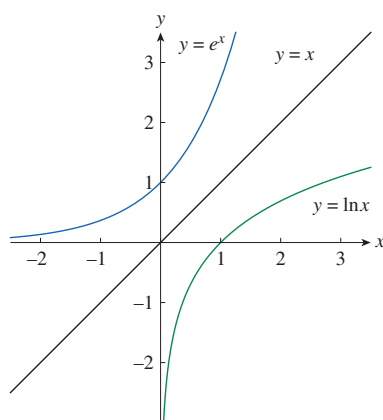
La formule suivante montre qu'un logarithme dans n'importe quelle base peut s'exprimer en fonction du logarithme naturel.

Formule de changement de base

Quel que soit b strictement positif ($b \neq 1$),

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b} \quad (7)$$

La formule de changement de base peut aussi être écrite avec les logarithmes en base 10. En calcul différentiel et intégral, il est préférable de l'écrire avec les logarithmes naturels.

**Figure 1.85**

Le graphe de $y = \ln x$ est l'image du graphe de $y = e^x$ par une symétrie orthogonale d'axe $y = x$.

Démonstration

Posons $y = \log_b x$

$$b^y = x$$

$$y \ln b = \ln x$$

$$y = \frac{\ln x}{\ln b}$$

Utiliser l'équation (5).

Prendre le logarithme naturel des deux membres.

Résoudre par rapport à y .

La formule (7) rend possible le calcul, avec une calculatrice scientifique qui a la touche $\ln$, de tous les logarithmes, quelle que soit leur base (voir l'exemple suivant). De plus, elle donne la clé pour faire dessiner le graphe de n'importe quelle fonction logarithme par une calculatrice graphique.

■ Graphe et croissance du logarithme naturel

La figure 1.85 reproduit les graphes de la fonction exponentielle $y = e^x$ et de sa réciproque $y = \ln x$. Puisque le point $(0, 1)$ appartient à la courbe $y = e^x$, le point $(1, 0)$ appartient à celle de $y = \ln x$.

La fonction logarithme naturel partage avec toutes les fonctions logarithmes de base supérieure à 1 la propriété d'être strictement croissante, d'être définie sur $]0, +\infty[$ et d'admettre l'axe Oy comme asymptote verticale. Ce qui veut dire que les valeurs de $\ln x$ deviennent très grandes négatives et décroissent sans borne lorsque x s'approche de 0.

Exemple 10 Graphe impliquant le logarithme naturel

Tracer le graphe de la fonction $y = \ln(x - 2) - 1$.

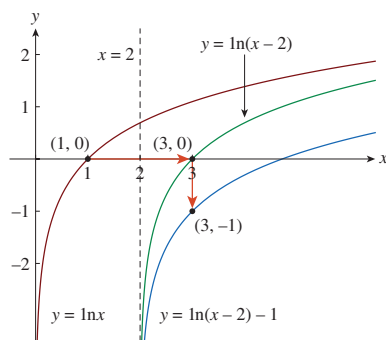
Solution

Ce graphe peut être obtenu par transformations du graphe de départ de $y = \ln x$.

Translation de 2 unités vers la droite pour produire le graphe de $y = \ln(x - 2)$.

Translation de 1 unité vers le bas pour produire le graphe de $y = \ln(x - 2) - 1$.

La figure 1.86 illustre cette succession de transformations.

**Figure 1.86**

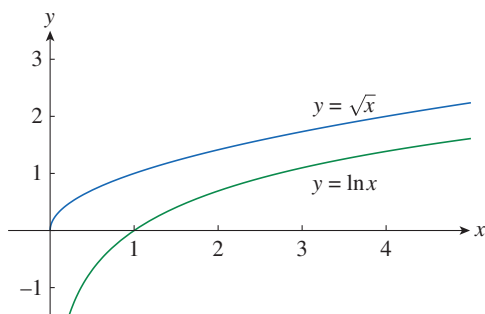
Le graphe de $y = \ln(x - 2) - 1$ obtained through transformations.

Bien que $\ln x$ soit une fonction strictement croissante, elle croît *très* lentement à partir de $x = 1$. En fait, elle croît plus lentement que n'importe quelle puissance positive de x . À titre d'illustration, comparons dans la table 1.7 les valeurs approximatives prises par les fonctions $y = \ln x$ et $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$. Elles sont consignées dans le tableau ci-dessous. Les graphes sont présentés dans les figures 1.87 et 1.88. Vous remarquerez qu'au début, la croissance des deux fonctions est comparable mais qu'à la longue la fonction racine l'emporte de loin sur la fonction logarithme.

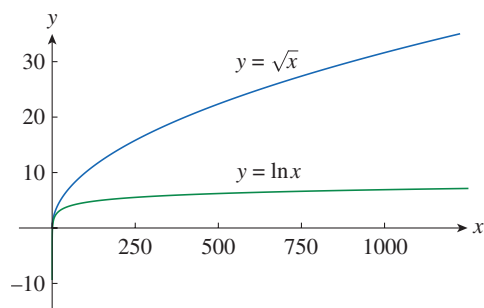
x	1	2	5	10	50	100	500	1000	10 000	100 000
$\ln x$	0	0,69	1,61	2,30	3,91	4,6	6,2	6,9	9,2	11,5
$\sqrt{x}$	1	1,41	2,24	3,16	7,07	10,0	22,4	31,6	100	316
$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$	0	0,49	0,72	0,73	0,55	0,46	0,28	0,22	0,09	0,04

Table 1.7

Table comparative des valeurs de $\ln x$ et $\sqrt{x}$.

**Figure 1.87**

Les graphes de $y = \sqrt{x}$ et $y = \ln x$ pour des valeurs de x petites.

**Figure 1.88**

Les graphes de $y = \sqrt{x}$ et $y = \ln x$ pour de grandes valeurs de x .

1.5 Exercices

1. a) Expliquez ce qu'est une fonction injective ?
b) Comment peut-on reconnaître au graphe d'une fonction si elle est injective ?
2. a) Supposez que f soit une fonction injective dont le domaine de définition est A et l'ensemble image B . Comment la fonction réciproque f^{-1} est-elle définie ? Quel est son domaine de définition ? Quel est son ensemble image ?
b) Si vous disposez d'une formule qui définit f , comment trouvez-vous la formule qui définit f^{-1} ?
c) Si vous disposez du graphe de f , comment procédez-vous pour obtenir le graphe de f^{-1} ?

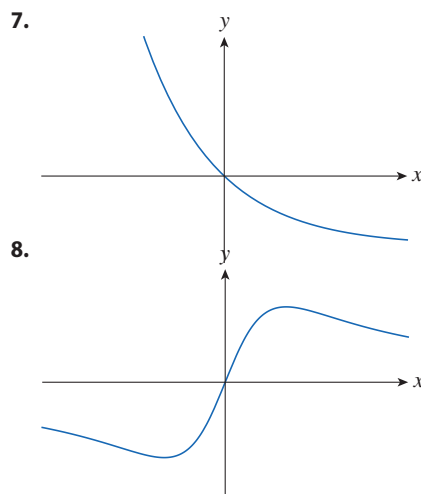
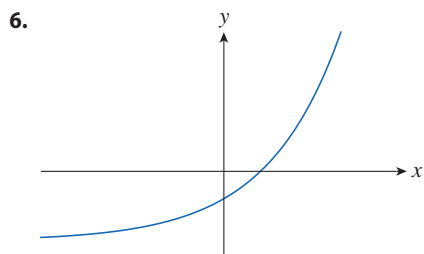
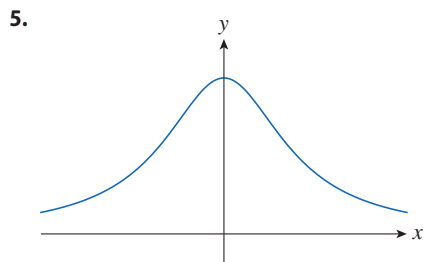
Une fonction f est donnée, soit par une table de valeurs, soit par un graphe, soit par une formule ou encore verbalement. Déterminez si f est injective.

3.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1,5	2,0	3,6	5,3	2,8	2,0

4.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1,0	1,9	2,8	3,5	3,1	2,9



9. $f(x) = 2x - 3$
10. $f(x) = x^4 - 16$
11. $g(x) = 1 - \sin x$
12. $g(x) = \sqrt[3]{x}$
13. $f(t)$ est la hauteur d'un ballon de football t secondes après l'engagement.
14. $f(t)$ est votre taille à l'âge t .

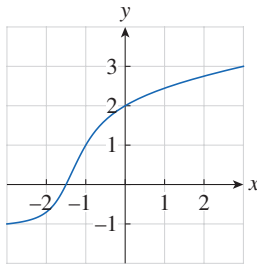
15. Soit f est une fonction injective.

- a) Si $f(6) = 17$, que vaut $f^{-1}(17)$?
- b) Si $f^{-1}(3) = 2$, que vaut $f(2)$?

16. Soit $f(x) = x^5 + x^3 + x$. Calculez $f^{-1}(3)$ et $f(f^{-1}(2))$.

17. Soit $g(x) = 3 + x + e^x$. Calculez $g^{-1}(4)$.

18. Voici le graphe de f .



- Pourquoi f est-elle injective ?
- Déterminez le domaine de définition et l'ensemble image de f^{-1} ?
- Quelle est la valeur de $f^{-1}(2)$.
- Estimez la valeur de $f^{-1}(0)$.

19. La formule $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, où $F \geq -459,67$, exprime la température en degrés Celsius en fonction de la température en degrés Fahrenheit. Cherchez une formule pour la fonction réciproque et interprétez-la. Quel est le domaine de définition de la fonction réciproque ?

20. En théorie de la relativité, la masse d'une particule animée d'une vitesse v est

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

où m_0 est la masse au repos de la particule et c la vitesse de la lumière dans le vide. Cherchez une formule qui définit la fonction réciproque de f et donnez-en la signification.

Cherchez une formule pour la fonction réciproque de la fonction donnée.

21. $f(x) = 1 + \sqrt{2 + 3x}$

22. $f(x) = \frac{4x - 1}{2x + 3}$

23. $f(x) = e^{2x-1}$

24. $y = x^2 - x, \quad x \geq \frac{1}{2}$

25. $y = \ln(x + 3)$

26. $y = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

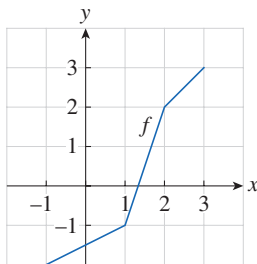
Tracez le graphe de f , et de là le graphe de f^{-1} . Vérifiez votre travail en cherchant une formule explicite pour f^{-1} .

27. $f(x) = \sqrt{4x + 3}$

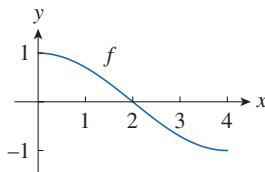
28. $f(x) = 1 + e^{-x}$

Servez-vous du graphe de f pour tracer celui de f^{-1} .

29.



30.



31. Soit $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leq x \leq 1$.

- Définissez f^{-1} . Quel lien y a-t-il entre f et f^{-1} .
- En reconnaissant le graphe de f expliquez votre réponse à la partie a).

32. Soit $g(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

- Définissez g^{-1} . Quel lien y a-t-il entre g et g^{-1} ?
- Tracez le graphe de g et expliquez en quoi il est cohérent avec le lien entre g et g^{-1} .

- Quelle est la définition de la fonction logarithme $y = \log_b x$?
- Quel est le domaine de définition de cette fonction ?
- Quel est l'ensemble image de cette fonction ?
- Tracez l'allure générale de la courbe $y = \log_b x$ pour le cas $b > 1$.

34. a) Qu'appelle-t-on logarithme naturel ?

b) Qu'appelle-t-on logarithme ordinaire ?

c) Dessinez les courbes de la fonction logarithme naturel et de la fonction exponentielle de base e dans un même système d'axes.

Calculez la valeur exacte de chaque expression.

35. a) $\log_2 32$

b) $\log_8 2$

36. a) $\log_5 \frac{1}{125}$

b) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$

37. a) $\log_{10} 40 + \log_{10} 2.5$

b) $\log_8 60 - \log_8 3 - \log_8 5$

38. a) $e^{-\ln 2}$

b) $e^{\ln(\ln e^3)}$

Ecrivez l'expression avec un seul logarithme.

39. $\ln 10 + 2 \ln 5$

40. $\ln b + 2 \ln c - 3 \ln d$

41. $\frac{1}{3} \ln(x + 2)^3 + \frac{1}{2} [\ln x - \ln(x^2 + 3x + 2)^2]$

Simplifiez chaque expression.

42. $\ln(1 + e^{2x}) - \ln(1 + e^{-2x})$

43. $(\ln p)(\log_p e)(\sqrt{e})^{\ln p}$

Utilisez la formule de changement de base pour calculer, avec une précision de 6 décimales,

44. $\log_5 10$

45. $\log_3 57$

Utilisez la formule de changement de base pour dessiner le graphe des fonctions données dans un même repère. Quels liens ont ces graphes entre eux ?

46. $y = \log_{1.5} x, \quad y = \ln x, \quad y = \log_{10} x, \quad y = \log_{50} x$

47. $y = \ln x, \quad y = \log_{10} x, \quad y = e^x, \quad y = 10^x$

48. Grâce aux propriétés algébriques des logarithmes démontrez la formule suivante.

$$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h}$$

49. Le graphe de la courbe $y = \log_2 x$ est dessiné dans un repère dont l'unité est le centimètre. De combien de km faut-il se déplacer vers la droite avant que la courbe atteigne la hauteur de 25 cm ?
50. Comparez les graphes de $y = \ln|x|$ et $y = |\ln x|$. Expliquez leurs différences.
51. Comparez les fonctions $f(x) = x^{0,1}$, $f(x) = x^{0,1}$ et $g(x) = \ln x$. Quand le graphe de f dépasse-t-il finalement celui de g ?

Dessinez grossièrement le graphe de chaque fonction. N'utilisez pas de calculatrice graphique, mais seulement les courbes de base présentées dans cette section et, si nécessaire, les transformations de graphes.

52. $y = \log_{10}(x+5)$ 53. $y = -\ln x$
 54. $y = \ln(-x)$ 55. $y = \ln|x|$
 56. $y = \ln \frac{1}{|x+2|}$

Pour la fonction donnée,

- a) Déterminez le domaine de définition et l'ensemble image.
 b) Déterminez l'intersection avec l'axe Ox .
 c) Dessinez la courbe.

57. $f(x) = \ln x + 2$ 58. $f(x) = \ln(x-1) - 1$

Résolvez en x chaque équation.

59. $e^{7-4x} = 6$ 60. $\ln(3x-10) = 2$
 61. $\ln(x^2-1) = 3$ 62. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$
 63. $2^{x-5} = 3$ 64. $\ln x + \ln(x-1) = 1$
 65. $\ln(\ln x) = 1$
 66. $e^{ax} = Ce^{bx}$, où $a \neq b$
 67. $\log(x-5) - \ln 6 > 0$
 68. $\log_4(x+6) + \log_4(x-3) \geq 1$
 69. $2 \ln x = (\ln x)^{-1} + 1$
 70. $\ln(\cos x) \leq 1$, pour $0 \leq x \leq 2\pi$
 71. $|\ln x| < 1$

Résolvez chaque inégalité par rapport à x .

72. $\ln x < 0$ 73. $e^x > 3$
 74. $1 < e^{3x-1} < 2$ 75. $1 - 2 \ln x < 3$

76. Soit $f(x) = \ln(e^x - 3)$.
 a) Déterminez le domaine de définition de f .
 b) Déterminez l'expression de f^{-1} et son domaine de définition.
77. a) Quelles sont les valeurs exactes de $e^{\ln 300}$ et de $\ln(e^{300})$?

- b) Utilisez votre calculatrice pour évaluer $e^{\ln 300}$ et $\ln(e^{300})$. Comparez avec les résultats précédents et expliquez les différences.

78. Représentez le graphe de la fonction

$f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ et expliquez pourquoi elle est injective. Ensuite, utilisez un logiciel de calcul symbolique pour trouver une expression explicite de la fonction réciproque $f^{-1}(x)$.

79. Soit $g(x) = x^6 + x^4$, $x \geq 0$.

- a) Utilisez un logiciel de calcul symbolique pour trouver une expression explicite de $g^{-1}(x)$.
 b) Tracez dans un même système de coordonnées les graphes de $y = g(x)$, $y = x$ et $y = g^{-1}(x)$.

80. Si une population de bactéries, qui se monte initialement à 100 unités, double toutes les trois heures, alors le nombre de bactéries présentes après t heures est donné par
 $n = f(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$.

- a) Déterminez la fonction réciproque et expliquez sa signification.
 b) À quel moment la population atteint-elle 50 000 unités ?

81. Dès que le flash d'un appareil photo s'est déclenché, les batteries commencent immédiatement à recharger la capacité. La quantité d'électricité stockée par la capacité est donnée par

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-t/a})$$

où Q_0 est la charge maximale de la capacité et où le temps t est mesuré en secondes.

- a) Écrivez la fonction réciproque Q^{-1} de cette fonction et expliquez sa signification dans le contexte du problème.
 b) Combien de temps faut-il pour recharger la capacité à 90 % dans le cas où $a = 2$?
82. Quelle est l'équation du graphe qui résulte des opérations suivantes appliquées à la courbe initiale $y = \ln x$?
 a) translation de 3 unités vers le haut,
 b) translation de 3 unités vers la gauche,
 c) symétrie axiale par rapport à l'axe Ox ,
 d) symétrie axiale par rapport à l'axe Oy ,
 e) symétrie axiale par rapport à la droite $y = x$,
 f) symétrie axiale par rapport à l'axe Ox suivie d'une symétrie axiale par rapport à la droite $y = x$,
 g) symétrie axiale par rapport à l'axe Oy suivie d'une symétrie axiale par rapport à la droite $y = x$,
 h) translation de 3 unités vers la gauche suivie d'une symétrie axiale par rapport à la droite $y = x$.
83. a) Si on fait subir à une courbe une translation vers la gauche, qu'arrive-t-il à son image symétrique par rapport à la droite $y = x$? Compte tenu de ce principe géométrique, trouvez une expression de la réciproque de $g(x) = f(x+c)$, où f est une fonction injective.
 b) Déterminez une expression de la fonction réciproque de $h(x) = f(cx)$, où $c \neq 0$.

1.6 Courbes décrites par des équations paramétriques

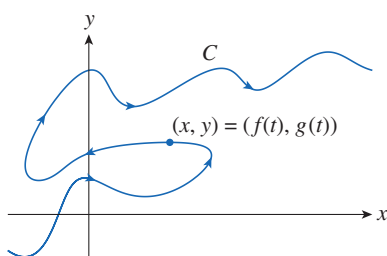


Figure 1.89

Une courbe dont les coordonnées x et y sont données par $x = f(t)$ et $y = g(t)$.

Imaginons qu'un point se déplace sur une courbe C comme celle de la figure 1.89. Il n'est pas possible de décrire C par une équation de la forme $y = f(x)$ parce que cette courbe ne satisfait pas au test de la verticale. Mais, à chaque instant t , correspondent les coordonnées x et y du point mobile, ce que nous pouvons écrire $x = f(t)$ et $y = g(t)$. Un tel couple d'équations est une manière souvent commode de décrire une courbe et donne lieu à la définition suivante.

■ Équations paramétriques et courbes

Supposons que x et y soient toutes les deux des fonctions continues d'une troisième variable t (appelée **paramètre**) selon les équations

$$x = f(t) \quad y = g(t)$$

(appelées **équations paramétriques**). Chaque valeur de t détermine un point (x, y) , que nous marquons dans un repère cartésien. Lorsque t varie, le point $(x, y) = (f(t), g(t))$ se déplace et parcourt la courbe C , qui est appelée **courbe paramétrée**. Le paramètre t ne représente pas nécessairement le temps et nous pourrions très bien choisir une autre lettre pour désigner le paramètre. Néanmoins, dans beaucoup d'applications des courbes paramétrées, t joue le rôle du temps et $(x, y) = (f(t), g(t))$ indique la position d'un point mobile en fonction du temps t .

Exemple 1 Graphe d'une courbe paramétrée

Dessiner et reconnaître la courbe définie par les équations paramétriques

$$x = t^2 - 2t \quad y = t + 1$$

Solution

Chaque valeur de t produit un point de la courbe. La table 1.8 énumère les valeurs de $x(t)$ et $y(t)$ pour quelques valeurs de t .

Par exemple, si $t = 0$, alors $x = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$ et $y = 0 + 1 = 1$. Le point correspondant est $(0, 1)$.

t	x	y
-2	8	-1
-1	3	0
0	0	1
1	-1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5

Table 1.8

Table des points (x, y) déterminés par les valeurs du paramètre t .

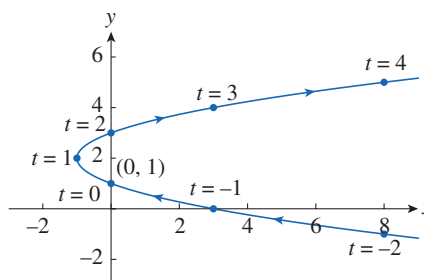


Figure 1.90

Représentation de la courbe définie les équations paramétriques.

Les points (x, y) de la table 1.8 sont notés dans la figure 1.90 et reliés entre eux par une courbe lisse.

Considérons une particule dont la position est déterminée par les équations paramétriques de cet exemple. Elle se déplace sur la courbe dans le sens indiqué par les flèches lorsque t croît.

Cette équation en x et y décrit *par où* passe le point, mais ne dit pas *quand* il est à un certain endroit. Les équations paramétriques présentent un avantage – elles disent *quand* le point est atteint et donnent aussi la direction du mouvement.

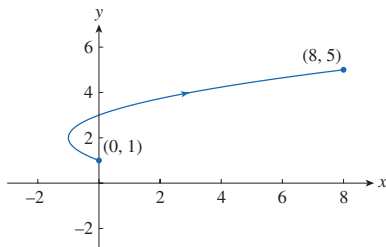


Figure 1.91

Graphé de la courbe décrite par les équations paramétriques $x = t^2 - 2t$, $y = t + 1$, $0 \leq t \leq 4$.

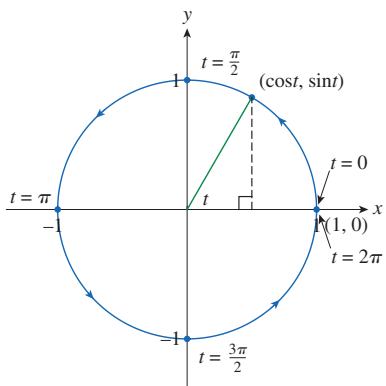


Figure 1.92

La courbe décrite par ces équations paramétriques est un cercle.

Il est à noter dans la figure 1.90 que les points successifs correspondent à des temps régulièrement espacés mais ne sont pas à égale distance les uns des autres. C'est dû au fait que, dans ce cas, la particule ralentit puis accélère lorsque t augmente.

On dirait que la trajectoire décrite par le point et reproduite à la figure 1.90 est une parabole. On en obtient confirmation en éliminant le paramètre t comme suit.

$$t = y - 1$$

Résoudre par rapport à t dans la deuxième équation.

$$x = t^2 - 2t = (y - 1)^2 - 2(y - 1) = y^2 - 4y + 3 \quad \text{Substituer dans la première équation.}$$

La courbe définie par les équations paramétriques est donc bien une parabole d'équation $x = y^2 - 4y + 3$. ■

Puisqu'aucune restriction n'a été mise à l'exemple 1 sur la variable t , nous supposons qu'elle peut prendre n'importe quelle valeur réelle. Parfois t ne peut varier que dans un certain intervalle borné. C'est le cas de la courbe définie par

$$x = t^2 - 2t \quad y = t + 1 \quad 0 \leq t \leq 4$$

et reproduite à la figure 1.91.

C'est un arc de la parabole de l'exemple 1 dont l'origine est en $(0, 1)$ et l'extrémité en $(8, 5)$. La flèche indique le sens dans lequel cet arc est parcouru lorsque t varie de 0 à 4.

De façon générale, la courbe d'équations paramétriques

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad a \leq t \leq b$$

a un **point initial** $(f(a), g(a))$ et un **point final** $(f(b), g(b))$.

Exemple 2 Reconnaître une courbe paramétrée

Décrire la courbe représentée par les équations paramétriques.

$$x = \cos t \quad y = \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Solution

En traçant des points, on s'aperçoit que la courbe est un cercle comme le montre la figure 1.92. Pour le confirmer, on élimine le paramètre t .

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Identité trigonométrique.

Lorsque t croît de 0 à 2π , le point (x, y) se déplace sur le cercle unité d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

Dans cet exemple, le paramètre t peut être interprété comme l'angle (en radians) indiqué sur la figure 1.92.

Lorsque t croît de 0 à 2π , le point $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ fait une fois le tour du cercle dans le sens contraire des aiguilles d'une montre à partir du point $(1, 0)$. ■

Exemple 3 Une autre façon de décrire un cercle

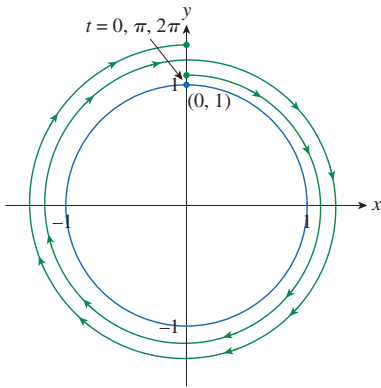
Quelle est la courbe représentée par les équations paramétriques ?

$$x = \sin 2t \quad y = \cos 2t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

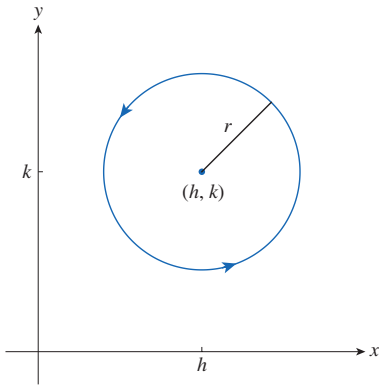
Solution

La même identité qu'à l'exemple 2 permet d'éliminer la paramètre t .

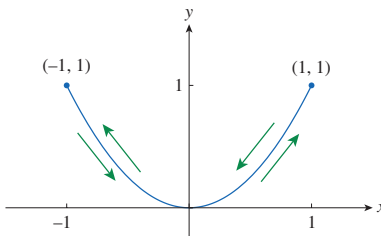
$$x^2 + y^2 = \sin^2 2t + \cos^2 2t = 1$$

**Figure 1.93**

Le cercle unité, en bleu, est décrit par les équations paramétriques données. La courbe verte illustre la trajectoire du point qui fait deux fois le tour du cercle dans le sens des aiguilles d'une montre.

**Figure 1.94**

Graphique d'un cercle centré en (h, k) de rayon r décrit par les équations paramétriques $x = h + r \cos t$, $y = k + r \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

**Figure 1.95**

L'arc de parabole d'équation $y = x^2$ est parcouru sans arrêt selon les équations paramétriques.

Ces équations paramétriques représentent également le cercle unité d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

Mais, lorsque t croît de 0 à 2π , le point $(x, y) = (\sin 2t, \cos 2t)$ part de $(0, 1)$ et fait *deux fois* le tour du cercle dans le sens des aiguilles d'une montre, comme l'indique la figure 1.93.

Les exemples 2 et 3 ont mis en exergue que des systèmes d'équations paramétriques différents peuvent représenter la même courbe. Ce qui nous oblige à distinguer entre une *courbe*, qui est un ensemble de points, et une *courbe paramétrée* dont les points sont parcourus dans un ordre déterminé.

Exemple 4 Déterminer les équations paramétriques d'un cercle

Déterminer des équations paramétriques d'un cercle de centre (h, k) et de rayon r .

Solution

Reprenons les équations du cercle de rayon unité $x = \cos t$, $y = \sin t$.

Multiplions les expressions de x et y par r : $x = r \cos t$, $y = r \sin t$.

Ces équations représentent un cercle de rayon r centré à l'origine et parcouru dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (lorsque t croît). Vous devriez pouvoir le vérifier.

Nous lui appliquons une translation de h unités dans la direction de l'axe Ox et de k unités dans la direction de l'axe Oy .

Cela donne les équations paramétriques du cercle centré en (h, k) de rayon r .

$$x = h + r \cos t \quad y = k + r \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

La figure 1.94 montre ce cercle.

Exemple 5 Partie d'une parabole

Dessiner les courbes définies par les équations paramétriques $x = \sin t$, $y = \sin^2 t$.

Solution

Observons que $y = (\sin t)^2 = x^2$.

Cela signifie que le point (x, y) se meut sur la parabole d'équation $y = x^2$.

Mais, comme $-1 \leq \sin t \leq 1$, on a aussi $-1 \leq x \leq 1$.

Par conséquent, les équations paramétriques ne représentent que les points de la parabole dont l'abscisse est comprise entre -1 et 1 .

Par ailleurs, $\sin t$ étant une fonction périodique, le point $(x, y) = (\sin t, \sin^2 t)$ se balance indéfiniment d'avant en arrière sur la parabole entre $(-1, 1)$ et $(1, 1)$ comme l'indique la figure 1.95.

■ Outils graphiques

La plupart des calculatrices et des ordinateurs équipés de logiciels de dessin sont capables de tracer des courbes décrites paramétriquement. Il est même instructif de suivre le traçage d'une courbe décrite de cette façon tout simplement parce que les points arrivent selon l'ordre croissant des valeurs du paramètre.

STEWART | KOKOSKA

Analyse

Concepts et contextes

Volume 1 : Fonctions d'une variable

Une étude approfondie des concepts

L'objectif majeur de ce manuel est la compréhension profonde des concepts. Chacun est introduit et formulé de manière rédigée, visuellement, numériquement et algébriquement avant que ne soit introduite sa définition formelle. Des exemples appropriés préparent souvent l'énoncé des théorèmes pour justifier la pertinence de leurs hypothèses. L'apprentissage au raisonnement mathématique est soutenu par les démonstrations (parfois reportées en annexe pour ne pas perdre le fil du discours).

Un apprentissage actif avec l'aide des outils de calcul

L'étudiant, maîtrisant les concepts et les différentes techniques, sera capable de choisir et d'utiliser les outils de calcul différentiel et intégral dans des contextes variés. L'apprentissage est favorisé par l'utilisation des calculatrices graphiques et/ou logiciels de calcul symbolique. Lors de chaque résolution de problèmes, l'accent est mis sur la méthode suivie ou l'activité de recherche mobilisée.

Nouveautés de la 4^e édition

- Les encadrés « De plus près » soulignent quelques détails souvent importants du concept ou de la proposition qui précède.
- Les erreurs fréquentes sont mises en évidence et immédiatement corrigées.
- Chaque chapitre commence par une situation réelle destinée à introduire la matière.
- La résolution des exemples, exercices et problèmes est plus détaillée.

Les deux volumes de cet ouvrage s'adressent aux étudiants de premier cycle universitaire qui, quelle que soit leur orientation, y trouveront des applications en Analyse.

Traduction de la 5^e édition américaine

Micheline Citta-Vanthemsche est professeur émérite de l'Université Saint-Louis à Bruxelles, traductrice de plusieurs ouvrages parus aux Éditions De Boeck Supérieur.

- Mise en évidence des règles à retenir
- Des applications concrètes
- Chaque sujet est développé à partir d'exemples suivis de leurs solutions
- Des exercices à la fin de chaque section
- Chaque chapitre se termine par des révisions et des problèmes à résoudre

Chez le même éditeur

