

STEWART | KOKOSKA

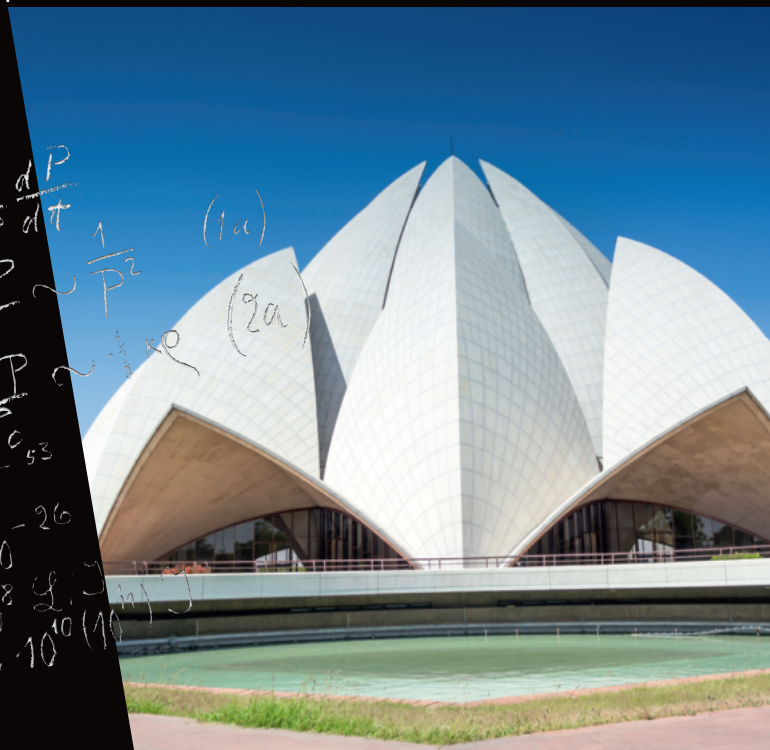
Analyse

Concepts et contextes

Volume 2 : Fonctions de plusieurs variables

4^e édition

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{c} \frac{1}{\ell} \frac{d\ell}{dt} = \frac{1}{c} \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} \quad (1a) \\ D^2 &= \frac{1}{P^2} \frac{P_0 - P}{P} \sim \frac{1}{P^2} \quad (2a) \\ D^2 &= \frac{k_0}{3} \frac{P_0 - P}{P} \sim \frac{1}{3} k_0 \\ D^2 &\sim 10^{-26} \\ \rho &\sim 10^{-19} \text{ g/cm}^3 \\ P &\sim 10^{10} \text{ (10)} \end{aligned}$$



+ EN LIGNE

OFFERT

Des rappels des formules

deboeck
SUPÉRIEUR **B**

Analyse

Concepts et Contextes

Volume 2. Fonctions de plusieurs variables

**Chez le même éditeur
Extrait du catalogue**

Mathématiques

CHOULLI M., *Analyse fonctionnelle*

CIPRIANI J., PERETTI P., *Symétrie et matière. Théorie des groupes en physique de la matière*

COTTET-EMARD F., *36 problèmes corrigés pour le CAPES de mathématiques*

COTTET-EMARD F., *Probabilités et tests d'hypothèses*

COTTET-EMARD F., *Analyse 2. Calcul différentiel, intégrales multiples, séries de Fourier*

COTTET-EMARD F., *Algèbre linéaire et bilinéaire*

COTTET-EMARD F., *Analyse*

DUPONT P., *Exercices corrigés de mathématiques. Algèbre et géométrie. 3^e éd.*

DUPONT P., *Exercices corrigés de mathématiques. Analyse. 3^e éd.*

MANSUY R., MNEIMÉ R., *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*

ROMBALDI J.-E., DARRACQ M.-C., *Algèbre et géométrie pour la licence*

ROMBALDI J.-E., DARRACQ M.-C., *Analyse pour la licence*

ROMBALDI J.-E., DARRACQ M.-C., *Probabilités pour la licence*

STEWART - KOKOSKA

Analyse

Concepts et Contextes

Volume 2. Fonctions de plusieurs variables

4^e édition

Traduction de la 5^e édition américaine par Pierre Peretti

Ouvrage original :

Calculus, Concepts & Contexts, fifth edition, by James Stewart & Stephen Kokoska.

Published in the English language by Cengage Learning, Inc.

Copyright © 2023, 2010. All Rights Reserved.

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : www.deboecksuperieur.com

© De Boeck Supérieur s.a., 2024
Rue du Bosquet, 7 – B-1348 Louvain-la-Neuve
Pour la traduction et l'adaptation française

4^e édition

Tous droits réservés pour tous pays.
Il est interdit, sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, de reproduire (notamment par photocopie) partiellement ou totalement le présent ouvrage, de le stocker dans une banque de données ou de le communiquer au public, sous quelque forme et de quelque manière que ce soit.

Dépôt légal :
Bibliothèque nationale, Paris : septembre 2024
Bibliothèque royale de Belgique, Bruxelles : 2024/13647/137

ISBN : 978-2-8073-5807-2

Table des matières

Avant-propos	ix
À l'étudiant	xvi
À propos de l'auteur	xvii
Tests diagnostiques	xviii

Un aperçu du calcul différentiel et intégral 1

9 Les vecteurs et la géométrie de l'espace 779

9.1	Le repère cartésien d'un espace à trois dimensions	780
9.2	Les vecteurs	787
9.3	Le produit scalaire	798
9.4	Le produit vectoriel	805
	Sujet à Découvrir • La géométrie du tétraèdre	814
9.5	Les équations de droites et de plans	814
	Sujet à Découvrir • 3D en perspective	825
9.6	Fonctions et surfaces	826
9.7	Les coordonnées cylindriques et sphériques	836
	Sujet d'Étude • Des familles de surfaces	842
	Révision	843
	Priorité à la résolution de problème	846

10 Les fonctions vectorielles 849

10.1	Les fonctions vectorielles et les courbes de l'espace	850
10.2	Les dérivées et les intégrales des fonctions vectorielles	858
10.3	La longueur d'un arc et la courbure	866
10.4	Le mouvement dans l'espace : vitesse et accélération	876
	Projet appliqué • Les lois de Kepler	886
10.5	Les surfaces paramétrées	887
	Révision	894

Priorité à la résolution de problème 897**11 Les dérivées partielles** 899

- 11.1** Les fonctions de plusieurs variables 900
- 11.2** Les limites et la continuité 913
- 11.3** Les dérivées partielles 921
- 11.4** Les plans tangents et les approximations au premier degré 936
- 11.5** La règle de dérivation des fonctions composées 948
- 11.6** Les dérivées directionnelles et le vecteur gradient 958
- 11.7** Les valeurs maximales et minimales 973
 - Projet appliqué** • Dresser les plans d'une benne à ordures 984
 - Sujet d'Étude** • Approximations quadratiques et points critiques 984
- 11.8** Les multiplicateurs de Lagrange 985
 - Projet appliqué** • La science des fusées 993
 - Projet appliqué** • Optimisation d'une centrale hydroélectrique 994

Révision 996**Priorité à la résolution de problème** 1000**12 Les intégrales multiples** 1003

- 12.1** Les intégrales doubles sur des rectangles 1004
- 12.2** Les intégrales itérées 1013
- 12.3** Les intégrales doubles sur des domaines de forme quelconque 1019
- 12.4** Les intégrales doubles en coordonnées polaires 1030
- 12.5** Applications des intégrales doubles 1037
- 12.6** Des aires de surface 1047
- 12.7** Les intégrales triples 1052
 - Sujet à Découvrir** • Volumes d'hypersphères 1063
- 12.8** Les intégrales triples en coordonnées cylindriques et sphériques 1064
 - Projet appliqué** • Une course d'objets qui roulent 1070
 - Sujet à Découvrir** • L'intersection de trois cylindres 1071
- 12.9** Changement de variables dans les intégrales multiples 1072

Révision 1081**Priorité à la résolution de problème** 1085**13 L'analyse vectorielle** 1087

- 13.1** Les champs vectoriels 1088
- 13.2** Les intégrales curvilignes 1096
- 13.3** Théorème fondamental pour les intégrales curvilignes 1108

13.4	Le théorème de Green	1119
13.5	Le rotationnel et la divergence	1128
13.6	Les intégrales de surface	1136
13.7	Le théorème de Stokes	1148
13.8	Le théorème de la divergence	1154
13.9	Résumé	1162
Révision		1163
Priorité à la résolution de problème		1167

Annexes

A1

A	Intervalles, inégalités et valeurs absolues	A2
B	Géométrie analytique	A7
C	Trigonométrie	A17
D	Les définitions formelles des limites	A26
E	Quelques démonstrations	A36
F	La notation Σ	A41
G	Intégration des fonctions rationnelles par décomposition en éléments simples	A47
H	Les coordonnées polaires	A55
	Sujet à Découvrir • Les sections coniques en coordonnées polaires	A70
I	Les nombres complexes	A71
J	Réponses aux exercices impairs	A80

Index I1

Retrouvez en ligne les formulaires :
www.deboecksuperieur.com/site/358072



Avant-propos

C'est au moment où se déroulait une âpre discussion sur la réforme du calcul différentiel et intégral qu'est sortie, il y a 20 ans, la première édition de ce livre. Plusieurs départements de mathématiques étaient profondément divisés sur des questions telles que l'usage de la technologie, la compréhension des concepts face à leur mise en pratique et le rôle de l'apprentissage par la découverte. Depuis lors, la Commission des programmes a adopté la réforme du calcul différentiel et intégral et les traditionalistes et réformateurs se sont rendus compte qu'ils poursuivaient un but commun : celui de rendre les étudiants capables de comprendre et d'apprécier le calcul différentiel et intégral.

Les quatre premières éditions anglaises ont essayé de concilier l'approche traditionnelle et réformatrice. Dans la cinquième édition, nous poursuivons dans cette voie en accentuant la compréhension des concepts à travers les approches graphique, verbale et numérique et les approches algébriques. Nous aimerions que les étudiants acquièrent des compétences en résolution de problèmes et voient à la fois la puissance du calcul différentiel et intégral et la beauté intrinsèque du sujet.

Le point sur lequel ce livre diffère des autres textes plus classiques sur le même sujet est qu'il est organisé de façon plus rationnelle. Par exemple, il n'y a pas de chapitre complètement consacré aux techniques d'intégration ; nous ne démontrons pas autant de théorèmes ; la matière sur les fonctions transcendantes et les équations paramétriques est distillée un peu partout au lieu de faire l'objet de chapitres distincts.

Quoi de neuf dans cette cinquième édition ?

Cette édition se distingue par un ton plus conversationnel associé à une présentation épurée, axé sur la compréhension conceptuelle au travers du développement des compétences en résolution de problèmes. Voici quelques-unes des principales améliorations que nous avons introduites dans cette édition.

- Une vue plus rapprochée des caractéristiques mène à des explications simplifiées des concepts importants. Les étudiants vont trouver cela plus facile à lire et à relier à la théorie concernée.
- Des notes dans la marge intitulées *Erreurs fréquentes* rappellent aux étudiants les erreurs courantes renforçant ainsi la bonne technique de résolution.
- La résolution plus détaillée et plus structurée des exemples consiste à expliciter la plupart des étapes (facile à lire, imprimée dans une couleur différente et située au niveau de l'étape en question). Les étudiants peuvent ainsi plus facilement suivre les étapes logiques d'une solution et appliquer les outils de résolution de problèmes aux exercices.
- Les sections ont été dans la mesure du possible subdivisées en sous-sections, plus courtes, plus adaptées à la façon dont les étudiants d'aujourd'hui lisent et assimilent.
- Tous les graphiques ont été nouvellement dessinés en y indiquant plus de détails et chaque figure est accompagnée d'une légende appropriée qui facilite le lien avec la notion qu'ils illustrent.

- Chaque chapitre commence par une situation réelle destinée à introduire la matière.
- Les données des exemples et des exercices ont été actualisées de manière à mieux correspondre à l'environnement d'aujourd'hui.
- L'ancienne section 2.8 intitulée « Que dit f' à propos de f » a été incorporée dans la section 4.3 qui traite des dérivées et de l'allure des courbes.

Caractéristiques

■ Des exercices sur les concepts

Les exercices comportent différents types de problèmes visant à renforcer la compréhension des concepts. Certaines sections d'exercices commencent par demander d'expliquer la signification de certains des concepts de base présentés dans la section. Voyez par exemple les quelques premiers exercices des sections 2.2, 2.4, 2.5, 5.3, 8.2. Ces questions peuvent servir à amorcer les échanges en classe. Dans le même esprit, les sections de révision commencent par une révision des concepts et du vocabulaire et par une liste de Vrai-Faux. D'autres exercices testent la compréhension des concepts par le biais de graphiques ou de tableaux (voyez les exercices 1.7.22-25, 2.6.19, 2.7.39-42; 45-48, 3.8.5-6, 5.2.65-67, 7.1.12-14 et 8.7.2).

Un autre type d'exercices consiste à vérifier la compréhension des concepts à travers des descriptions verbales. Voyez par exemple les exercices 2.4.11, 2.7.75, 4.3.80, 4.3.84-85 et 5.10.69. D'autres problèmes mêlent les approches graphiques, numériques et algébriques et les comparent ; voyez les exercices 2.5.54-55, 2.5.63, 3.8.27 et 7.5.4.

■ Gradation des exercices

Chaque ensemble d'exercices est soigneusement classé, allant des exercices de base sur le concept ou d'entraînement jusqu'à des problèmes plus ardues de type applications et démonstrations.

■ Des données issues de la réalité

Chacun des collaborateurs de ce projet a passé beaucoup de temps à consulter des bibliothèques, à contacter des sociétés et des organismes officiels, à chercher sur Internet des données intéressantes afin d'introduire, de motiver et d'illustrer les concepts du calcul différentiel et intégral. C'est ainsi que beaucoup d'exemples et d'exercices contiennent des fonctions définies par des données numériques présentées sous forme de tables ou de graphiques. Voyez, par exemple, la figure 1.1 dans la section 1.1 (le taux d'utilisation de l'eau à New York en 2018 pendant la finale du championnat organisé par la ligue américaine de football américain), l'exercice 5.1.16 (la vitesse d'une voiture de course sur un circuit d'essai automobile), l'exercice 5.1.18 (la vitesse d'un train dans l'Hyperloop de SpaceX), la figure 5.40 (la consommation électrique de San Francisco), l'exemple 5.9.5 à la section 5.9 (échange de données sur Internet).

■ De véritables projets

Une façon de motiver les étudiants et d'en faire des apprenants actifs est de les mettre au travail (éventuellement en groupe) sur des projets plus importants qui, une fois traités, leur procurent un sentiment d'immense satisfaction. Les *projets appliqués* comprennent des applications conçues pour éveiller l'imagination des étudiants. Les *sujets d'étude* impliquent de la technique ; le sujet proposé à la fin de la section 3.4 montre comment utiliser des courbes de Bézier pour dessiner les formes employées dans le tracé des lettres par une imprimante laser. Les *sujets de rédaction* demandent aux étudiants de

comparer les méthodes d'aujourd'hui avec celles des pionniers du calcul différentiel et intégral – la méthode de Fermat pour déterminer des tangentes, par exemple. Les références à consulter sont indiquées. Les *sujets à découvrir* empiètent sur des notions abordées ultérieurement ou traitent des notions facultatives (les fonctions hyperboliques) ou encore invitent à la découverte à travers la reconnaissance de régularités (voyez le projet qui termine la section 5.8).

■ De la rigueur

Il y a moins de démonstrations que dans les livres de calcul différentiel et intégral plus traditionnels. Il n'en reste pas moins important d'interpeller les étudiants sur la question de la démonstration et de faire apparaître clairement la distinction entre une véritable démonstration et une argumentation convaincante basée, par exemple, sur un graphique ou une table de valeurs. Le point important est de montrer comment déduire quelque chose de moins évident de quelque chose qui l'est davantage. L'usage du Théorème des accroissements finis dans la démonstration du Théorème de calcul de l'intégrale définie (Partie 2 du Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral) en est une illustration. Par ailleurs, nous avons décidé de ne pas démontrer les tests de convergence, mais plutôt de faire apparaître par des arguments intuitifs qu'ils étaient crédibles.

■ La résolution de problèmes

La résolution de problèmes est sans doute la matière la plus difficile à enseigner et à apprendre. Les étudiants éprouvent habituellement des difficultés face à des problèmes pour lesquels il n'existe pas *a priori* de méthode bien définie pour les résoudre. Je pense que personne n'a vraiment fait mieux que Georges Polya dans la description de la stratégie de résolution de problèmes en quatre étapes. Voilà pourquoi figure une version de ses principes de résolution de problèmes à la fin du chapitre 1. Ceux-ci sont mis en œuvre, explicitement ou implicitement, tout au long de cet ouvrage. À la fin d'autres chapitres se trouvent des sections intitulées *Priorité à la résolution de problèmes* qui mettent en vedette la manière d'aborder des problèmes d'analyse qui posent véritablement un défi. Le principe de sélection des problèmes de ces sections est le conseil de David Hilbert : « Un problème mathématique devrait être suffisamment difficile pour nous tenir en haleine mais pas inaccessible au point de tourner nos efforts en dérision. » Ces problèmes difficiles peuvent être posés à titre de devoirs ou de tests, mais évalués selon des critères différents. On pourrait récompenser un étudiant pour avoir seulement avancé des pistes de solution ou avoir identifié les principes de la résolution les plus pertinents.

■ Les outils techniques

Les calculatrices graphiques et les ordinateurs sont de puissants outils qui permettent d'explorer des problèmes, de découvrir des concepts et de confirmer des solutions.

Il est néanmoins plus important encore de maîtriser les concepts sous-jacents aux résultats et aux images de l'écran. Il est supposé que les étudiants ont accès à une calculatrice graphique ou à un logiciel de calcul symbolique. Mais la technologie ne rend pas obsolète l'usage du papier et du crayon. Le calcul à la main et l'esquisse à main levée sont souvent préférables aux outils techniques pour illustrer ou renforcer certains concepts. C'est à l'enseignant et à l'étudiant d'apprendre à estimer quand l'usage de la technologie est le plus approprié.

Le contenu

■ Test préalable

Le livre commence par quatre tests sur les connaissances acquises en algèbre de base, en géométrie analytique, sur les fonctions et en trigonométrie.

■ Un aperçu du calcul différentiel et intégral

Cette section donne une vue d'ensemble des sujets traités et une liste de questions destinées à motiver leur étude.

■ 1 • Les fonctions et les modèles

D'emblée, l'accent est mis sur les diverses présentations des fonctions : verbale, numérique, visuelle et algébrique. Une introduction aux modèles mathématiques conduit à passer en revue les fonctions standards, y compris exponentielles et logarithmes, sous ces quatre points de vue. Les courbes paramétrées sont introduites dans le premier chapitre, en partie pour faciliter la représentation des courbes par des outils graphiques, quand cela s'avère nécessaire dans la suite. Grâce à cette introduction précoce, on peut tracer des tangentes aux courbes paramétrées traitées dans la section 3.4 et couvrir la représentation graphique de ces courbes dans la section 4.4.

■ 2 • Les limites et les dérivées

La matière sur les limites n'est entamée qu'à la suite d'une étude de problèmes de tangentes et de vitesses. Les limites sont traitées d'un point de vue descriptif, graphique, numérique et algébrique. La définition formelle en ϵ - δ de la limite figure dans l'annexe D pour qui souhaite l'aborder. Il est important de passer du temps sur les sections 2.6 et 2.7 qui ont trait aux dérivées et aux taux de variation avant que ne soient exposées les règles de dérivation au chapitre 3. Les exemples et les exercices explorent les significations de la dérivée dans différents contextes.

■ 3 • Les règles de dérivation

Ce chapitre passe en revue les règles de dérivation de toutes les fonctions de base. Lorsque des dérivées interviennent dans des situations appliquées que ce soit comme exemple ou comme exercice, il est demandé à l'étudiant d'en expliciter la signification dans le contexte proposé. Les Sujets d'étude et à découvrir proposent des options (les fonctions hyperboliques, une première introduction aux polynômes de Taylor).

■ 4 • Les applications de la dérivée

Ce chapitre commence par une section sur les vitesses liées. Ensuite, c'est le théorème des accroissements finis qui sert de point de départ aux premières notions relatives aux valeurs extrêmes et à la forme des courbes. L'interaction entre l'outil graphique et l'analyse est ici manifeste et illustrée. Une large variété de problèmes d'optimisation sont prévus. Enfin, sont présentées les formes indéterminées et la méthode de Newton ainsi qu'une étude des primitives qui prépare les étudiants au chapitre 5.

■ 5 • Les intégrales

La notion d'intégrale définie s'appuie sur le calcul d'aire et de distance. La définition d'une intégrale est plus facile à comprendre si on opte pour des sous-intervalles de même longueur. L'accent est mis sur l'explication du sens de l'intégrale dans différents contextes et sur comment la calculer à partir d'un graphique et de tables. Il n'y a pas de chapitre séparé consacré aux techniques d'intégration. Seules les méthodes par substitution et par parties sont traitées ici et d'autres méthodes sont seulement esquissées.

La décomposition en éléments simples est exposée de façon complète dans l'annexe G. La section 5.8 aborde l'usage des logiciels de calcul symbolique en intégration.

■ 6 • Les applications de l'intégrale

Les méthodes générales, et non les formules, sont mises en avant. L'objectif est que les étudiants puissent diviser une quantité en petits morceaux, estimer avec des sommes de Riemann, et reconnaître la limite comme une intégrale. Il y a beaucoup d'applications dans ce chapitre, probablement trop pour être couvertes dans un seul cours. Nous espérons que vous sélectionnerez des applications que vous et vos étudiants apprécierez. Certains instructeurs aiment couvrir les coordonnées polaires, voir l'Annexe H. D'autres préfèrent reporter ce sujet jusqu'à ce qu'il soit nécessaire dans un cours de calcul du troisième semestre, avec la Section 9.7 ou juste avant la Section 12.4.

■ 7 • Les équations différentielles

C'est la modélisation qui gouverne ce traitement introductif aux équations différentielles. Les champs de direction et la méthode d'Euler sont vus avant de résoudre explicitement des équations à variables séparées, de sorte que les approches qualitative, numérique et analytique sont placées sur un même pied. Ces méthodes sont mises en oeuvre sur les modèles exponentiels, logistiques et autres de croissance d'une population. Les modèles proies-prédateurs servent à illustrer les systèmes d'équations différentielles.

■ 8 • Les suites et les séries

Les tests de convergence des séries sont traités brièvement, justifiés plus intuitivement que rigoureusement. Les estimations numériques des sommes de série reposent sur les tests qui ont servi à prouver la convergence. L'accent est mis sur les séries et les polynômes de Taylor, leur utilisation en physique et l'estimation de l'erreur.

Remerciements

J'exprime ma reconnaissance aux lecteurs qui ont partagé avec moi leurs connaissances et leurs critiques. J'ai appris quelque chose de chacun d'eux.

■ Lecteurs de la cinquième édition

Robert Andersen, Stony Brook
Adam Boocher, University of San Diego
Austina Fong, PCC Rock Creek
Marcus McDuff, Austin Community College
Mako Haruta, University of Hartford

David Kahn, Stony Brook
Leanne Merrill, Western Oregon University

■ Lecteurs des éditions précédentes

Irfan Altas, Charles Sturt University
William Ardis, Collin County Community College
Jennifer Bailey, Colorado School of Mines
Barbara Bath, Colorado School of Mines
Neil Berger, University of Illinois at Chicago
Jean H. Bevis, Georgia State University
Lewis Blake, Duke University
Martina Bode, Northwestern University
Jay Bourland, Colorado State University
Paul Wayne Britt, Louisiana State University
Judith Broadwin, Jericho High School (retired)

Charles Bu, Wellesley University
Meghan Anne Burke, Kennesaw State University
Robert Burton, Oregon State University
Roxanne M. Byrne, University of Colorado at Denver
Maria E. Calzada, Loyola University—New Orleans
Larry Cannon, Utah State University
Deborah Troutman Cantrell, Chattanooga State Technical
Community College
Bem Cayco, San Jose State University
John Chadam, University of Pittsburgh
Robert A. Chaffer, Central Michigan University

- Dan Clegg, Palomar College
 Camille P. Cochrane, Shelton State Community College
 James Cook, North Carolina State University
 James Daly, University of Colorado
 Richard Davis, Edmonds Community College
 Susan Dean, DeAnza College
 Richard DiDio, LaSalle University
 Robert Dieffenbach, Miami University—Middletown
 Fred Dodd, University of South Alabama
 Helmut Doll, Bloomsburg University
 William Dunham, Muhlenberg College
 David A. Edwards, The University of Georgia
 John Ellison, Grove City College
 Joseph R. Fiedler, California State University—Bakersfield
 Barbara R. Fink, DeAnza College
 James P. Fink, Gettysburg College
 Joe W. Fisher, University of Cincinnati
 Robert Fontenot, Whitman College
 Richard L. Ford, California State University Chico
 Laurette Foster, Prairie View A&M University
 Ronald C. Freiwald, Washington University in St. Louis
 Frederick Gass, Miami University
 Gregory Goodhart, Columbus State Community College
 John Gosselin, University of Georgia
 Daniel Grayson, University of Illinois at Urbana—Champaign
 Raymond Greenwell, Hofstra University
 Gerrald Gustave Greivel, Colorado School of Mines
 John R. Griggs, North Carolina State University
 Barbara Bell Grover, Salt Lake Community College
 Murli Gupta, The George Washington University
 John William Hagood, Northern Arizona University
 Kathy Hann, California State University at Hayward
 Richard Hitt, University of South Alabama
 Judy Holdener, United States Air Force Academy
 Randall R. Holmes, Auburn University
 Barry D. Hughes, University of Melbourne
 Mike Hurley, Case Western Reserve University
 Costel Ionita, Dixie State College
 Gary Steven Itzkowitz, Rowan University
 Helmer Junghans, Montgomery College
 Victor Kaftal, University of Cincinnati
 Steve Kahn, Anne Arundel Community College
 Mohammad A. Kazemi, University of North Carolina, Charlotte
 Harvey Keynes, University of Minnesota
 Kandace Alyson Kling, Portland Community College
 Ronald Knill, Tulane University
 Stephen Kokoska, Bloomsburg University
 Kevin Kreider, University of Akron
 Doug Kuhlmann, Phillips Academy
 David E. Kullman, Miami University
 Carrie L. Kyser, Clackamas Community College
 Prem K. Kythe, University of New Orleans
 James Lang, Valencia Community College—East Campus
 Carl Leinbach, Gettysburg College
 William L. Lepowsky, Laney College
 Kathryn Lesh, University of Toledo
 Lawrence Levine, Stevens Institute of Technology
 Estela Llinas, University of Pittsburgh at Greensburg
 Beth Turner Long, Pellissippi State Technical Community College
 Miroslav Lovric, McMaster University
 Lou Ann Mahaney, Tarrant County Junior College—Northeast
 John R. Martin, Tarrant County Junior College
 Andre Mathurin, Bellarmine College Prep
 R. J. McKellar, University of New Brunswick
 Jim McKinney, California State Polytechnic University—Pomona
 Richard Eugene Mercer, Wright State University
 David Minda, University of Cincinnati
 Rennie Mirollo, Boston College
 Laura J. Moore-Mueller, Green River Community College
 Scott L. Mortensen, Dixie State College
 Brian Mortimer, Carleton University
 Bill Moss, Clemson University
 Tejinder Singh Neelon, California State University San Marcos
 Phil Novinger, Florida State University
 Richard Nowakowski, Dalhousie University
 Stephen Ott, Lexington Community College
 Grace Orzech, Queen's University
 Jeanette R. Palmiter, Portland State University
 Bill Paschke, University of Kansas
 Drew Pasteur, North Carolina State University
 David Patocka, Tulsa Community College—Southeast Campus
 Paul Patten, North Georgia College
 Leslie Peek, Mercer University
 Mike Pepe, Seattle Central Community College
 Jeffrey Powell, Samford University
 Dan Pritikin, Miami University
 Fred Prydz, Shoreline Community College
 Denise Taunton Reid, Valdosta State University
 James Reynolds, Clarion University
 Hernan Rivera, Texas Lutheran University
 Richard Rochberg, Washington University
 Gil Rodriguez, Los Medanos College
 David C. Royster, University of North Carolina—Charlotte
 Daniel Russow, Arizona Western College
 Dusty Edward Sabo, Southern Oregon University
 Daniel S. Sage, Louisiana State University
 N. Paul Schembari, East Stroudsburg University
 Dr. John Schmeelk, Virginia Commonwealth University
 Bettina Schmidt, Auburn University at Montgomery
 Bernd S. W. Schroeder, Louisiana Tech University
 Jeffrey Scott Scroggs, North Carolina State University
 James F. Selgrade, North Carolina State University
 Brad Shelton, University of Oregon
 Don Small, United States Military Academy—West Point
 Linda E. Sundbye, The Metropolitan State College of Denver
 Richard B. Thompson, The University of Arizona
 William K. Tomhave, Concordia College
 Barbara Tozzi, Brookdale Community College
 Lorenzo Traldi, Lafayette College
 Alan Tucker, State University of New York at Stony Brook
 Tom Tucker, Colgate University
 Kathryn Turner, Utah State University
 George Van Zwalenberg, Calvin College
 Dennis Watson, Clark College
 Paul R. Wenston, The University of Georgia
 Ruth Williams, University of California—San Diego

Clifton Wingard, Delta State University
 Jianzhong Wang, Sam Houston State University
 JingLing Wang, Lansing Community College
 Michael B. Ward, Western Oregon University
 Stanley Wayment, Southwest Texas State University

Barak Weiss, Ben-Gurion University—Be'er Sheva, Israel
 Teri E. Woodington, Colorado School of Mines
 James Wright, Keuka College
 Cathy Zucco-Tevelof, Arcadia University

En outre, je voudrais remercier Ari Brodsky, David Cusick, Alfonso Gracia-Saz, Emile LeBlanc, Tanya Leise, Joe May, Romaric Pujol, Norton Starr, Lou Talman et Gail Wolkowicz pour leurs conseils et suggestions ; Al Shenk et Dennis Zill de m'avoir accordé d'utiliser des exercices de leurs livres de calcul différentiel et intégral ; COMAP pour l'autorisation d'utiliser leurs projets ; Alfonso Gracia-Saz, B. Hovinen, Y. Kim, Anthony Lam, Romaric Pujol, Felix Recio et Paul Sally pour leurs suggestions d'exercices ; Dan Drucker pour le projet de plaine de jeu ; Tom Farmer, Fred Gass, John Ramsay, Larry Riddle, V.K. Srinivasan et Philip Straffin pour leurs idées de projets. Je suis reconnaissant à Dan Clegg, Jeff Cole et Tim Flaherty d'avoir préparé le solutionnaire des exercices et d'avoir émis des suggestions d'amélioration des exercices.

Je remercie aussi ceux qui ont apporté leur contribution aux éditions précédentes : Ed Barbeau, George Bergman, David Bleecker, Fred Brauer, Andy Bulman-Fleming, Tom Di Ciccio, Martin Erickson, Garret Etgen, Chris Fisher, Stuart Goldenberg, Arnold Good, John Hagood, Gene Hecht, Victor Kaftal, Harvey Keynes, E. L. Koh, Zdislav Kovarik, Kevin Kreider, Jamie Lawson, David Leep, Gerald Leibowitz, Larry Peterson, Lothar Redlin, Peter Rosenthal, Carl Riehm, Ira Rosenholtz, Doug Shaw, Dan Silver, Lowell Smylie, Larry Wallen, Saleem Watson et Alan Weinstein.

Mes remerciements vont encore à Flora Emmanuel et Lumina Datamatics Ltd, pour leurs services de production, à Thomas Dick et Ben Klein pour la relecture soignée des épreuves, à Gaby Vinales pour les images de couverture et à toute l'équipe de Cengage : Laura Gallus, concepteur d'apprentissage ; Nikkita Kendrick, partenaire qualité ; Asley Maynard et Nick Barrows, spécialistes des autorisations ; Lynh Pham, gestionnaire du contenu ; Tim Rogers, assistant de production et Tom Ziolkowski, directeur exécutif du marketing. Tous, ils ont réalisé un travail extraordinaire.

Je voudrais adresser un remerciement particulier à Gary Whalen pour sa patience et sa confiance. Steve est spécialement reconnaissant et honoré de faire partie de l'héritage de l'œuvre de Stewart. En outre, la cinquième édition n'aurait pu être menée à bien sans Leslie Lahr qui possède de superbes qualités d'éditrice, un regard d'experte sur le style et une vue d'ensemble de l'édition. Steve a eu la grande chance de travailler avec quelques-uns des meilleurs enseignants en mathématiques du pays au cours des trois dernières décennies. Ce texte reflète une grande partie de ce qu'il a appris auprès d'eux.

James Stewart
 Stephen Kokoska

À l'étudiant

Lire un livre de calcul différentiel et intégral est tout autre chose que lire un journal ou un roman, ou même un livre de physique. Ne vous découragez pas s'il vous arrive de devoir lire un passage plus d'une fois avant de le comprendre. C'est une bonne idée de garder un crayon, du papier et une calculatrice graphique à portée de main pour vérifier ou essayer un calcul ou dessiner un diagramme ou un graphique.

Certains étudiants choisissent de négliger le texte pour se lancer directement dans les exercices et ne vont lire la théorie que s'ils rencontrent des difficultés dans un exercice. Nous pensons qu'il est préférable de lire et de comprendre une section avant d'attaquer les exercices. En particulier, vous devez soigneusement étudier les définitions et comprendre la signification exacte des termes. Et avant de lire un exemple, nous suggérons d'en cacher la solution et d'essayer de le résoudre par vous-même. Vous en retirerez ainsi davantage de la lecture de la solution.

Ce texte est conçu pour enseigner la compréhension conceptuelle grâce à des compétences de résolution de problèmes et de reconnaissance de formes et pour vous entraîner à penser de manière logique. Apprenez à rédiger les solutions aux exercices de manière liée, étape par étape, en utilisant les bons termes et les notations appropriées.

À la fin du livre, dans l'annexe J, sont données les solutions des exercices de numérotation impaire. Certains exercices consistent en une explication ou une interprétation ou une description. Il n'y a dès lors pas qu'une seule façon d'y répondre, ne vous inquiétez donc pas si vous n'avez pas trouvé la réponse exactement telle qu'elle est proposée. En outre, comme il y a parfois plusieurs formes différentes pour exprimer une réponse algébrique ou numérique, n'allez pas conclure immédiatement que la vôtre est fausse si elle est quelque peu différente de celle donnée dans le livre. Par exemple, si la réponse donnée à la fin du livre est $\sqrt{2} - 1$ et que vous obtenez $1/(1 + \sqrt{2})$, c'est correct car en rendant le dénominateur rationnel, vous verrez que les deux réponses sont équivalentes.

Nous espérons que vous tiendrez à garder ce livre à titre de référence après avoir terminé le cours. Comme il est probable que vous oublierez quelques détails de cette matière, il vous permettra de vous rafraîchir la mémoire quand vous en aurez besoin dans vos cours ultérieurs. De plus, ce livre contenant plus de matière que ce qu'un cours peut raisonnablement couvrir, il peut être une ressource utile dans votre travail de chercheur ou d'ingénieur. Le calcul différentiel et intégral est un sujet passionnant, à juste titre considéré comme l'une des plus hautes réalisations de l'esprit humain. Nous espérons que vous allez découvrir qu'il n'est pas seulement utile mais aussi intrinsèquement beau.

James Stewart
Stephen Kokoska

À propos de l'auteur

Steve a obtenu son diplôme de premier cycle au Boston College et sa maîtrise en sciences et son doctorat à l'université du New Hampshire. Ses premiers sujets de recherche portaient sur l'analyse statistique des expériences de prévention par chimiothérapie du cancer. Il a publié plusieurs articles dans des journaux de mathématiques : *Biometrics*, *Anticancer Research* et *Computer Methods and Programs in Biomedecine*. Il a présenté ses résultats lors de conférences et rédigé plusieurs livres. Il a reçu des subventions de la Fondation nationale des sciences, du centre de la Pennsylvanie rurale et du programme Ben Franklin.

Steve fut longtemps consultant au College Board et il a animé des ateliers au Brésil, en République dominicaine, à Singapour et en Chine. Pendant quatre ans, il fut lecteur en chef de l'AP Calculus (ensemble de deux cours et examens d'Analyse proposé par l'organisation américaine à but non lucratif College Board), il a participé à la réforme du calcul différentiel et intégral et à la réflexion sur l'usage des outils modernes de calcul dans les classes. Il a récemment publié avec James Stewart un AP Calculus text. Il a enseigné pendant 30 ans à l'Université de Bloomsberg.

Steve est convaincu que la compréhension des concepts passe par le développement des aptitudes à la résolution de problèmes et à la reconnaissance des régularités. Il est encore aujourd'hui impliqué dans le programme AP Calculus et anime avec d'autres le webinaire Monday Night Calculus soutenu par Texas Instruments.

L'oncle de Steve, le jésuite Fr. Stanley Bezuska, professeur au Boston College, fut un des architectes de ce qui était appelé en 1950 et 60 les mathématiques nouvelles. Il a eu une forte influence sur la carrière de son neveu. Il a collaboré avec Fr. B. en contrôlant la précision des textes en tant qu'assistant enseignant et même en rédigeant des projets pour le lycée et l'université. Il a ainsi appris l'ordre, la précision, l'élégance des mathématiques et développé un enthousiasme sans borne pour l'enseignement.

Tests diagnostiques

Une bonne maîtrise du calcul différentiel et intégral dépend pour une large part des connaissances acquises antérieurement en mathématiques: algèbre, géométrie analytique, fonctions et trigonométrie. Le test qui suit a pour but de repérer les faiblesses que vous pourriez avoir dans ces matières. À la fin de chaque test, vous pouvez comparer vos réponses avec celles qui sont fournies et, si nécessaire, rafraîchir vos connaissances grâce aux révisions conseillées.

A | Test d'algèbre

1. Calculez, sans calculatrice, chacune des expressions suivantes.

- a) $(-3)^4$ b) -3^4 c) 3^{-4}
d) $\frac{5^{23}}{5^{21}}$ e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ f) $16^{-3/4}$

2. Simplifiez chaque expression. Écrivez la réponse sans exposant négatif.

- a) $\sqrt{200} - \sqrt{32}$ b) $(3a^3b^3)(4ab^2)^2$ c) $\left(\frac{3x^{3/2}y^3}{x^2y^{-1/2}}\right)^{-2}$

3. Développez et simplifiez.

- a) $3(x + 6) + 4(2x - 5)$ b) $(x + 3)(4x - 5)$
c) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ d) $(2x + 3)^2$
e) $(x + 2)^3$

4. Factorisez chaque expression.

- a) $4x^2 - 25$ b) $2x^2 + 5x - 12$
c) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ d) $x^4 + 27x$
e) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ f) $x^3y - 4xy$

5. Simplifiez l'expression rationnelle.

- a) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2}$ b) $\frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 9} \cdot \frac{x + 3}{2x + 1}$
c) $\frac{x^2}{x^2 - 4} - \frac{x + 1}{x + 2}$ d) $\frac{\frac{y}{x} - \frac{x}{y}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}}$

6. Rendez l'expression rationnelle et simplifiez.

- a) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5} - 2}$ b) $\frac{\sqrt{4 + h} - 2}{h}$

7. Complétez le carré.

- a) $x^2 + x + 1$ b) $2x^2 - 12x + 11$

8. Résolvez l'équation. (Cherchez seulement les solutions réelles.)

- a) $x + 5 = 14 - \frac{1}{2}x$ b) $\frac{2x}{x + 1} = \frac{2x - 1}{x}$
c) $x^2 - x - 12 = 0$ d) $2x^2 + 4x + 1 = 0$
e) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ f) $3|x - 4| = 10$
g) $2x(4 - x)^{-1/2} - 3\sqrt{4 - x} = 0$

9. Résolvez chaque inégalité. Écrivez vos réponses sous forme d'intervalles.

- a) $-4 < 5 - 3x \leq 17$ b) $x^2 < 2x + 8$
 c) $x(x - 1)(x + 2) > 0$ d) $|x - 4| < 3$
 e) $\frac{2x - 3}{x + 1} \leq 1$

10. Les équations sont-elles vraies ou fausses ?

- a) $(p + q)^2 = p^2 + q^2$ b) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
 c) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ d) $\frac{1 + TC}{C} = 1 + T$
 e) $\frac{1}{x - y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ (f) $\frac{1/x}{a/x - b/x} = \frac{1}{a - b}$

Réponses du test A : Algèbre

1. a) 81 b) -81 c) $\frac{1}{81}$ 6. a) $5\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$ b) $\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}$
 d) 25 e) $\frac{9}{4}$ f) $\frac{1}{8}$ 7. a) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ b) $2(x - 3)^2 - 7$
 2. a) $6\sqrt{2}$ b) $48a^5b^7$ c) $\frac{x}{9y^7}$ 8. a) 6 b) 1 c) -3, 4
 3. a) $11x - 2$ b) $4x^2 + 7x - 15$ d) $-1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ e) $\pm 1, \pm \sqrt{2}$ f) $\frac{2}{3}, \frac{22}{3}$
 c) $a - b$ d) $4x^2 + 12x + 9$ g) $\frac{12}{5}$
 e) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
 4. a) $(2x - 5)(2x + 5)$ b) $(2x - 3)(x + 4)$ 9. a) $]-4, 3[$ b) $]-2, 4[$
 c) $(x - 3)(x - 2)(x + 2)$ d) $x(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$ c) $]-2, 0[\cup]1, +\infty[$ d) $]1, 7[$
 e) $3x^{-1/2}(x - 1)(x - 2)$ f) $xy(x - 2)(x + 2)$ e) $]-1, 3[$
 5. a) $\frac{x + 2}{x - 2}$ b) $\frac{x - 1}{x - 3}$ 10. a) Faux b) Vrai c) Faux
 d) Faux e) Faux f) Vrai
 c) $\frac{1}{x - 2}$ d) $-(x + y)$

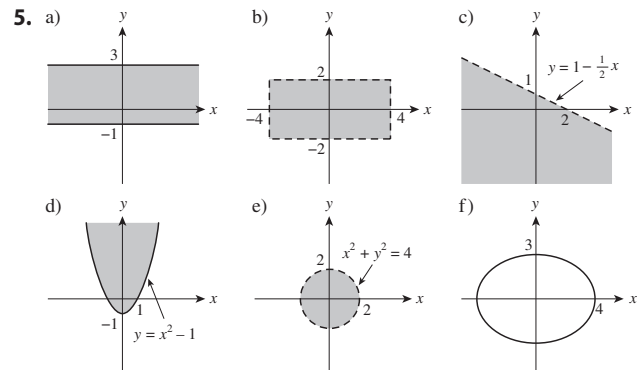
B | Test : Géométrie analytique

- Écrivez une équation de la droite qui passe par le point $(2, -5)$ et qui
 - est de pente -3 .
 - est parallèle à l'axe Ox .
 - est parallèle à l'axe Oy .
 - est parallèle à la droite $2x - 4y = 3$.
- Cherchez une équation du cercle centré en $(-1, 4)$ et passant par le point $(3, -2)$.
- Cherchez le centre et le rayon du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 = 0$.
- Soient $A(-7, 4)$ et $B(5, -12)$ deux points d'un plan.
 - Quelle est la pente de la droite qui passe par A et B .
 - Cherchez une équation de la droite qui passe par A et B . Quels sont ses points d'intersection avec les axes ?
 - Cherchez le point milieu du segment AB .
 - Quelle est la longueur du segment AB .
 - Cherchez une équation de la médiatrice de AB .
 - Cherchez une équation d'un cercle dont AB est un diamètre.
- Hachurez la région du plan Oxy définie par l'équation ou par les inégalités.

a) $-1 \leq y \leq 3$	b) $ x < 4$ et $ y < 2$	c) $y < 1 - \frac{1}{2}x$
d) $y \geq x^2 - 1$	e) $x^2 + y^2 < 4$	f) $9x^2 + 16y^2 = 144$

Réponses au test B : Géométrie analytique

- $y = -3x + 1$
 - $y = -5$
 - $x = 2$
 - $y = \frac{1}{2}x - 6$
- $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 52$
- Centre $(3, -5)$, rayon 5
- $-\frac{4}{3}$
 - $4x + 3y + 16 = 0$; intersection avec Ox -4 , intersection avec Oy $-\frac{16}{3}$
 - $(-1, -4)$
 - 20
 - $3x - 4y = 13$
 - $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 100$



C Test : Fonctions

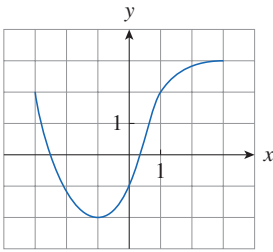
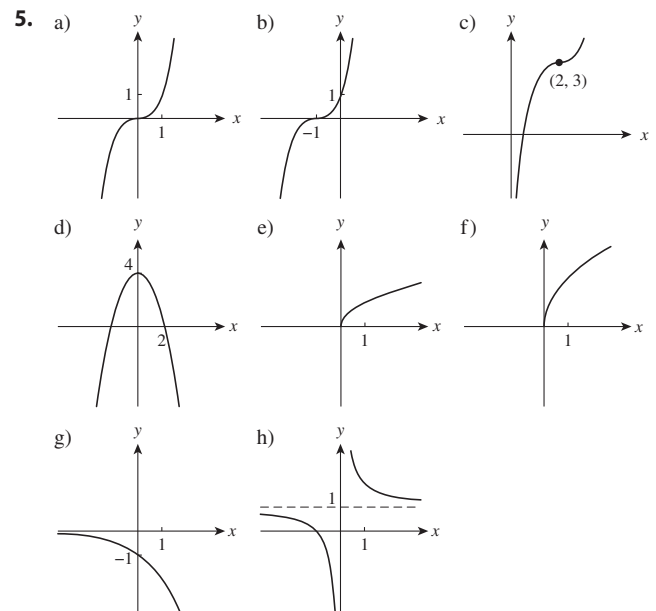


Figure pour problème 1

- Vous voyez à gauche le graphique d'une fonction f .
 - Quelle est la valeur $f(-1)$?
 - Que vaut $f(2)$?
 - Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) = 2$?
 - Cherchez les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$.
 - Déterminez le domaine de définition et l'ensemble image de f .
- Pour $f(x) = x^3$, calculez le quotient différentiel $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ et simplifiez-le.
- Déterminez le domaine de définition de la fonction.
 - $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$
 - $g(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$
 - $h(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x^2-1}$
- Par quelles transformations du graphique de f obtient-on les graphiques des fonctions suivantes ?
 - $y = -f(x)$
 - $y = 2f(x) - 1$
 - $y = f(x-3) + 2$
- Esquissez à la main et sans l'aide d'une calculatrice les graphiques suivants.
 - $y = x^3$
 - $y = (x+1)^3$
 - $y = (x-2)^3 + 3$
 - $y = 4 - x^2$
 - $y = \sqrt{x}$
 - $y = 2\sqrt{x}$
 - $y = -2^x$
 - $y = 1 + x^{-1}$
- Soit $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$
 - Calculez $f(-2)$ and $f(1)$.
 - Faites le graphique de f .
- Si $f(x) = x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = 2x - 3$. Définissez les fonctions suivantes.
 - $f \circ g$
 - $g \circ f$
 - $g \circ g \circ g$

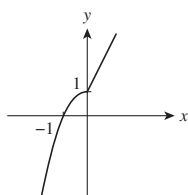
Réponses du test C : Fonctions

- 2
 - 2,8
 - 3, 1
 - 2,5 ; 0,3
 - $[-3, 3], [-2, 3]$
- $12 + 6h + h^2$
- $] -\infty, -2[\cup] -2, 1[\cup] 1, +\infty[$
 - $] -\infty, +\infty[$
 - $] -\infty, -1[\cup] 1, 4]$
- Réflexion par rapport à l'axe Ox .
 - Étirement vertical de facteur 2, suivi d'une translation d'une unité vers le bas.
 - Translation de trois unités vers la droite, puis de deux unités vers le haut.



6. a) $-3, 3$

b)



7. a) $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 8x + 2$
 b) $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 4x - 5$
 c) $(g \circ g \circ g)(x) = 8x - 21$

D | Test : Trigonométrie

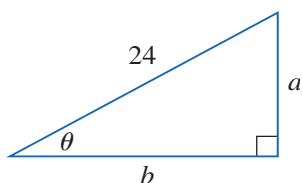


Figure pour problème 5

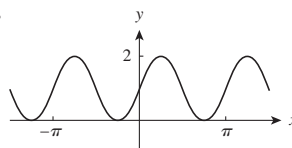
- Convertissez les degrés en radians.
 - 300°
 - -18°
- Convertissez les radians en degrés.
 - $\frac{5\pi}{6}$
 - 2
- Calculez la longueur de l'arc d'un cercle de 12 cm de rayon sous-tendu par un angle au centre de 30° .
- Quelles sont les valeurs exactes ?
 - $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)$
 - $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$
 - $\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right)$
- Exprimez les longueurs a et b de la figure en termes de θ .
- Calculez $\sin(x + y)$ sachant que $\sin x = \frac{1}{3}$, $\sec y = \frac{5}{4}$ et que x et y sont compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.
- Démontrez les identités.
 - $\operatorname{tg} \theta \sin \theta + \cos \theta = \sec \theta$
 - $\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \sin 2x$
- Cherchez toutes les valeurs de x comprises entre $\sin 2x = \sin x$ et $-1 \leq x \leq 2\pi$.
- Dessinez le graphique de la fonction $y = 1 + \sin 2x$ sans faire usage de la calculatrice.

Réponses du test D : Trigonométrie

- $\frac{5\pi}{3}$
 - $\frac{-\pi}{10}$
- 150°
 - $\frac{360^\circ}{\pi} \approx 114.6^\circ$
- 2π cm
- $\sqrt{3}$
 - $-\frac{1}{2}$
 - 2
- $24 \sin \theta$
 - $24 \cos \theta$

- $\frac{1}{15}(4 + 6\sqrt{2})$
- $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$

9.



Si vous avez rencontré des difficultés, consultez l'annexe C de ce livre.

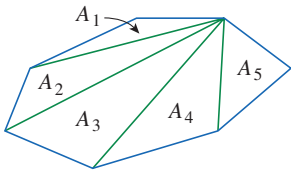


www.shutterstock.com • 101667718

Un aperçu du calcul différentiel et intégral

Mark Twain a écrit, « Si vous n’aimez pas le temps qu’il fait en Nouvelle Angleterre, attendez quelques minutes. » Le temps change, en effet, rapidement en Nouvelle Angleterre et le calcul différentiel et intégral est justement l’étude du changement, du changement instantané. Les prévisions du temps sont basées sur de puissants modèles mathématiques dans lesquels le calcul différentiel et intégral joue un rôle de premier plan.

Le calcul différentiel et intégral est fondamentalement différent des mathématiques que vous avez étudiées jusqu’à présent. Il est moins statique et plus dynamique. Il se rapporte au changement et au mouvement ; il traite de quantités qui se rapprochent d’autres quantités. Voilà pourquoi il peut être utile de survoler le sujet avant d’entamer son étude en profondeur. Nous donnons ici un aperçu de certaines idées maîtresses du calcul différentiel et intégral en faisant ressortir comment des limites surviennent quand nous essayons de résoudre des problèmes très divers.



$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

Figure 1

L'aire du polygone est la somme des aires des triangles.

■ Le problème de l'aire

Les origines du calcul différentiel et intégral remontent à 2500 ans, au temps où les Grecs calculaient des aires par la méthode « d'exhaustion ». Ils savaient comment mesurer l'aire A d'un polygone quelconque en le décomposant comme dans la figure 1 en triangles, dont ils prenaient la somme des aires.

Il est beaucoup plus difficile de mesurer l'aire d'une figure curviligne. La méthode d'exhaustion des Grecs consistait à inscrire et à circonscrire des polygones et à en faire croître le nombre de côtés. La figure 2 illustre ce procédé dans le cas particulier d'un cercle à l'intérieur duquel sont inscrits des polygones réguliers.

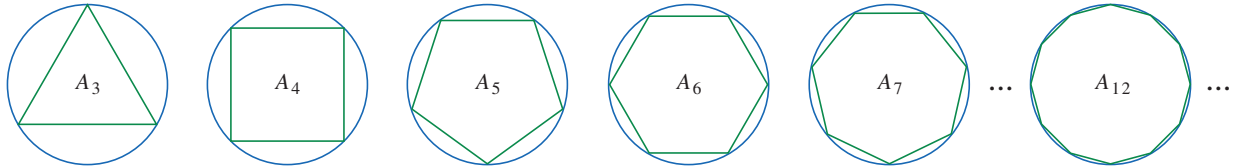


Figure 2

Les polygones réguliers inscrits qui servent à obtenir l'aire du cercle.

Soit A_n l'aire du polygone inscrit de n côtés. Lorsque n augmente, A_n s'approche de plus en plus de l'aire du cercle. Nous disons que l'aire du cercle est la *limite* des aires des polygones inscrits et nous écrivons

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n.$$

Les Grecs n'employaient pas ce terme de limite. Cependant, Eudoxe (5^{ème} s. av. J.-C.) réussit par exhaustion à établir, par un raisonnement indirect, la formule de l'aire du cercle qui nous est familière : $A = \pi r^2$.

C'est la même idée qui présidera au chapitre 5 pour trouver les aires de régions du type de celles qui sont représentées à la figure 3. Nous calculerons d'abord une approximation de l'aire souhaitée en additionnant les aires des rectangles (comme ceux de la figure 4), puis nous ferons décroître la base des rectangles et enfin nous prendrons A comme la limite de ces sommes d'aires de rectangles.

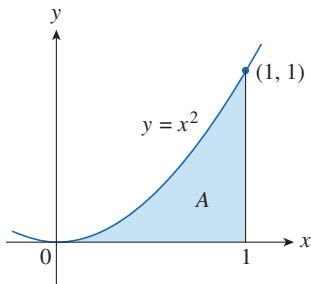


Figure 3

Soit A l'aire de la région ombrée.

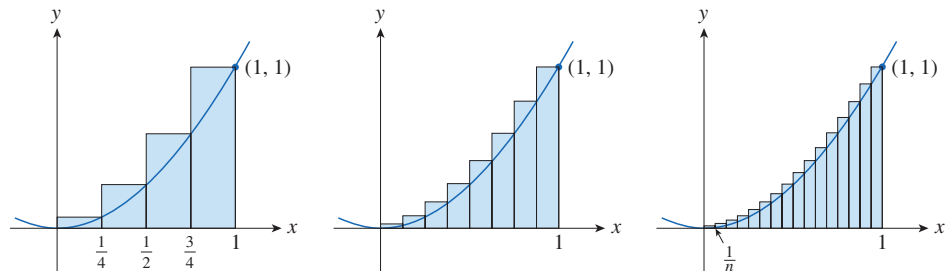
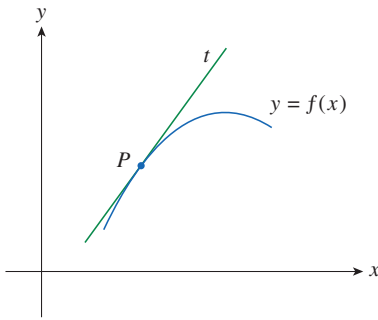


Figure 4

L'aire A est approchée par l'aire des rectangles.

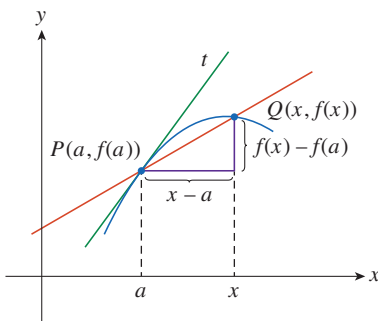
Le calcul d'aire est central dans la branche de l'analyse appelée plus précisément *calcul intégral*. Les techniques que nous mettrons au point au chapitre 5 pour calculer des aires nous permettront aussi de calculer le volume d'un solide, la longueur d'un arc de courbe, la poussée exercée par l'eau contre une digue, la masse et le centre de gravité d'une tige et le travail effectué pour pomper l'eau hors d'une citerne.

**Figure 5**La tangente en P .

■ Le problème de la tangente

Le problème consiste à trouver l'équation de la droite t tangente à une courbe d'équation $y = f(x)$ en un point P donné. (Nous donnerons une définition précise d'une tangente au chapitre 2. Pour le moment nous nous contentons de la voir comme une droite qui touche la courbe comme le fait la droite t dans la figure 5.) Puisque nous savons que la droite t passe par le point P , il nous suffirait de connaître sa pente m pour pouvoir en écrire une équation. Nous aurions besoin de deux points sur la droite pour en déterminer la pente et nous n'en avons qu'un seul. Pour contourner le problème, nous cherchons d'abord une approximation de m en prenant un point Q très voisin de P et en calculant la pente m_{PQ} de la sécante PQ . Sur la figure 6, nous voyons que

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (1)$$

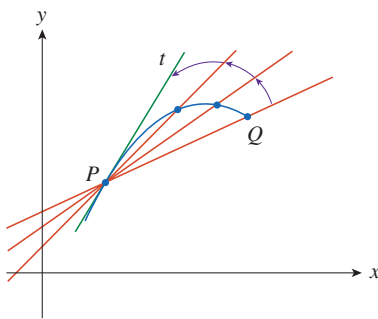
**Figure 6**La sécante PQ .

Imaginons maintenant que Q se meuve sur la courbe en direction de P , comme sur la figure 7. Vous remarquez que la sécante pivote autour de P et s'approche de la position tangente comme position limite. En termes de pente, cela se traduit par : la pente m_{PQ} de la sécante s'approche de plus en plus de la pente m de la tangente. Nous écrivons cela

$$m = \lim_{Q \rightarrow P} m_{PQ}$$

et nous disons que m est la limite de m_{PQ} lorsque Q s'approche de P en suivant la courbe. Comme x s'approche de a lorsque Q s'approche de P , nous pouvons encore utiliser l'équation (1) et écrire

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (2)$$

**Figure 7**

Des sécantes qui tendent vers la position de la tangente.

Le chapitre 2 présente des exemples illustratifs de ce procédé.

Le problème de la tangente est à l'origine de la branche de l'analyse appelée *calcul différentiel*, qui, plus de 2000 ans après le calcul intégral, n'avait toujours pas été inventé. Les idées fondamentales du calcul différentiel sont dues au mathématicien français Pierre de Fermat (1601-1665) et furent développées par les mathématiciens anglais John Wallis (1616-1703), Isaac Barrow (1630-1677) et Isaac Newton (1642-1727) et par le mathématicien allemand Gottfried Leibniz (1646-1716).

Ces deux branches de l'analyse et leurs problèmes principaux, le calcul d'aire et la détermination de la tangente, semblent bien différents à première vue, et pourtant ils sont très proches l'un de l'autre. Ils constituent des problèmes inverses au sens qui sera décrit au chapitre 5.

■ La vitesse

Lorsque nous lisons sur le tachymètre d'une voiture qu'elle se déplace à 60 km/h, quelle est au juste l'information reçue ? Nous savons que si cette vitesse restait constante pendant une heure, la voiture parcourrait 60 km. Mais si la vitesse de la voiture n'est pas constante, qu'est-ce que cela signifie ? Qu'elle est de 60 km/h à un moment donné.

En vue de répondre à cette question, analysons le mouvement d'une voiture qui se déplace en ligne droite et supposons avoir pu mesurer la distance parcourue après chaque seconde. Ces distances sont reprises dans le tableau que voici.

t = temps écoulé (en s)	0	1	2	3	4	5
d = distance (en m)	0	2	9	24	42	71

Comme première étape en vue de trouver la vitesse après 2 secondes, calculons la vitesse moyenne sur l'intervalle de temps $2 \leq t \leq 4$:

$$\begin{aligned} \text{vitesse moyenne} &= \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps écoulé}} \\ &= \frac{13 - 3}{4 - 2} = 5 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

De même, la vitesse moyenne sur l'intervalle de temps $2 \leq t \leq 3$ est

$$\text{vitesse moyenne} = \frac{7,6 - 3}{3 - 2} = 4,6 \text{ m/s.}$$

Nous pressentons que la vitesse à l'instant $t = 2$ ne peut pas être très différente de la vitesse moyenne calculée sur un intervalle de temps très court qui commence à l'instant $t = 2$. Aussi, imaginons que la distance parcourue ait été mesurée tous les dixièmes de seconde, cela donne le tableau :

t	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
d	9,00	10,02	11,16	12,45	13,96	15,80

Alors, nous pouvons calculer la vitesse moyenne, par exemple, sur l'intervalle de temps $[2 ; 2,5]$:

$$\text{vitesse moyenne} = \frac{5,12 - 3,05}{2,5 - 2} = 4,14 \text{ m/s.}$$

Les résultats du même calcul effectué sur les autres intervalles de temps sont consignés dans le tableau :

Intervalle de temps	$[2 ; 3]$	$[2 ; 2,5]$	$[2 ; 2,4]$	$[2 ; 2,3]$	$[2 ; 2,2]$	$[2 ; 2,1]$
Vitesse moyenne (m/s)	15,0	13,6	12,4	11,5	10,8	10,2

Les vitesses moyennes sur des intervalles de plus en plus petits semblent s'approcher d'un nombre proche de 3 et donc il est normal de s'attendre à ce que la vitesse moyenne en $t = 2$ exactement soit de l'ordre de 3 m/s. Au chapitre 2, nous allons définir la vitesse instantanée d'un objet en mouvement comme la valeur limite des vitesses moyennes sur des intervalles de temps de plus en plus petits.

La figure 8 montre une représentation graphique du mouvement d'une voiture caractérisée par la distance parcourue en fonction du temps. Si nous notons $d = f(t)$, alors $f(t)$ est le nombre de mètres parcourus après t secondes. La vitesse moyenne sur un intervalle de temps $[2, t]$ est

$$\text{vitesse moyenne} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps écoulé}} = \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}.$$

Or, cette expression est la même que celle de la pente de la sécante PQ à la figure 8. La vitesse v au moment $t = 2$ est la valeur limite de cette vitesse moyenne quand t tend vers 2 ; à savoir

$$v = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$$

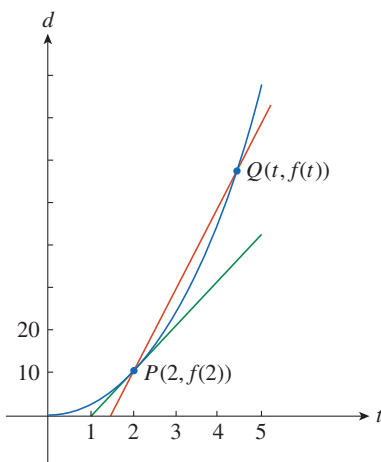


Figure 8

Graphique qui illustre le mouvement de la voiture.

Nous reconnaissons ici la même formule que celle qui, à l'équation (2), donnait la pente de la tangente à la courbe en P .

En définitive, lorsque nous résolvons un problème de tangente par le calcul différentiel, nous résolvons aussi un problème de vitesse. Les mêmes techniques nous permettent également de résoudre les problèmes de taux de variation dans toutes les sciences naturelles et sociales.

■ La limite d'une suite

Au 5^{ème} siècle av. J.-C., le philosophe grec Zénon d'Élée posa quatre problèmes, connus aujourd'hui sous le nom de *paradoxes de Zénon*, destinés à défier quelques-unes des idées en vigueur à cette époque à propos de l'espace et du temps. Le deuxième de ces paradoxes parle d'une course entre le héros grec Achille et une tortue qui a été avantagée au départ. Voici l'argumentation que tient Zénon pour démontrer qu'Achille ne pourra jamais dépasser la tortue : supposons que le point de départ d'Achille soit a_1 et celui de la tortue, t_1 . (voyez la figure 9). Au moment où Achille arrive en $a_2 = t_1$, la tortue a déjà gagné la position t_2 . Au moment où Achille arrive en $a_3 = t_2$, la tortue est en t_3 . Ce processus se poursuit indéfiniment et la tortue sera donc toujours en tête ! Mais le sens commun n'y trouve pas son compte.

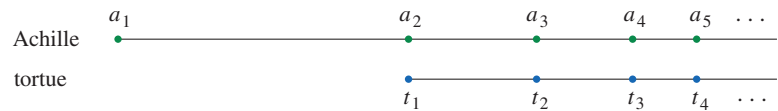


Figure 9

Une illustration graphique de la course entre Achille et une tortue.

Une façon d'expliquer ce paradoxe est d'impliquer la notion de *suite*. Les positions successives d'Achille ($a_1, a_2, a_3, \dots$) ou les positions successives de la tortue ($t_1, t_2, t_3, \dots$) forment ce qu'il est commun d'appeler une suite.

De façon générale, une suite $\{a_n\}$, est un ensemble de nombres écrits dans un ordre bien défini. Par exemple, la suite

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$$

peut être décrite par la formule générale de son $n^{\text{ème}}$ terme :

$$a_n = \frac{1}{n}$$

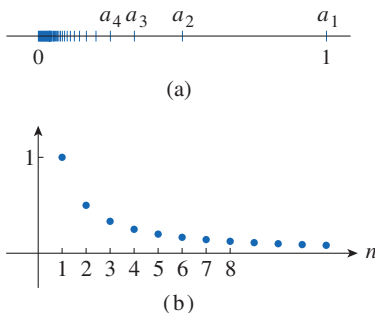


Figure 10

Deux façons de visualiser une suite.

Nous pouvons visualiser cette suite en reportant ses termes sur une droite graduée, comme à la figure 10(a) ou en dessinant son graphique, comme à la figure 10(b). Que ce soit sur l'une ou l'autre figure, il est évident que les termes de la suite $a_n = 1/n$ deviennent de plus en plus proches de 0 lorsque n croît. En fait, nous pouvons trouver des termes aussi proches que l'on veut à condition de rendre n suffisamment grand. Nous disons que la limite de cette suite est 0 et nous écrivons cela

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

La notation tout à fait générale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$$

signifie que les termes a_n s'approche du nombre L lorsque n devient grand. Plus précisément, les nombres a_n peuvent devenir aussi proches que l'on veut de L à condition de choisir n suffisamment grand.

Le concept de limite d'une suite intervient dans la représentation décimale d'un nombre réel. Par exemple, si

$$a_1 = 3,1$$

$$a_2 = 3,14$$

$$a_3 = 3,141$$

$$a_4 = 3,1415$$

$$a_5 = 3,14159$$

$$a_6 = 3,141592$$

$$a_7 = 3,1415926$$

$$\vdots$$

alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \pi$$

Les termes de cette suite sont les approximations rationnelles de π .

Retournons au paradoxe de Zénon. Les positions successives d'Achille et de la tortue forment des suites $\{a_n\}$ et $\{t_n\}$ où $a_n < t_n$, quel que soit n . On peut montrer que ces deux suites ont même limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = p = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n.$$

C'est précisément en ce point p qu'Achille dépasse la tortue.

■ La somme d'une série

Un autre paradoxe de Zénon, que nous a transmis Aristote, est le suivant : « un homme qui se trouve dans une pièce ne peut pas marcher jusqu'au mur. Pour faire cela, il devrait d'abord avoir parcouru la moitié de la distance qui le sépare du mur, ensuite, la moitié de la distance qui reste, et puis encore la moitié de ce qu'il reste encore. Ce procédé peut être poursuivi indéfiniment et ne s'arrête donc jamais » (voyez la figure 11.)

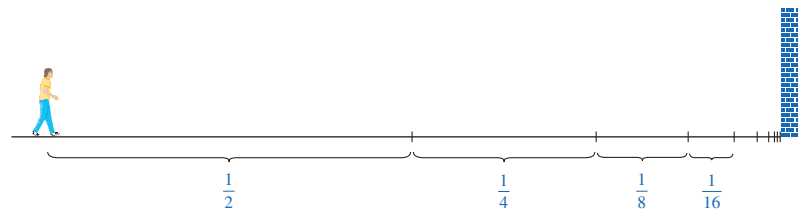


Figure 11

Une visualisation de l'homme qui marche vers le mur.

Nous savons pertinemment bien que l'homme peut atteindre le mur, ce qui suggère que peut-être la distance totale pourrait être le résultat d'une somme d'une infinité de distances de plus en plus petites, comme ceci :

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \quad (3)$$

Zénon, lui, pensait que cela n'avait aucun sens d'additionner une infinité de nombres. Il y a pourtant d'autres situations où, implicitement, nous additionnons une infinité de nombres. Par exemple, la notation décimale $0,\bar{3} = 0,3333 \dots$ signifie

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1\,000} + \frac{3}{10\,000} + \dots$$

et, d'une certaine façon, il doit être vrai que

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1\,000} + \frac{3}{10\,000} + \dots = \frac{1}{3}.$$

Plus généralement, si d_n désigne le $n^{\text{ième}}$ chiffre de l'écriture décimale d'un nombre, alors

$$0.d_1d_2d_3d_4\dots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \dots + \frac{d_n}{10^n} + \dots$$

Par conséquent, certaines sommes infinies, ou séries comme on les appelle, ont un sens. Encore faut-il définir soigneusement ce qu'est la somme d'une série.

Reportons-nous à la série de l'expression (3) et notons s_n la somme des n premiers termes de la série. Alors

$$s_1 = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0,75$$

$$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0,875$$

$$s_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 0,9375$$

$$s_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = 0,96875$$

$$s_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = 0,984375$$

$$s_7 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} = 0,9921875$$

$\vdots$

$$s_{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1024} \approx 0,999902344$$

$\vdots$

$$s_{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{16}} \approx 0,99998474$$

Nous pouvons observer que, plus nous additionnons de termes, plus les sommes partielles s'approchent de 1. En fait, il peut être montré qu'en prenant n suffisamment grand (c'est-à-dire en additionnant un nombre suffisamment grand de termes), les sommes partielles s_n peuvent être rendues arbitrairement proches de 1. Il semble dès lors raisonnable de dire que la somme de la série est 1 et d'écrire

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$$

Nous allons explorer davantage ces sujets au chapitre 8. Ensuite, nous allons exploiter les idées de Newton qui relient les séries au calcul différentiel et intégral

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 1.$$

Au chapitre 8, nous discuterons plus en détail de ces idées. Nous utiliserons ensuite l'idée de Newton consistant à combiner les séries infinies avec le calcul différentiel et intégral.

■ En résumé

Nous avons constaté que le concept de limite est présent lorsque nous cherchons à calculer l'aire d'une région, la pente de la tangente à une courbe, la vitesse d'une voiture ou la somme d'une série. Ces problèmes ont en commun qu'une quantité est obtenue comme la limite d'autres quantités, facilement calculables. C'est par ce concept de base, celui de limite, que le calcul différentiel et intégral se distingue des autres branches des mathématiques. En fait, il pourrait être défini comme la branche des mathématiques qui traite des limites.

Après avoir inventé sa version du calcul différentiel et intégral Isaac Newton s'en servit pour expliquer le mouvement des planètes autour du soleil. Aujourd'hui, cette discipline est mise au service du calcul des trajectoires des satellites et des vaisseaux spatiaux, de la prédiction des effectifs de population, du calcul de la vitesse d'augmentation du prix du café, des prévisions météorologiques, de la mesure du débit cardiaque, du calcul des primes d'assurance vie et de toutes sortes d'autres choses. Ce livre se propose d'aborder quelques-unes de ces applications.

Afin de faire sentir la puissance du sujet, nous terminons cet aperçu par une liste de questions auxquelles vous serez à même de répondre grâce au calcul différentiel et intégral :

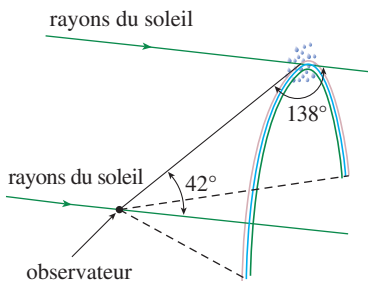
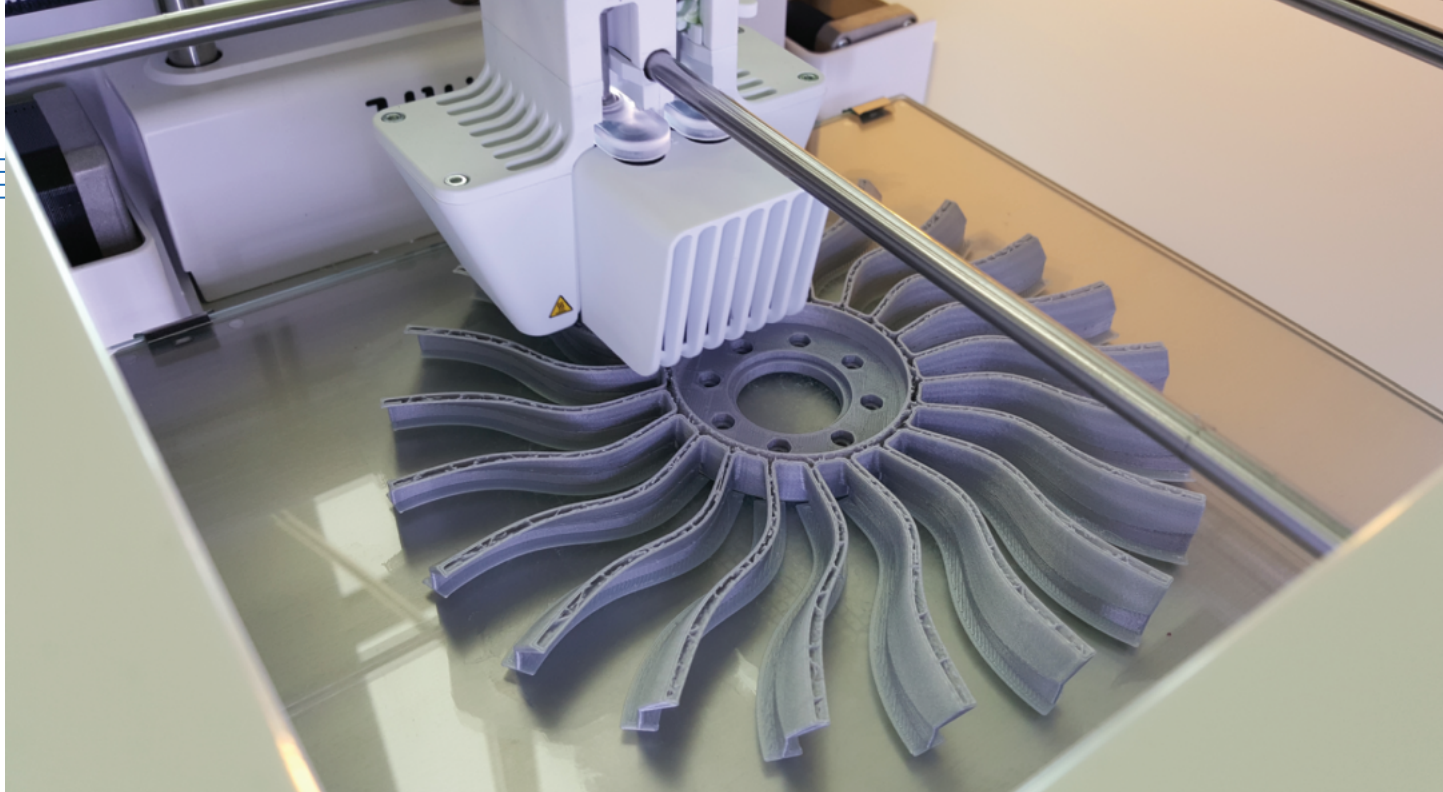


Figure 12

L'angle d'élévation du point le plus haut d'un arc-en-ciel.

1. Comment expliquer le fait, illustré à la figure 12, qu'un observateur voit le point le plus haut d'un arc-en-ciel sous un angle de 42° (voyez la page 313) ?
2. Comment expliquer la forme des boîtes de conserve alignées sur les rayons des supermarchés (voyez la page 372) ?
3. Quelle est la meilleure place au théâtre (voir page 574) ?
4. À quelle distance de l'aéroport un pilote doit-il entamer la descente (voyez la page 237) ?
5. Comment assembler les courbes qui guident le tracé des lettres produites par une imprimante laser (voyez la page 236) ?
6. Au base-ball, où doit se placer un joueur intermédiaire appelé à relayer une balle lancée vers la base initiale (voyez la page 653) ?
7. Une balle lancée en l'air, prend-elle plus de temps pour atteindre son apogée que pour retomber à sa hauteur initiale (voyez la page 643) ?



HeimatPlanet/Shutterstock.com

L'impression 3D est devenue récemment très populaire du fait des progrès technologiques et du fait que le prix d'achat est devenu moins élevé. Les applications de l'impression 3D sont utilisées en particulier dans le développement rapide et l'évaluation de prototypes, dans l'industrie pour l'extrusion, le collage et le soudage de matériaux, en médecine où la bio-impression inclut l'impression 3D d'organes artificiels.

L'imprimante 3D cartésienne est le concept le plus courant, habituellement utilisée avec un moteur électrique pour chacun des trois axes. L'imprimante 3D polaire utilise une dimension linéaire et deux angles pour repérer correctement un objet. Chaque imprimante est basée sur une méthode différente pour représenter un point dans l'espace.

9

Les vecteurs et la géométrie de l'espace

Plan du Chapitre

- 9.1 Le repère cartésien d'un espace à trois dimensions
- 9.2 Les vecteurs
- 9.3 Le produit scalaire
- 9.4 Le produit vectoriel
- 9.5 Les équations de droites et de plans
- 9.6 Fonctions et surfaces
- 9.7 Les coordonnées cylindriques et sphériques

Dans ce chapitre, nous allons introduire les vecteurs et des systèmes de coordonnées adaptés à un espace de dimension trois. Telles sont les bases de connaissance pour étudier les fonctions de deux variables parce que leur représentation graphique est une surface de l'espace. Les vecteurs sont des outils alternatifs plus simples pour décrire des droites et des plans de l'espace ainsi que la vitesse et l'accélération d'un objet qui se déplace dans l'espace.

9.1 | Le repère cartésien d'un espace à trois dimensions

■ Localisation dans l'espace

Pour situer un point dans un plan, il faut deux nombres. Nous savons qu'à n'importe quel point du plan est associé un couple de nombres réels (a, b) , où a est l'abscisse et b l'ordonnée. Voilà pourquoi un plan est appelé un espace de dimension deux. Pour situer un point dans l'espace, il faut trois nombres. Tout point de l'espace est représenté par un triplet (a, b, c) de nombres réels.

En vue de représenter des points dans l'espace, il faut d'abord choisir un point fixe O (l'origine) et trois axes orientés passant par O , perpendiculaires entre eux, appelés les **axes de coordonnées**, et étiquetés axe Ox , axe Oy et axe Oz . Il est habituel de choisir les axes Ox et Oy horizontaux et l'axe Oz vertical. L'orientation des axes est celle de la Figure 9.1.

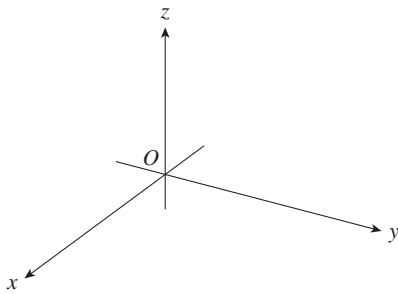


Figure 9.1
Le système de coordonnées.

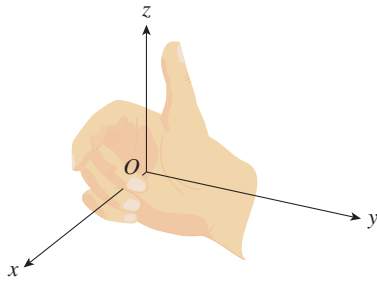


Figure 9.2
La règle de la main droite.

Le sens de l'axe Oz est déterminé par la **règle de la main droite** comme vous pouvez le voir dans la Figure 9.2 : si une personne enroule les doigts de sa main droite autour de l'axe Oz à la manière d'une rotation de 90° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, allant de l'axe Ox vers l'axe Oy , alors son pouce est pointé dans le sens positif de l'axe Oz .

Les trois axes de coordonnées déterminent les trois **plans de coordonnées** représentés dans la Figure 9.3. Le plan Oxy est le plan des axes Ox et Oy ; le plan Oyz celui des axes Oy et Oz ; le plan Oxz celui des axes Ox et Oz . Ces trois plans de coordonnées divisent l'espace en huit parties, appelées **octants**. Le **premier octant**, au premier plan, correspond à la partie positive de chacun des axes.

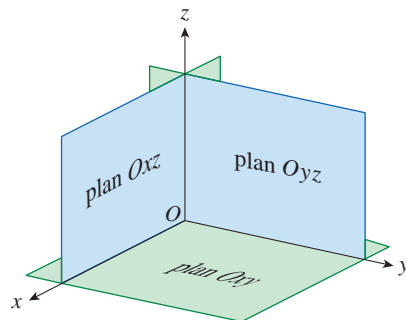


Figure 9.3
Les plans de coordonnées.

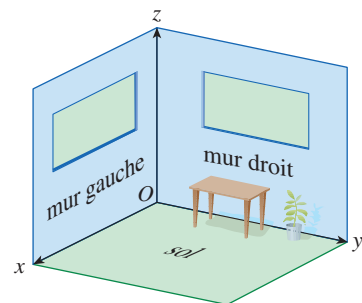


Figure 9.4
Analogie des murs d'une chambre avec les plans de coordonnées.

Il peut être utile de visualiser les plans de coordonnées et les figures tridimensionnelles en utilisant l'analogie illustrée dans la figure 9.4. Regardez un coin inférieur d'une pièce et choisissez ce coin comme origine. Le mur à votre gauche est le plan Oxz , le mur à votre droite le plan Oyz , et le sol le plan Oxy . L'axe Ox coïncide avec l'intersection du sol et du mur de gauche. L'axe Oy coïncide avec l'intersection du sol et du mur de droite. L'axe Oz se dresse du sol vers le plafond le long de l'intersection des deux murs. Vous êtes dans le premier octant et vous pouvez imaginer maintenant les sept autres pièces situées dans les sept autres octants (trois au même étage et quatre à l'étage inférieur), tous reliés au coin commun O .

C'est donc un plan horizontal, parallèle au plan Oxy , situé trois unités au-dessus de lui comme illustré dans la Figure 9.9.

- b) L'équation $y = 5$ représente l'ensemble de tous les points de $\mathbb{R}^3$ dont l'ordonnée est 5.

C'est un plan vertical, parallèle au plan Oxz , situé 5 unités à droite de lui, comme illustré dans la Figure 9.10.

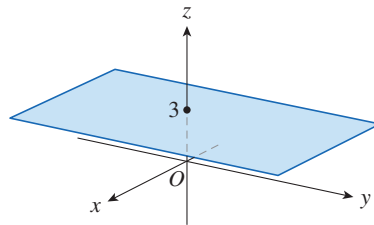


Figure 9.9
Représentation graphique
du plan $z = 3$ dans $\mathbb{R}^3$.

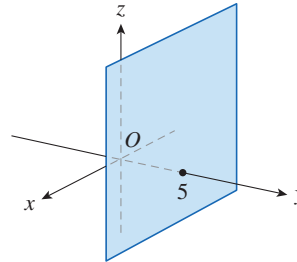


Figure 9.10
Représentation graphique
du plan $y = 5$ dans $\mathbb{R}^3$.

En regardant de plus près

1. Le contexte dans lequel une équation est donnée détermine s'il s'agit d'une courbe dans $\mathbb{R}^2$ ou d'une surface dans $\mathbb{R}^3$. Dans l'exemple 1, $y = 5$ représente un plan dans $\mathbb{R}^3$, mais $y = 5$ peut aussi bien sûr représenter une droite dans $\mathbb{R}^2$ en géométrie analytique de dimension deux.
2. Généralement, $x = k$ où k est une constante représente un plan parallèle au plan Oyz , $y = k$, un plan parallèle au plan Oxz et $z = k$ un plan parallèle au plan Oxy . Par exemple, dans la figure 9.6, les faces du parallélépipède rectangle sont les trois plans de coordonnées $x = 0$ (plan Oyz), $y = 0$ (plan Oxz) et $z = 0$ (plan Oxy) ainsi que les plans $x = a$, $y = b$ et $z = c$.

Exemple 2 Décrire des régions données par des équations

- a) Décrire les points (x, y, z) qui satisfont aux équations

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{et} \quad z = 3$$

- b) Décrire la surface de $\mathbb{R}^3$ représentée par l'équation $x^2 + y^2 = 1$.

Solution

- a) L'équation $z = 3$ représente un plan horizontal.

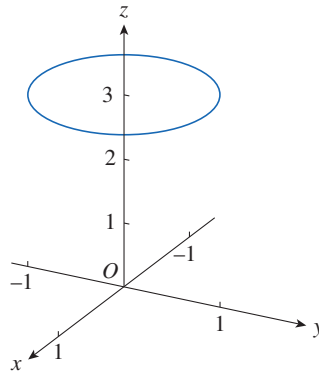
Comme $x^2 + y^2 = 1$, les points appartiennent au cercle de rayon 1 centré sur l'axe Oz .

Ainsi les points qui satisfont simultanément les deux équations se trouvent sur un cercle de rayon 1 dans le plan horizontal $z = 3$. Voir la Figure 9.11.

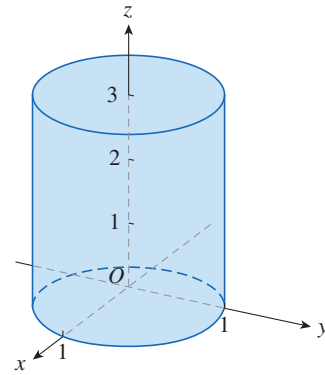
- b) L'équation $x^2 + y^2 = 1$ ne contient pas de condition restrictive selon z , ainsi un point (x, y, z) peut appartenir à un cercle de n'importe quel plan $z = k$.

La surface $x^2 + y^2 = 1$ de $\mathbb{R}^3$ est donc faite de tous les cercles horizontaux possibles $x^2 + y^2 = 1$, $z = k$.

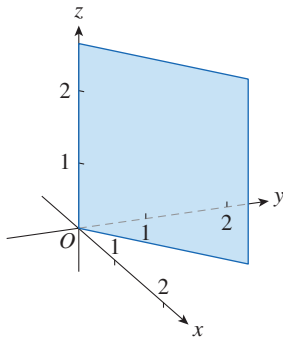
Il s'agit du cylindre circulaire droit de rayon 1 et d'axe Oz . Voir la Figure 9.12.

**Figure 9.11**

Le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1, z = 3$.

**Figure 9.12**

Le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 1$, ce cylindre s'étend indéfiniment aussi bien vers le haut que vers le bas.

**Figure 9.13**

Le plan $y = x$.

Exemple 3 Une Région plane

Décrire et dessiner la surface dans $\mathbb{R}^3$ représentée par l'équation $y = x$.

Solution

L'équation représente l'ensemble de tous les points de $\mathbb{R}^3$ dont l'abscisse et l'ordonnée sont égales, c'est-à-dire, $\{(x, x, z) \mid x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$.

C'est un plan vertical qui coupe le plan Oxy selon la droite $y = x, z = 0$.

La figure 9.13 montre la portion de ce plan située dans le premier octant. ■

Distance dans l'espace

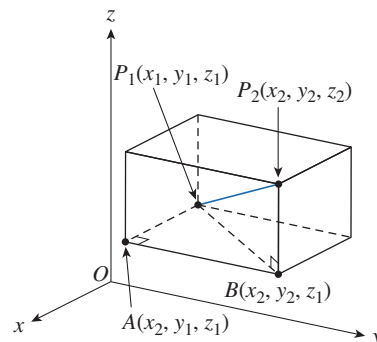
La formule bien connue de la distance entre deux points dans un plan s'étend aisément à l'espace de dimension trois.

Formule de la distance dans l'espace à trois dimensions

La distance $|P_1 P_2|$ entre les points $P_1(x_1, y_1, z_1)$ et $P_2(x_2, y_2, z_2)$ est égale à

$$|P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Pour justifier cette formule, considérons un parallélépipède rectangle comme illustré dans la Figure 9.14. Les points P_1 et P_2 sont des sommets opposés et les faces du parallélépipède sont parallèles aux plans de coordonnées.

**Figure 9.14**

Boîte parallélépipédique pour illustrer la formule de distance.

Si $A(x_2, y_1, z_1)$ et $B(x_2, y_2, z_1)$ sont les sommets indiqués sur la figure, alors

$$|P_1 A| = |x_2 - x_1| \quad |AB| = |y_2 - y_1| \quad |BP_2| = |z_2 - z_1|$$

Les deux triangles $P_1 B P_2$ et $P_1 A B$ sont des triangles rectangles. Alors, d'après le théorème de Pythagore

$$|P_1 P_2|^2 = |P_1 B|^2 + |BP_2|^2 \quad \text{et} \quad |P_1 B|^2 = |P_1 A|^2 + |AB|^2$$

En combinant ces deux équations, nous obtenons :

$$\begin{aligned} |P_1 P_2|^2 &= (|P_1 A|^2 + |AB|^2) + |BP_2|^2 \\ &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \end{aligned}$$

Par conséquent, $|P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Exemple 4 Distance entre deux points

La distance entre le point $P(2, -1, 7)$ et le point $Q(1, -3, 5)$ est égale à

$$|PQ| = \sqrt{(1 - 2)^2 + (-3 + 1)^2 + (5 - 7)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3. \quad \blacksquare$$

Exemple 5 Utiliser une distance pour définir une sphère

Déterminer une équation de la sphère de rayon r et de centre $C(h, k, l)$.

Solution

Par définition, une sphère est l'ensemble de tous les points $P(x, y, z)$ dont la distance par rapport à C est r (voir la Figure 9.15).

Un point P est donc sur la sphère si et seulement si $|PC| = r$.

Écrivons l'expression de la distance de P à C , et élevons ensuite au carré les deux membres de cette expression, nous obtenons

$$\begin{aligned} |PC| &= r \\ \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2} &= r \\ (x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 &= r^2 \end{aligned}$$

Distance de P à C .

Carrés des deux membres de l'équation. ■

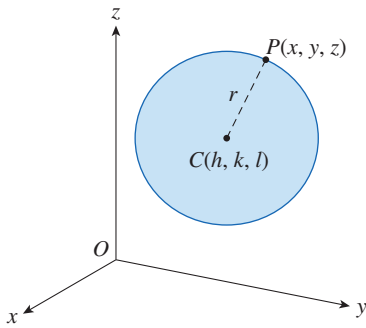


Figure 9.15
Sphère centrée en $C(h, k, l)$
et de rayon r .

L'équation de l'exemple 5 est souvent utilisée et son importance est soulignée ici.

L'équation d'une sphère

Une sphère de centre $C(h, k, l)$ et de rayon r , a comme équation

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

En particulier, si son centre est l'origine O , la sphère a comme équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Exemple 6 Déterminer le centre et le rayon d'une sphère

Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 = 0$ est l'équation d'une sphère et déterminer son centre et son rayon.

Solution

Réécrivons l'équation donnée en complétant les expressions élevées au carré pour chaque variable :

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) + (z^2 + 2z + 1) = -6 + 4 + 9 + 1$$

En complétant les expressions au carré pour chaque variable.

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 8$$

En écrivant chaque expression sous la forme d'un carré.

Comparons cette équation avec la forme standard de l'équation d'une sphère.

L'équation résultante correspond à une sphère centrée au point $(-2, 3, -1)$ et de rayon $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. ■

Exemple 7 Identifier une région

Représenter la région de $\mathbb{R}^3$ définie par les inégalités suivantes

$$1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \quad z \leq 0$$

Solution

Réécrire l'équation $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

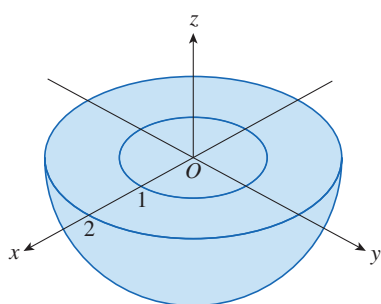
$$1 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 2$$

En prenant la racine carrée de chaque membre des inégalités.

Ce qui montre que les points (x, y, z) de cette région sont à une distance de l'origine au moins égale à 1 sans pour autant dépasser 2.

De plus, l'inégalité supplémentaire $z \leq 0$ entraîne que les points se trouvent soit dans le plan Oxy , soit en-dessous.

Par conséquent, les inégalités données définissent la région située entre (ou sur) les sphères $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ et au-dessous du (ou sur) le plan Oxy . Cette région est représentée dans la figure 9.16. ■

**Figure 9.16**

La région de $\mathbb{R}^3$ décrite par les inégalités $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \leq 0$.

9.1 Exercices

1. Trouvez les coordonnées d'un point obtenu en partant de l'origine et en se déplaçant le long de l'axe Ox de 4 unités dans le sens positif, et en descendant ensuite de 3 unités vers le bas.
2. Dans un même repère cartésien, marquez les points $(0, 5, 2)$, $(4, 0, -1)$, $(2, 4, 6)$ et $(1, -1, 2)$.
3. Lequel parmi les points $P(6, 2, 3)$, $Q(-5, -1, 4)$ et $R(0, 3, 8)$ est le plus proche du plan Oxz ? Quel est le point qui se trouve sur le plan Oyz ?
4. Déterminez les coordonnées des projections du point $(2, 3, 5)$ dans les plans Oxy , Oyz et Oxz . Dessinez un parallépipède rectangle dont l'origine et $(2, 3, 5)$ sont des sommets opposés et dont les faces sont des plans parallèles aux plans de coordonnées. Étiquetez chaque sommet. Calculez la longueur de la diagonale.
5. Décrivez et dessinez la surface dans $\mathbb{R}^3$ représentée par l'équation $x + y = 2$.
6. Décrivez et dessinez la surface dans $\mathbb{R}^3$ représentée par l'équation $x^2 + z^2 = 9$.
7. a) Décrivez la courbe de $\mathbb{R}^2$ représentée par l'équation $x = 4$. Décrivez la surface de $\mathbb{R}^3$ représentée par l'équation $x = 4$. Dessinez la courbe et la surface.
b) Décrivez la surface de $\mathbb{R}^3$ représentée par l'équation $y = 3$. Décrivez la surface de $\mathbb{R}^3$ représentée par $z = 5$. Décrivez l'ensemble des points (x, y, z) tels que $y = 3$ et $z = 5$, c'est-à-dire l'ensemble des points situés à l'intersection des deux surfaces. Dessinez cet ensemble de points.
8. Calculez la longueur des côtés du triangle PQR . Déterminez si PQR est un triangle rectangle, un triangle isocèle, ou ni l'un ni l'autre.
a) $P(3, -2, -3)$, $Q(7, 0, 1)$ et $R(1, 2, 1)$
b) $P(2, -1, 0)$, $Q(4, 1, 1)$, $R(4, -5, 4)$

9. Calculez la distance entre le point $(3, 7, -5)$ et

- a) le plan Oxy b) le plan Oyz
- c) le plan Oxz d) l'axe Ox
- e) l'axe Oy f) l'axe Oz

10. Les points sont-ils colinéaires ?

- a) $A(2, 4, 2), B(3, 7, -2), C(1, 3, 3)$
- b) $D(0, -5, 5), E(1, -2, 4), F(3, 4, 2)$

11. Déterminez une équation de la sphère centrée en $(2, -6, 4)$ de rayon 5. Quelle est l'intersection de cette sphère avec chacun des plans de coordonnées ?

12. Écrivez une équation de la sphère qui passe par le point $(4, 3, -1)$ et centrée en $(3, 8, 1)$.

13. Déterminez l'équation d'une sphère qui passe par l'origine et centrée en $(1, 2, 3)$.

Montrez que l'équation est celle d'une sphère et déterminez son centre et son rayon.

14. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z = 11$

15. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 2z + 17 = 0$

16. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8x - 24z + 1$

17. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 10 + 6y + 12z$

18. $x^2 - 10x + y^2 - 4y + z^2 - 2\sqrt{3}z + 32 = 0$

19. $x^2 + x + y^2 + \frac{22y}{7} + z^2 + \frac{337}{196} = 0$

20. a) Démontrez que les coordonnées du point milieu du segment d'extrémités $P_1(x_1, y_1, z_1)$ et $P_2(x_2, y_2, z_2)$ sont

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

b) Calculez la longueur des médianes du triangle de sommets $A(1, 2, 3), B(-2, 0, 5)$ et $C(4, 1, 5)$.

21. Déterminez une équation d'une sphère dont un des diamètres a comme extrémités $(2, 1, 4)$ et $(4, 3, 10)$.

22. Déterminez des équations des sphères centrées en $(2, -3, 6)$ qui touche a) le plan Oxy , b) le plan Oyz , c) le plan Oxz .

23. Déterminez une équation de la plus grande sphère centrée en $(5, 4, 9)$ contenue dans le premier octant.

Décrivez avec des mots la région de $\mathbb{R}^3$ représentée par l'équation ou l'inégalité.

24. $x = 5$

25. $y = -2$

26. $y < 8$

27. $x \geq -3$

28. $0 \leq z \leq 6$

29. $z^2 = 1$

30. $x^2 + y^2 = 4, z = -1$

31. $y^2 + z^2 = 16$

32. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$

33. $x = z$

34. $x^2 + z^2 \leq 9$

35. $x^2 + y^2 + z^2 > 2z$

36. $y = \sqrt{4 - x^2}$

37. $z = x^2$

Ecrivez les inégalités décrivant la région donnée.

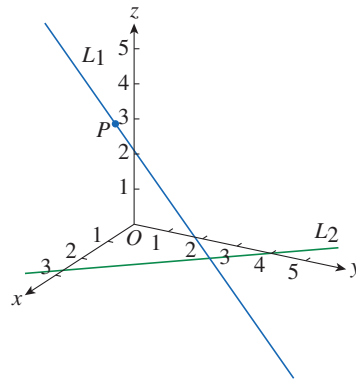
38. La région comprise entre le plan Oyz et le plan vertical $x = 5$.

39. Le solide cylindrique situé sur ou sous le plan $z = 8$ et au-dessus du disque du plan Oxy centré à l'origine, de rayon 2.

40. La région située strictement entre les sphères de rayons r et R centrées à l'origine, où $r < R$.

41. La moitié supérieure de la sphère de rayon 2 centrée à l'origine.

42. La figure montre une droite L_1 dans l'espace et une deuxième droite L_2 , projection de la première dans le plan Oxy . En d'autres mots, les points de L_2 sont soit au-dessus, soit en dessous de ceux de L_1 .



- a) Utilisez la représentation graphique pour déterminer les coordonnées du point P sur la droite L_1 .
- b) Indiquez sur le dessin les points A, B et C en lesquels la droite L_1 perce les plans Oxy, Oyz , et Oxz , respectivement.

43. Considérez les points P dont la distance à $A(-1, 5, 3)$ est le double de celle de P à $B(6, 2, -2)$. Montrez que ces points sont sur une sphère et déterminez son centre et son rayon.

44. Déterminez une équation de l'ensemble des points équidistants des points $A(-1, 5, 3)$ et $B(6, 2, -2)$. Décrivez cet ensemble.

45. Calculez le volume du solide compris entre les deux sphères

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z + 5 = 0$$

et

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

46. Quelle est la distance entre les sphères $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 14x + 4y + 4z - 11$?

47. Décrivez et dessinez le solide caractérisé de la façon suivante. Éclairé par des rayons parallèles à l'axe Oz , son ombre est un disque circulaire. Si les rayons sont parallèles à l'axe Oy , son ombre est un carré. Si les rayons sont parallèles à l'axe Ox , son ombre est un triangle isocèle.

9.2 Les vecteurs

■ Définitions et Notation

Le mot **vecteur** désigne une grandeur orientée, telle, par exemple, qu'un déplacement, une vitesse ou une force. Un vecteur est souvent représenté par une flèche ou par un segment de droite orienté. La longueur de la flèche représente la mesure du vecteur, la droite qui la porte indique la direction et la flèche le sens du vecteur. Un vecteur est habituellement noté par une lettre en gras, par exemple $\mathbf{v}$ ou par une lettre surmontée d'une flèche, par exemple, $\vec{v}$.

Supposons qu'un point matériel se déplace le long d'une droite depuis A jusqu'à B . Le **vecteur déplacement** correspondant que montre la figure 9.17 a un **point initial** A (l'origine) et un **point final** B (l'extrémité), ce qui est indiqué par $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Dans la Figure 9.17 le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$ a la même mesure, la même direction et le même sens que $\vec{v}$, même s'il est à une place différente. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **équivalents** (ou **égaux**) et on écrit $\vec{u} = \vec{v}$. Le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$, est de mesure nulle. Il est le seul vecteur qui n'a ni direction, ni sens.

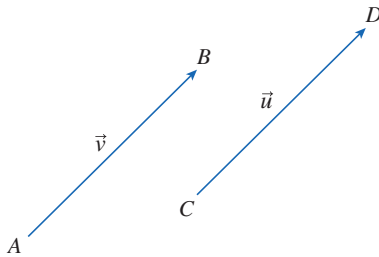


Figure 9.17

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont équivalents.

■ Opérations avec des vecteurs

On suppose qu'un point matériel se déplace de A à B . Son vecteur déplacement est $\overrightarrow{AB}$. Ensuite, il change de direction et va de B à C . Son vecteur déplacement est maintenant $\overrightarrow{BC}$, comme illustré dans la Figure 9.18. L'effet combiné de ces déplacements est que le point matériel est allé de A à C . Le vecteur déplacement qui en résulte, $\overrightarrow{AC}$, est appelé la somme de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{BC}$ et on écrit

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

De façon générale, pour définir la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on déplace le vecteur $\vec{v}$ de manière que son origine coïncide avec l'extrémité de $\vec{u}$.

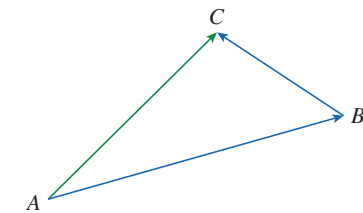


Figure 9.18

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{BC}$.

Définition de l'addition vectorielle

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs positionnés de façon telle que le point initial de $\vec{v}$ et l'extrémité de $\vec{u}$ coïncident, alors la **somme** $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur qui va du point initial de $\vec{u}$ à l'extrémité de $\vec{v}$.

La figure 9.19 illustre la définition de l'addition vectorielle. Cette figure montre pourquoi cette définition est parfois appelée la **loi du triangle**.

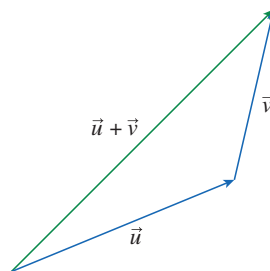


Figure 9.19

Illustration de l'addition vectorielle : loi du triangle.

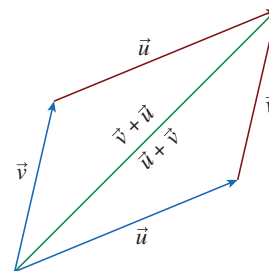


Figure 9.20

Une autre façon de construire la somme : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$: loi du parallélogramme.

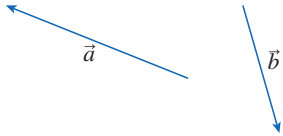


Figure 9.21
Vecteurs de l'Exemple 1.

Dans la figure 9.20, à partir des mêmes vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de la figure 9.19, on trace une autre représentation de $\vec{v}$, celle dont l'origine coïncide avec l'origine de $\vec{u}$. Puis on complète le parallélogramme. On constate ainsi, graphiquement que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$. On peut y voir aussi une autre façon de construire le vecteur somme : si on place $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de manière qu'ils aient même origine, le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ est sur la diagonale du parallélogramme dont $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les côtés. C'est la **règle du parallélogramme**.

Exemple 1 Représenter graphiquement une somme vectorielle

Dessiner la somme des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ représentés dans la figure 9.21.

Solution

On commence par traduire $\vec{b}$ de sorte que son extrémité vienne se mettre à l'origine de $\vec{a}$. Cette copie de $\vec{b}$ doit avoir la même mesure, le même sens et la même direction.

Ensuite, on joint le point initial de $\vec{a}$ à l'extrémité de la copie de $\vec{b}$ (figure 9.22), on obtient le vecteur $\vec{a} + \vec{b}$.

On aurait pu aussi utiliser la règle du parallélogramme.

On fait coïncider les origines de $\vec{a}$ et de $\vec{b}$ pour construire $\vec{a} + \vec{b}$ qui est la diagonale du parallélogramme, comme illustré sur la figure 9.23.

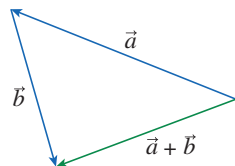


Figure 9.22
Somme $\vec{a} + \vec{b}$ construite à partir de la loi du triangle.

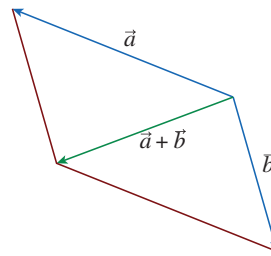


Figure 9.23
Somme $\vec{a} + \vec{b}$ construite à partir de la loi du parallélogramme.

Il est aussi possible de multiplier un vecteur par un nombre réel c . Dans ce contexte, le nombre réel c est appelé un scalaire, pour le distinguer d'un vecteur. Il est logique que le vecteur $2\vec{v}$ soit le même vecteur que $\vec{v} + \vec{v}$, qui a même direction et même sens que $\vec{v}$, mais dont la mesure est le double de celle de $\vec{v}$. En général, le produit d'un vecteur par un scalaire est défini de la manière suivante.

Définition de la multiplication par un scalaire

Si c est un scalaire et $\vec{v}$ un vecteur, alors le **multiple scalaire** $c\vec{v}$ est le vecteur qui a même orientation que $\vec{v}$, dont la mesure est $|c|$ fois la mesure de $\vec{v}$, et qui a le même sens que $\vec{v}$ si $c > 0$ et le sens opposé si $c < 0$. Si $c = 0$ ou si $\vec{v} = \vec{0}$ alors $c\vec{v} = \vec{0}$.

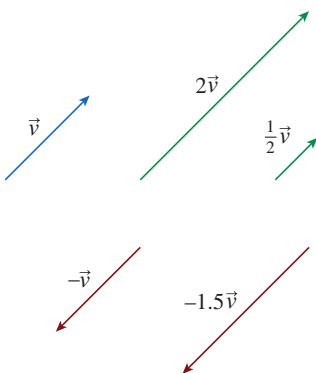


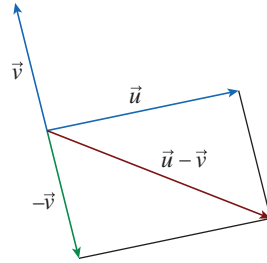
Figure 9.24
Exemples de multiples scalaires de $\vec{v}$.

Cette définition est illustrée à la figure 9.24. Les nombres réels fonctionnent ici comme des facteurs d'échelle sur les vecteurs, d'où leur nom de scalaires. On remarque que deux vecteurs non nuls sont parallèles s'ils sont des multiples scalaires l'un de l'autre. En particulier, le vecteur $-\vec{v} = (-1)\vec{v}$ a la même mesure que $\vec{v}$, mais son sens est opposé. Voilà pourquoi on l'appelle l'**opposé** de $\vec{v}$.

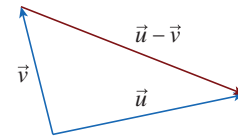
Le vecteur **différence** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ peut être défini en utilisant l'addition et la multiplication scalaire.

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Pour construire la **différence** $\vec{u} - \vec{v}$, on trace d'abord l'opposé $-\vec{v}$ de $\vec{v}$, puis on l'ajoute à $\vec{u}$ en suivant la règle du parallélogramme, comme illustré dans la figure 9.25. Une autre méthode pour représenter cette différence est d'écrire $\vec{v} + (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}$. Cela signifie que l'on peut construire $\vec{u} - \vec{v}$ comme le vecteur qui, additionné à $\vec{v}$, donne $\vec{u}$. C'est alors la règle du triangle qui est appliquée dans la Figure 9.26.

**Figure 9.25**

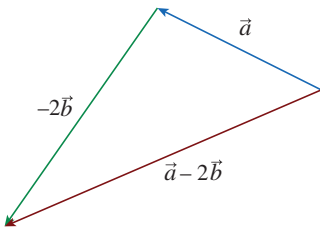
Différence $\vec{u} - \vec{v}$ en utilisant la règle du parallélogramme.

**Figure 9.26**

Différence $\vec{u} - \vec{v}$ en utilisant la loi du triangle.

**Figure 9.27**

Vecteurs de l'exemple 2.

**Figure 9.28**

Vecteur $\vec{a} - 2\vec{b}$

Exemple 2 Représenter graphiquement une différence de vecteurs

Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont les vecteurs représentés dans la figure 9.27, dessiner $\vec{a} - 2\vec{b}$.

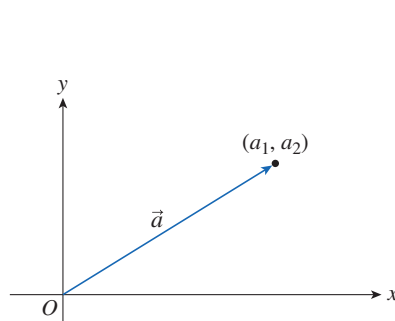
Solution

On commence par dessiner le vecteur $-2\vec{b}$ de sens opposé à $\vec{b}$ et deux fois plus long. On place ensuite son origine à l'extrémité de $\vec{a}$ et on utilise la règle du triangle pour obtenir $\vec{a} + (-2\vec{b})$ comme indiqué sur la Figure 9.28. ■

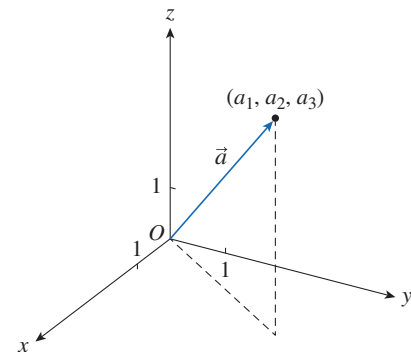
Composantes d'un vecteur

Dans de nombreuses applications, il est bon d'introduire un système de coordonnées et de traiter les vecteurs algébriquement. Si un vecteur $\vec{a}$ est placé dans un système d'axes rectangulaire avec son origine en O, les coordonnées de son extrémité sont de la forme (a_1, a_2) ou (a_1, a_2, a_3) , selon que le système de coordonnées est à deux ou trois dimensions. Ces coordonnées sont appelées les **composantes** de $\vec{a}$ et on écrit

$$\vec{a} = (a_1, a_2) \quad \text{ou} \quad \vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

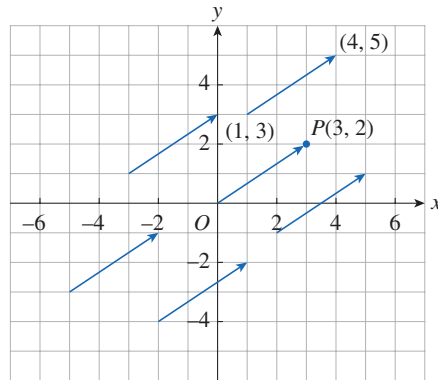
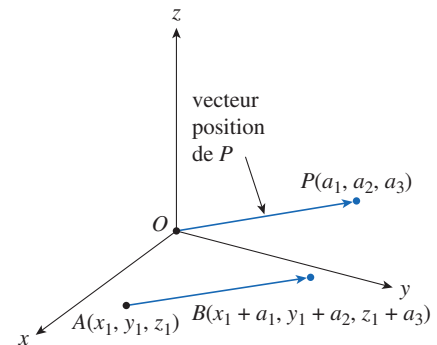
**Figure 9.29**

Visualisation d'un vecteur $\vec{a} = (a_1, a_2)$ dans un système de coordonnées cartésiennes, à deux dimensions.

**Figure 9.30**

Visualisation d'un vecteur $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dans un système de coordonnées cartésiennes, à trois dimensions.

Les vecteurs de la figure 9.31 sont tous équivalents au vecteur $\overrightarrow{OP} = (3, 2)$ dont l'extrémité est le point $P(3, 2)$. Pour chacun de ces vecteurs, le point terminal est obtenu à partir du point initial par un déplacement de trois unités vers la droite et deux unités vers le haut. Nous considérons tous ces vecteurs comme des **représentations** équivalentes du vecteur $\vec{a} = (3, 2)$. La représentation particulière $\overrightarrow{OP}$ qui va de l'origine O au point P de coordonnées $(3, 2)$ est appelée **vecteur position** du point P .

**Figure 9.31**Diverses représentations du vecteur $\vec{a} = (3, 2)$.**Figure 9.32**Représentations du vecteur $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

De même, à trois dimensions, le vecteur $\vec{a} = \overrightarrow{OP} = (a_1, a_2, a_3)$ est le **vecteur position** du point $P(a_1, a_2, a_3)$ (figure 9.32). Prenons maintenant une autre représentation $\overrightarrow{AB}$ du vecteur $\vec{a}$ qui va du point initial $A(x_1, y_1, z_1)$ jusqu'au point $B(x_2, y_2, z_2)$. Alors les équations suivantes doivent être vraies :

$$x_1 + a_1 = x_2, \quad y_1 + a_2 = y_2, \quad z_1 + a_3 = z_2$$

d'où

$$a_1 = x_2 - x_1, \quad a_2 = y_2 - y_1, \quad a_3 = z_2 - z_1$$

Voir la Figure 9.32.

Etant donné, les points $A(x_1, y_1, z_1)$ et $B(x_2, y_2, z_2)$, le vecteur $\vec{a}$ de représentation $\overrightarrow{AB}$ est

$$\vec{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \quad (1)$$

Exemple 3 Représentation d'un vecteur déplacement

Déterminer le vecteur représenté par le segment orienté d'origine $A(2, -3, 4)$ et d'extrémité $B(-2, 1, 1)$.

Solution

Le vecteur correspondant à $\overrightarrow{AB}$ est

$$\vec{a} = (-2 - 2, 1 - (-3), 1 - 4) = (-4, 4, -3).$$

La **mesure** ou **longueur** (ou **norme**) du vecteur $\vec{v}$ est la longueur de n'importe lequel des segments orientés qui le représentent. Elle est notée par $|\vec{v}|$ ou $\|\vec{v}\|$. En faisant usage de la formule de la distance pour calculer la longueur d'un segment OP , nous obtenons

Norme d'un vecteur

La longueur d'un vecteur de dimension deux $\vec{a} = (a_1, a_2)$ est égale à

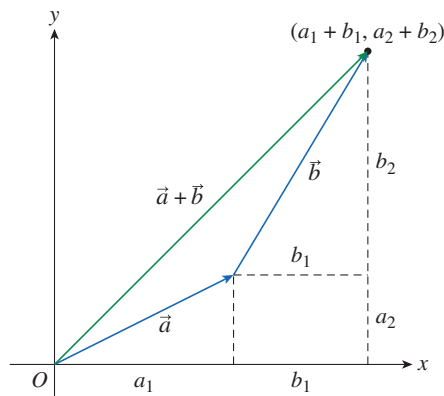
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

La longueur d'un vecteur de dimension trois $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ est égale à

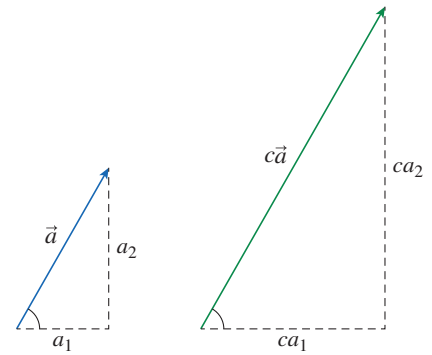
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Opérations et propriétés

Nous pouvons additionner ou soustraire des vecteurs graphiquement. Cependant, ces opérations peuvent être faites algébriquement. La figure 9.33 montre que si $\vec{a} = (a_1, a_2)$ et $\vec{b} = (b_1, b_2)$, alors la somme est $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, comme on le voit dans le cas de la figure où les composantes sont positives. Autrement dit, *pour additionner algébriquement deux vecteurs, on additionne leurs composantes*. De même, *pour soustraire des vecteurs, on soustrait leurs composantes*. Les triangles semblables de la figure 9.34 montrent que les composantes de $c\vec{a}$ sont ca_1 et ca_2 . Donc, *pour multiplier un vecteur par un scalaire, on multiplie chaque composante par ce scalaire*.

**Figure 9.33**

Justification graphique de l'addition algébrique de deux vecteurs.

**Figure 9.34**

Justification graphique de la multiplication d'un vecteur par un scalaire.

Résumé des résultats précédents :

Opérations algébriques sur les vecteurs

Si $\vec{a} = (a_1, a_2)$ et $\vec{b} = (b_1, b_2)$, alors

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \quad \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2) \quad c\vec{a} = (ca_1, ca_2)$$

De même, pour les vecteurs de dimension trois,

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$(a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

$$c(a_1, a_2, a_3) = (ca_1, ca_2, ca_3)$$

Exemple 4 Opérations sur les vecteurs

Si $\vec{a} = (4, 0, 3)$ et $\vec{b} = (-2, 1, 5)$, déterminer $|\vec{a}|$ ainsi que les vecteurs $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $3\vec{b}$ et $2\vec{a} + 5\vec{b}$.

Solution

Utilisons l'expression du module d'un vecteur et de la formulation algébriques des opérations vectorielles

$$\begin{aligned}
 |\vec{a}| &= \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 && \text{Formule de la norme.} \\
 \vec{a} + \vec{b} &= (4, 0, 3) + (-2, 1, 5) \\
 &= (4 + (-2), 0 + 1, 3 + 5) = (2, 1, 8) && \text{Addition de composantes.} \\
 \vec{a} - \vec{b} &= (4, 0, 3) - (-2, 1, 5) \\
 &= (4 - (-2), 0 - 1, 3 - 5) = (6, -1, -2) && \text{Soustraction de composantes.} \\
 3\vec{b} &= 3(-2, 1, 5) \\
 &= (3(-2), 3(1), 3(5)) = (-6, 3, 15) && \text{Multiplication de chaque composante par 3.} \\
 2\vec{a} + 5\vec{b} &= 2(4, 0, 3) + 5(-2, 1, 5) \\
 &= (8, 0, 6) + (-10, 5, 25) = (-2, 5, 31) && \text{Multiplication par des scalaires appropriés et addition de composantes.}
 \end{aligned}$$

Nous désignons par V_2 l'ensemble de tous les vecteurs de dimension deux et par V_3 l'ensemble de tous les vecteurs de dimension trois. Plus généralement, nous aurons besoin de considérer plus tard l'ensemble V_n des vecteurs de dimension n . Un vecteur de dimension n est un n -tuple :

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

où $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des nombres réels, appelés les composantes de $\vec{a}$. L'addition et la multiplication par un scalaire sont définies en termes de composantes, exactement de la même manière que dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.

On utilise des vecteurs de dimension n pour faire la liste de différentes quantités organisées d'une certaine façon. Par exemple, les composantes d'un vecteur de dimension six

$$\vec{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$$

peuvent être les prix de six composants de fabrication d'un certain produit ou les six doses de prescription d'un médicament, pour un patient hospitalisé.

En théorie de la relativité, on emploie des vecteurs de dimension quatre (x, y, z, t) où les trois premières composantes servent à situer une position dans l'espace et la quatrième correspond au temps.

Propriétés des vecteurs

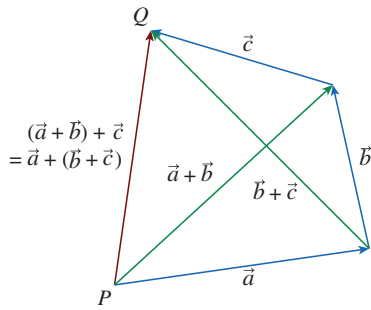
Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ des vecteurs de V_n et c et d des scalaires. Alors

- | | |
|---|--|
| 1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ | 2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ |
| 3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ | 4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ |
| 5. $c(\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}$ | 6. $(c + d)\vec{a} = c\vec{a} + d\vec{a}$ |
| 7. $(cd)\vec{a} = c(d\vec{a})$ | 8. $1\vec{a} = \vec{a}$ |

Ces huit propriétés des vecteurs peuvent facilement être vérifiées, soit géométriquement, soit algébriquement. La propriété 1, par exemple, se lit dans la figure 9.20 (elle revient à la règle du parallélogramme) ou se démontre, dans le cas $n = 2$, comme suit :

$$\begin{aligned}
 \vec{a} + \vec{b} &= (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) && \text{addition algébrique de vecteurs} \\
 &= (b_1 + a_1, b_2 + a_2) && \text{l'addition est commutative} \\
 &= (b_1, b_2) + (a_1, a_2) = \vec{b} + \vec{a} && \text{addition algébrique de vecteurs}
 \end{aligned}$$

La propriété 2 (l'associativité) se lit dans la figure 9.35 en appliquant la règle du triangle plusieurs fois : le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ est obtenu comme résultat soit de la construction de $\vec{a} + \vec{b}$ auquel on ajoute $\vec{c}$, soit de $\vec{a}$ auquel on ajoute $\vec{b} + \vec{c}$

**Figure 9.35**

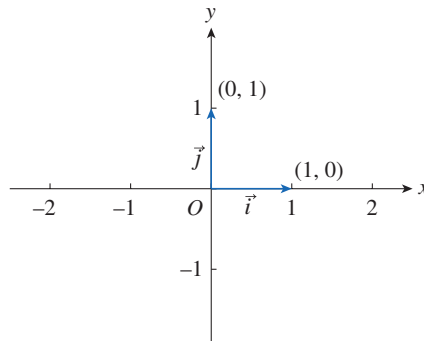
La géométrie justifie la propriété 2 de la loi d'associativité.

■ Vecteurs de Base

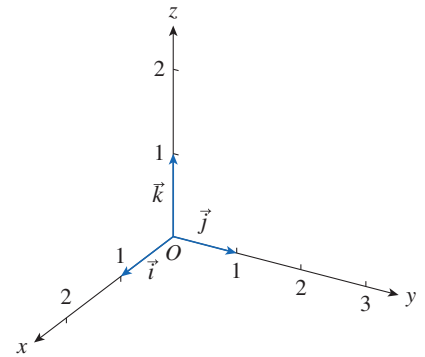
Certains vecteurs en deux dimensions, ou trois dimensions, ou même en dimension n jouent un rôle spécial. Dans un espace à trois dimensions, les **vecteurs standard de base** sont :

$$\vec{i} = (1, 0, 0) \quad \vec{j} = (0, 1, 0) \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont de longueur 1 et pointent dans le sens positif de chaque axe. De même, en dimension deux, on définit $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$. Les Figures 9.36 et 9.37 illustrent ces vecteurs dans des espaces à deux ou trois dimensions.

**Figure 9.36**

Vecteurs standards de base dans un espace à deux dimensions.

**Figure 9.37**

Vecteurs standards de base dans un espace à trois dimensions.

Un vecteur $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ quelconque peut maintenant être écrit

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) = (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) \\ &= a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) \\ \vec{a} &= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \end{aligned} \quad (2)$$

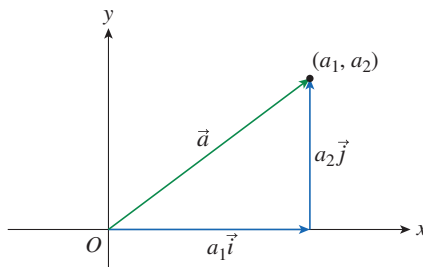
C'est ainsi qu'un vecteur quelconque d'un espace à trois dimensions peut être exprimé en fonction des vecteurs de base standard $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$. Par exemple,

$$(1, -2, 6) = \vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

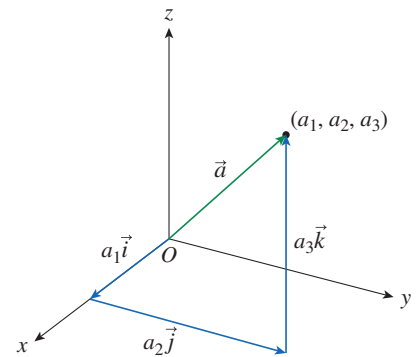
De même, en dimension deux, on peut écrire

$$\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} \quad (3)$$

Les Figures 9.39 et 9.38 montrent une interprétation géométrique des équations 3 et 2.

**Figure 9.38**

À deux dimensions $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$.

**Figure 9.39**

À trois dimensions $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.

Exemple 5 Expression d'une opération en fonction des vecteurs de base

Si $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ et $\vec{b} = 4\vec{i} + 7\vec{k}$, exprimer le vecteur $2\vec{a} + 3\vec{b}$ en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

Solution

Grâce aux propriétés 1, 2, 5, 6 et 7 des vecteurs, on a

$$\begin{aligned} 2\vec{a} + 3\vec{b} &= 2(\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}) + 3(4\vec{i} + 7\vec{k}) \\ &= 2\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k} + 12\vec{i} + 21\vec{k} = 14\vec{i} + 4\vec{j} + 15\vec{k} \end{aligned}$$

Un vecteur de longueur 1 est appelé un **vecteur unitaire**. C'est le cas, par exemple, des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$. De façon générale, si $\vec{a} \neq \vec{0}$, le vecteur unitaire de même direction et de même sens que $\vec{a}$ est

$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad (4)$$

En vue de vérifier cela, on pose $c = 1/|\vec{a}|$. Alors $\vec{u} = c\vec{a}$ où c est un scalaire positif. Donc $\vec{u}$ a même direction et même sens que $\vec{a}$. Et de plus

$$|\vec{u}| = |c\vec{a}| = |c| |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} |\vec{a}| = 1$$

Exemple 6 Vecteur unitaire

Déterminer le vecteur unitaire de même direction et de même sens que le vecteur $2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$.

Solution

La norme du vecteur donné est égale à

$$|2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Selon l'équation 6, le vecteur unitaire de même direction et de même sens est donc

$$\frac{1}{3} (2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}) = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}.$$

■ Applications

Les vecteurs sont largement utilisés en physique et en sciences appliquées. Au chapitre 10, nous verrons comment ils décrivent la vitesse et l'accélération d'objets en mouvement dans l'espace. Ici, nous regardons un exemple incluant des forces.

Une force est représentée par un vecteur parce qu'elle a à la fois une mesure (exprimée en Newton), une direction et un sens. Lorsque plusieurs forces agissent sur un objet, la **force résultante** exercée sur l'objet est le vecteur somme de ces forces.

Exemple 7 Un poids soutenu par deux câbles

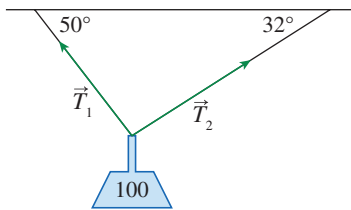
Deux câbles soutiennent un poids de 100 N, comme illustré sur la figure 9.40. Calculer les tensions (forces) $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ des deux câbles et leurs modules respectifs.

Solution

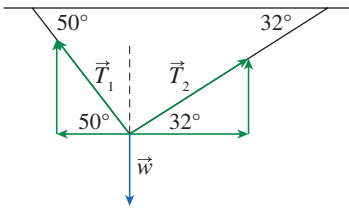
Nous exprimons d'abord les forces $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ en fonction de leurs composantes horizontale et verticale.

D'après la figure 9.41, nous voyons que

$$\begin{aligned} \vec{T}_1 &= -|\vec{T}_1| \cos 50^\circ \vec{i} + |\vec{T}_1| \sin 50^\circ \vec{j} \\ \vec{T}_2 &= |\vec{T}_2| \cos 32^\circ \vec{i} + |\vec{T}_2| \sin 32^\circ \vec{j} \end{aligned}$$

**Figure 9.40**

Le poids, les deux câbles et les forces mises en jeu.

**Figure 9.41**

Composantes horizontales et verticales de $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$.

Comme la résultante $\vec{T}_1 + \vec{T}_2$ des tensions contrebalance le poids $\vec{w}$, il faut que $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = -\vec{w} = 100 \vec{j}$.

D'où, en utilisant les composantes de $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$.

$$(-|\vec{T}_1| \cos 50^\circ + |\vec{T}_2| \cos 32^\circ) \vec{i} + (|\vec{T}_1| \sin 50^\circ + |\vec{T}_2| \sin 32^\circ) \vec{j} = 100 \vec{j}$$

Égalons les composantes

$$-|\vec{T}_1| \cos 50^\circ + |\vec{T}_2| \cos 32^\circ = 0$$

$$|\vec{T}_1| \sin 50^\circ + |\vec{T}_2| \sin 32^\circ = 100$$

Résolvons la première de ces équations par rapport à $|\vec{T}_2|$ et substituons l'expression obtenue dans la deuxième :

$$|\vec{T}_1| \sin 50^\circ + \frac{|\vec{T}_1| \cos 50^\circ}{\cos 32^\circ} \sin 32^\circ = 100$$

Les normes des tensions sont donc

$$|\vec{T}_1| = \frac{100}{\sin 50^\circ + \tan 32^\circ \cos 50^\circ} \approx 85,64 \text{ N} \quad \text{et}$$

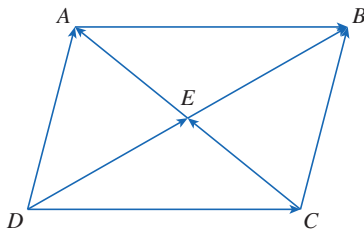
$$|\vec{T}_2| = \frac{|\vec{T}_1| \cos 50^\circ}{\cos 32^\circ} \approx 64,91 \text{ N}.$$

Remplaçons ces valeurs dans l'expression des composantes de $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ pour obtenir les tensions

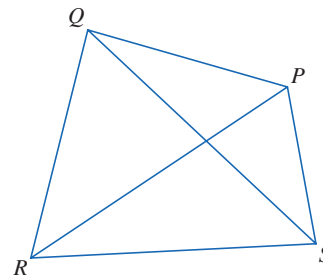
$$\vec{T}_1 \approx -55,05 \vec{i} + 65,60 \vec{j} \quad \vec{T}_2 \approx 55,05 \vec{i} + 34,40 \vec{j}$$

9.2 Exercices

- Les quantités suivantes sont-elles des vecteurs ou des scalaires ? Expliquez.
 - Le coût d'un billet de théâtre
 - Le courant d'une rivière
 - La trajectoire initiale du vol Denver Omaha
 - La population mondiale
 - La quantité de glace d'une boule de glace
 - La loi de dérive et la trajectoire d'un iceberg
- Quelle relation y a-t-il entre le point (4, 7) et le vecteur (4, 7) ? Illustrez votre réponse.
- Identifiez tous les vecteurs dans le parallélogramme.



- Utilisez la figure pour écrire chaque combinaison de vecteurs comme un seul vecteur.
 - $\vec{PQ} + \vec{QR}$
 - $\vec{RP} + \vec{PS}$
 - $\vec{QS} - \vec{PS}$
 - $\vec{RS} + \vec{SP} + \vec{PQ}$



- Recopier les vecteurs de la figure et, à partir de ceux-ci, tracez les vecteurs suivants.

- $\vec{u} + \vec{v}$
- $\vec{u} - \vec{v}$
- $\vec{v} + \vec{w}$
- $\vec{w} + \vec{v} + \vec{u}$



- Recopier les vecteurs de la figure et, à partir de ceux-ci, tracez les vecteurs suivants.

- $\vec{a} + \vec{b}$
- $\vec{a} - \vec{b}$
- $\frac{1}{2} \vec{a}$
- $-3\vec{b}$
- $\vec{a} + 2\vec{b}$
- $2\vec{b} - \vec{a}$



Déterminez le vecteur $\vec{a}$ représenté par le segment orienté $\overrightarrow{AB}$. Dessinez $\overrightarrow{AB}$ et une autre représentation équivalente dont le point initial est l'origine.

7. $A(-1, 3), B(2, 2)$ 8. $A(2, 1), B(0, 6)$
 9. $A(-2, -5), B(3, 4)$ 10. $A(0, 3, 1), B(2, 3, -1)$
 11. $A(4, 0, -2), B(4, 2, 1)$ 12. $A(-2, -3, -1), B(3, -1, 6)$

Déterminez la somme des vecteurs donnés et illustrez géométriquement.

13. $(-1, 4), (5, -2)$ 14. $(-2, -1), (5, 7)$
 15. $(3, -5), (0, 4)$ 16. $(0, 1, 2), (0, 0, -3)$
 17. $(-1, 0, 2), (0, 4, 0)$ 18. $(1, 2, 0), (-1, 3, 3)$

Déterminez $\vec{a} + \vec{b}$, $2\vec{a} + 3\vec{b}$, $|\vec{a}|$ et $|\vec{a} - \vec{b}|$.

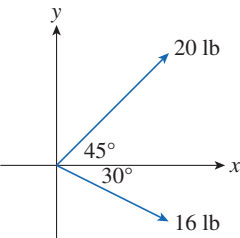
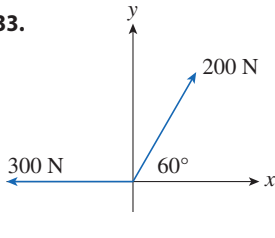
19. $\vec{a} = (5, -12), \vec{b} = (-3, -6)$
 20. $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j}, \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$
 21. $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}, \vec{b} = -2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$
 22. $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{b} = 2\vec{j} - \vec{k}$
 23. $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}, \vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$

Déterminez le vecteur unitaire de même direction et de même sens que le vecteur donné.

24. $-3\vec{i} + 7\vec{j}$ 25. $(3, -3)$
 26. $(-4, 2, 4)$ 27. $8\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$

28. Cherchez un vecteur de même sens et de même direction que $(-2, 4, 2)$, mais de longueur 6.
 29. Quelles sont les composantes de $\vec{v}$ si $\vec{v}$ se trouve dans le premier quadrant, fait un angle de $\pi/3$ avec la partie positive de l'axe Ox et si $|\vec{v}| = 4$?
 30. Un enfant tire une luge sur la neige en exerçant une force de 50 N dans une direction qui fait un angle de 38° avec l'horizontale. Quelles sont les composantes horizontale et verticale de la force ?
 31. Un buteur tire le ballon avec un angle d'élévation de 40° et une vitesse de 60 ft/s. Déterminez les composantes horizontale et verticale du vecteur vitesse.

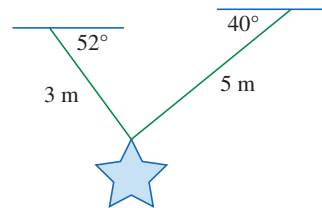
Déterminez la force résultante et l'angle qu'elle fait avec la direction positive de l'axe Ox .

32.  33. 

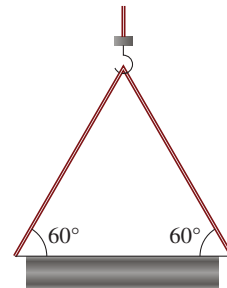
34. Les vitesses ont une mesure, une direction et un sens ; elles sont donc des vecteurs. La mesure d'un vecteur vitesse est appelée la *vitesse scalaire*. On suppose que le vent souffle à 45° nord-ouest (cela veut dire à 45° à l'ouest de la direction nord). Un avion se dirige à 60° nord-est à une vitesse (par rapport à l'air) de 250 km/h.

Le vol réel de l'avion s'effectue dans la direction résultante des vecteurs vitesses de l'avion et du vent. La vitesse scalaire de l'avion par rapport au sol est le module de la résultante. Déterminez la direction réellement suivie par l'avion et sa vitesse scalaire par rapport au sol.

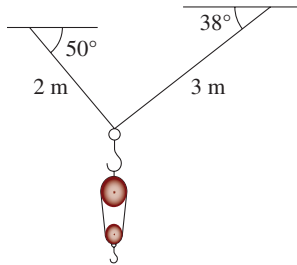
35. Une personne marche droit vers l'ouest sur le pont d'un navire à la vitesse de 3 mi/h. Le bateau navigue vers le nord à la vitesse de 22 mi/h. Déterminez la vitesse scalaire et la direction de la personne par rapport à la surface de l'eau.
 36. Des cordes de 3 m et 5 m de long font partie d'une guirlande décorative placée à l'occasion de la braderie du quartier. La décoration a une masse de 5 kg. Les cordes, attachées à des hauteurs différentes, font des angles de 52° et 40° par rapport à l'horizontale. Déterminez la tension de chaque corde ainsi que le module de chaque tension.



37. Une corde à linge est fixée à deux poteaux distants de 8 m. La corde est tout à fait tendue et fait une flèche négligeable. Une chemise mouillée de 0,8 kg est suspendue au milieu de la corde qui descend alors de 8 cm. Déterminez la tension de chaque moitié de la corde à linge.
 38. Une grue suspend horizontalement une poutre en acier de 500 lb à l'aide de câbles (de masse négligeable) attachés à un crochet à chaque extrémité de la poutre. Les câbles de support font chacun un angle de 60° avec la poutre. Déterminez, dans chacun des deux câbles, le vecteur tension et sa norme.



39. Un palan à poulie est suspendu dans un entrepôt par des cordes de 2 mètres et 3 mètres de longueur. Le poids à soulever est de 350 N. Les cordes, attachées à des hauteurs différentes, font des angles de 50° et 38° avec l'horizontale. Trouvez, pour chaque corde, la tension et sa norme.



40. La tension $\vec{T}$ à chaque extrémité d'une chaîne est de 25 N, comme indiqué sur la figure. Quel est le poids de la chaîne ?



41. Un plaisancier veut traverser un canal de 3 km de large et accoster à 2 km de son point de départ. La vitesse du courant est de 3,5 km/h et la vitesse du bateau est de 13 km/h.
a) Dans quelle direction devraient-ils s'orienter ?
b) Combien de temps durera le voyage ?
42. Trois forces s'exercent sur un objet. Deux de ces forces, de normes 25 N et 12 N, font un angle de 100° l'une de l'autre. La troisième force est perpendiculaire au plan des deux forces précédentes et a une norme de 4 N. Déterminez la norme de la force qui contrebalancerait exactement ces trois forces.
43. Déterminez les vecteurs unitaires parallèles à la tangente à la parabole $y = x^2$ au point $(2, 4)$.
44. a) Déterminez les vecteurs unitaires parallèles à la tangente à la courbe $y = 2 \sin x$ au point $(\pi/6, 1)$.
b) Déterminez les vecteurs unitaires qui sont perpendiculaires à la tangente.
c) Dessinez la courbe $y = 2 \sin x$. Ajoutez au graphe les vecteurs des parties a) et b), tous deux issus de $(\pi/6, 1)$.

45. Soient A , B , et C les sommets d'un triangle, déterminez

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$$

46. Soit C le point du segment AB situé deux fois plus loin de B que de A . Si $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ montrez que $\vec{c} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

47. a) Dessinez les vecteurs $\vec{a} = (3, 2)$, $\vec{b} = (2, 1)$ et $\vec{c} = (7, 1)$
b) Montrez par un dessin qu'il existe des scalaires s et t tels que $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$.
c) Estimez sur le dessin les valeurs de s et t .
d) Calculez les valeurs exactes de s et t .

48. Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ des vecteurs non nuls et non parallèles et soit $\vec{c}$ un vecteur quelconque du plan déterminé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Montrez géométriquement que $\vec{c}$ peut être écrit sous la forme $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$, pour des scalaires s et t convenables. Donnez ensuite une démonstration de ce résultat en utilisant les composantes des vecteurs.

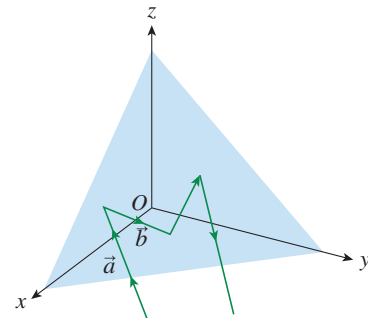
49. On suppose que $\vec{a}$ est un vecteur unitaire de dimension trois du premier octant qui part de l'origine et qui fait un angle de 60° avec la partie positive de l'axe Ox et de 72° avec la partie positive de l'axe Oy . Écrivez les composantes de $\vec{a}$.

50. Soient α , β , et γ les angles que fait un vecteur $\vec{a}$ respectivement avec les parties positives des axes Ox , Oy et Oz . Déterminez les composantes de $\vec{a}$ et démontrez que

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Les nombres $\cos \alpha$, $\cos \beta$, et $\cos \gamma$ sont appelés les *cosinus directeurs* de $\vec{a}$.

51. Étant donné $\vec{r} = (x, y, z)$ et $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, décrivez l'ensemble de tous les points (x, y, z) tels que $|\vec{r} - \vec{r}_0| = 1$.
52. Étant donné $\vec{r} = (x, y)$, $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$, décrivez l'ensemble de tous les points (x, y) tels que $|\vec{r} - \vec{r}_1| + |\vec{r} - \vec{r}_2| = k$, où $k > |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$?
53. La figure 9.35 donne une démonstration géométrique de la Propriété 2 des vecteurs. Donnez une démonstration algébrique en termes de composantes dans le cas $n = 2$.
54. Démontrez algébriquement la Propriété 5 des vecteurs dans le cas $n = 3$. Utilisez ensuite des triangles semblables pour en donner une preuve de nature géométrique.
55. Démontrez vectoriellement que le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et en mesure la moitié.
56. On suppose que les trois plans de coordonnées sont des miroirs et qu'un rayon de lumière représenté par le vecteur $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ frappe d'abord le plan Oxz , comme dans la figure. Utilisez le fait que l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence pour montrer que la direction du rayon réfléchi est donnée par $\vec{b} = (a_1, -a_2, a_3)$. Déduisez-en qu'après avoir été réfléchi par les trois miroirs perpendiculaires, le rayon sortant est parallèle au rayon initial. (Les chercheurs américains de l'espace ont utilisé ce principe, en même temps que des rayons laser et un tableau de miroirs en coin sur la Lune, pour déterminer avec précision la distance de la Terre à la Lune.)



9.3 Le produit scalaire

Jusqu'ici, nous avons additionné deux vecteurs et multiplié un vecteur par un scalaire. Se pose alors la question : comment multiplier deux vecteurs de manière à ce que leur produit soit un résultat utile ? Le produit scalaire que nous étudions dans cette section est une des réponses possibles à cette question. Le produit vectoriel en est une autre et sera étudié dans la section suivante.

■ Le travail et le produit scalaire

En physique et en sciences appliquées il y a des situations dans lesquelles il faut tenir compte de deux vecteurs, c'est le cas par exemple lors du calcul du travail effectué par une force. Dans la Section 6.5, nous avons défini le travail accompli par une force constante F qui fait se déplacer un objet d'une distance d par $W = Fd$. Cependant, cette définition n'est valable que si la direction dans laquelle est exercée la force est celle du mouvement de l'objet.

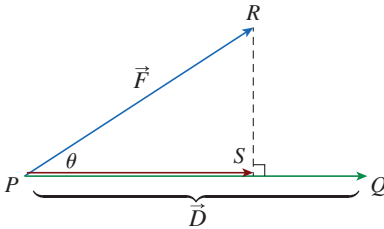


Figure 9.42

Une force constante telle que le vecteur $\vec{F}$.

Plus généralement, supposons maintenant que la force constante est un vecteur $\vec{F} = \overrightarrow{PR}$ orienté différemment, comme dans la figure 9.42. Si la force déplace l'objet de P vers Q , alors le **vecteur déplacement** est $\vec{D} = \overrightarrow{PQ}$. Deux vecteurs sont en présence ici, la force $\vec{F}$ et le déplacement $\vec{D}$.

Le **travail** effectué par $\vec{F}$ est défini comme la norme du déplacement, $|\vec{D}|$, multipliée par la norme de la force appliquée dans la direction du mouvement, qui, selon la figure 9.42, est

$$|\overrightarrow{PS}| = |\vec{F}| \cos \theta$$

Le travail effectué par $\vec{F}$ est donc défini par

$$W = |\vec{D}| (|\vec{F}| \cos \theta) = |\vec{F}| |\vec{D}| \cos \theta \quad (1)$$

Notez que le travail est une grandeur scalaire ; elle n'a pas d'orientation ni de sens. Cependant sa valeur dépend de l'angle entre les vecteurs force et déplacement.

Nous nous servons de l'expression 1 pour définir le produit scalaire de deux vecteurs, même lorsqu'ils ne représentent pas une force ou un déplacement.

Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le nombre

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

où θ est l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. (L'angle θ est le plus petit angle entre les vecteurs lorsqu'ils sont dessinés à partir d'un même point origine). Dans le cas où l'un des deux vecteurs est le vecteur nul, le produit scalaire est défini par $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Ce produit est appelé produit scalaire justement parce que le résultat du calcul $\vec{a} \cdot \vec{b}$ n'est pas un vecteur, mais un nombre réel, un scalaire.

Dans l'exemple du travail $\vec{F} \cdot \vec{D} = |\vec{F}| |\vec{D}| \cos \theta$, effectué par une force $\vec{F}$ qui s'exerce sur un objet en déplacement $\vec{D} = \overrightarrow{PQ}$, cela n'a pas de sens que l'angle θ entre $\vec{F}$ et $\vec{D}$ soit égal ou supérieur à $\pi/2$ car il n'y aurait pas de mouvement de P vers Q . Par contre, dans notre définition générale de $\vec{a} \cdot \vec{b}$, cette restriction n'existe pas et θ peut être un angle quelconque compris entre 0 et π .

Exemple 1 Calcul d'un produit scalaire à partir des longueurs et de l'angle formé

Calculer $\vec{a} \cdot \vec{b}$ si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont de longueurs 4 et 6 et si l'angle qu'ils font entre eux mesure $\pi/3$.

Solution

Utilisons la définition la définition du produit scalaire.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 12$$

Exemple 2 Calcul du travail d'une force

Un cageot est tiré sur une distance de 100 m le long d'une route horizontale sous une force constante de 70 N appliquée selon un angle de 35° par rapport à l'horizontale. Calculer le travail effectué par cette force.

Solution

Si $\vec{F}$ et $\vec{D}$ désignent les vecteurs force et déplacement, tels qu'ils sont représentés dans la figure 9.43, alors le travail effectué est

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot \vec{D} = |\vec{F}| |\vec{D}| \cos 35^\circ \\ &= (70)(100) \cos 35^\circ \approx 5734,06 \text{ N} \cdot \text{m} = 5734,06 \text{ J.} \end{aligned}$$

Deux vecteurs non nuls $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont dits **perpendiculaires** ou **orthogonaux** s'ils font entre eux un angle $\theta = \frac{\pi}{2}$. Donc, si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont des vecteurs perpendiculaires entre eux, on a

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Réciproquement, si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, alors $\cos \theta = 0$, d'où $\theta = \pi/2$. Le vecteur nul $\vec{0}$ est considéré comme perpendiculaire aux deux vecteurs.

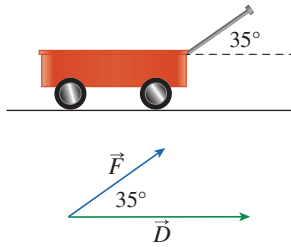
Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (2)

Vu que $\cos \theta > 0$ quand $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ et que $\cos \theta < 0$ quand $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$, nous constatons que $\vec{a} \cdot \vec{b}$ est positif lorsque $\theta < \frac{\pi}{2}$ et négatif lorsque $\theta > \frac{\pi}{2}$. Nous pouvons considérer $\vec{a} \cdot \vec{b}$ comme une mesure de ce que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ vont plus ou moins dans la même direction.

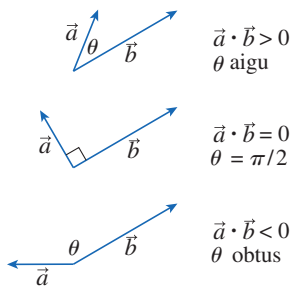
Le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b}$ est positif si globalement $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orientés dans le même sens, est nul si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires et négatif s'ils ont des orientations opposées. Voir la Figure 9.44. Dans le cas extrême où $\vec{a}$ et $\vec{b}$ pointent exactement dans la même direction et le même sens, $\theta = 0$, d'où $\cos \theta = 1$ et

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$$

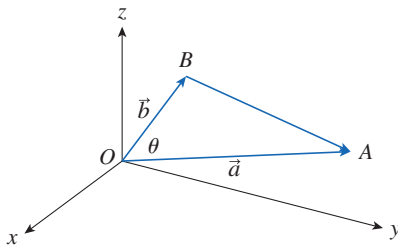
Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ pointent exactement dans des sens opposés, $\theta = \pi$, d'où $\cos \theta = -1$ et $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$.

**Figure 9.43**

Vecteur force et vecteur déplacement.

**Figure 9.44**

Le produit scalaire peut être vu comme une mesure de ce que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ vont plus ou moins dans la même direction.

**Figure 9.45**

L'angle θ entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

■ Le produit scalaire en termes de composantes

Deux vecteurs sont donnés par leurs composantes

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Nous voudrions écrire le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b}$ de façon intéressante avec les composantes. La Loi des cosinus appliquée au triangle de la figure 9.45 donne

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

Réolvons le produit scalaire dans l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{1}{2} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2) \\ &= \frac{1}{2} [a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2 - (a_3 - b_3)^2] \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \end{aligned}$$

Le produit scalaire de $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ est égal à

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Le produit scalaire de deux vecteurs s'obtient donc en faisant le produit des composantes correspondantes et en additionnant les produits. Le produit scalaire de deux vecteurs de dimension deux s'effectue de manière analogue :

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Exemple 3 Calcul du produit scalaire à partir des composantes

Voici quelques exemples de produits scalaires calculés à partir de leurs composantes.

$$(2, 4) \cdot (3, -1) = (2)(3) + (4)(-1) = 2$$

$$(-1, 7, 4) \cdot (6, 2, -\frac{1}{2}) = (-1)(6) + (7)(2) + (4)(-\frac{1}{2}) = 6$$

$$(\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}) \cdot (2\vec{j} - \vec{k}) = (1)(0) + (2)(2) + (-3)(-1) = 7$$

Exemple 4 Tester l'orthogonalité

Montrer que $2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ est perpendiculaire à $5\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$.

Solution

Comme

$$(2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \cdot (5\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}) = (2)(5) + (2)(-4) + (-1)(2) = 0$$

ces vecteurs sont donc perpendiculaires, d'après l'Équation 2.

Exemple 5 Angle entre deux vecteurs

Quel angle font entre eux les vecteurs $\vec{a} = (2, 2, -1)$ et $\vec{b} = (5, -3, 2)$.

Solution

Désignons par θ l'angle cherché.

Calculons la norme de chacun des vecteurs

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ et } |\vec{b}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{38}$$

et leur produit scalaire

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2)(5) + (2)(-3) + (-1)(2) = 2$$

On a, par la définition du produit scalaire,

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2}{3\sqrt{38}}$$

L'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ mesure donc :

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{2}{3\sqrt{38}} \right) \approx 1,462 \text{ (} = 83,79^\circ \text{)}.$$

Exemple 6 Calcul d'un travail

Une force représentée par un vecteur $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ agit sur un point matériel qui se déplace du point $P(2, 1, 0)$ vers le point $Q(4, 6, 2)$. Calculer le travail effectué.

Solution

Le déplacement est représenté par le vecteur

$$\vec{D} = \overrightarrow{PQ} = (4 - 2, 6 - 1, 2 - 0) = (2, 5, 2).$$

Le travail est alors calculé comme suit

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot \vec{D} = (3, 4, 5) \cdot (2, 5, 2) \\ &= 6 + 20 + 10 = 36. \end{aligned}$$

Si la longueur est mesurée en mètres et si l'intensité de la force est mesurée en Newton, le travail est de 36 J.

Le produit scalaire vérifie plusieurs lois analogues à celles du produit ordinaire entre nombres réels. Elles sont énoncées dans le théorème suivant.

Les propriétés du produit scalaire

Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont des vecteurs de V_3 et c un scalaire, alors

- | | |
|--|---|
| 1. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} ^2$ | 2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ |
| 3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ | 4. $(c\vec{a}) \cdot \vec{b} = c(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (c\vec{b})$ |
| 5. $\vec{0} \cdot \vec{a} = 0$ | |

Les propriétés 1, 2 et 5 sont des conséquences immédiates de la définition du produit scalaire. La meilleure démonstration de la propriété 3 se fait en termes de composantes :

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3) && \text{addition algébrique de } \vec{b} \text{ et } \vec{c} \\ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) && \text{définition du produit scalaire} \\ &= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 + a_3b_3 + a_3c_3 && \text{distributivité} \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) && \text{regroupement des termes} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} && \text{par définition du produit scalaire} \end{aligned}$$

La démonstration de la propriété 4 est laissée en exercice.

STEWART | KOKOSKA

Analyse

Concepts et contextes

Volume 2 : Fonctions de plusieurs variables

Une étude approfondie des concepts

L'objectif majeur de ce manuel est la compréhension profonde des concepts. Chacun est introduit et formulé de manière rédigée, visuellement, numériquement et algébriquement avant que ne soit introduite sa définition formelle. Des exemples appropriés préparent souvent l'énoncé des théorèmes pour justifier la pertinence de leurs hypothèses. L'apprentissage au raisonnement mathématique est soutenu par les démonstrations (parfois reportées en annexe pour ne pas perdre le fil du discours).

Un apprentissage actif avec l'aide des outils de calcul

L'étudiant, maîtrisant les concepts et les différentes techniques, sera capable de choisir et d'utiliser les outils de calcul différentiel et intégral dans des contextes variés. L'apprentissage est favorisé par l'utilisation des calculatrices graphiques et/ou logiciels de calcul symbolique. Lors de chaque résolution de problèmes, l'accent est mis sur la méthode suivie ou l'activité de recherche mobilisée.

Nouveautés de la 4^e édition

- Les encadrés « De plus près » soulignent quelques détails souvent importants du concept ou de la proposition qui précède.
- Les erreurs fréquentes sont mises en évidence et immédiatement corrigées.
- Chaque chapitre commence par une situation réelle destinée à introduire la matière.
- La résolution des exemples, exercices et problèmes est plus détaillée.

Les deux volumes de cet ouvrage s'adressent aux étudiants de premier cycle universitaire qui, quelle que soit leur orientation, y trouveront des applications en Analyse.

Traduction de la 5^e édition américaine

... **Pierre Peretti** est Professeur émérite à l'université Paris Cité. Auteur de plusieurs livres parus aux Editions De Boeck Supérieur

- Mise en évidence des règles à retenir
- Des applications concrètes
- Chaque sujet est développé à partir d'exemples suivis de leurs solutions
- Des exercices à la fin de chaque section
- Chaque chapitre se termine par des révisions et des problèmes à résoudre

Chez le même éditeur



51,50 €

ISBN : 978-2-8073-5808-9

