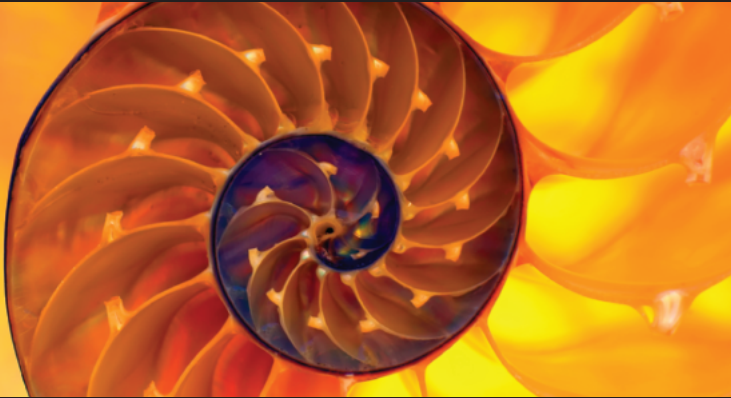


L3 et Master
Économie
Sciences sociales
Actuariat
Écoles d'ingénieurs

Nathalie WACH

Optimisation

**Programmation linéaire
et algorithme du simplexe**



COURS COMPLET

- Nombreuses applications
- 50 exercices corrigés
- Programmation de l'algorithme avec Python

Nathalie Wach

Optimisation

Programmation linéaire
et algorithme du simplexe

Chez le même éditeur [extrait du catalogue]

BELHAJ S., *Mathématiques pour l'économie et la gestion*
BELHAJ S., BEN AISSA A., *Mathématiques pour l'informatique*
BRIANE M. & PAGÈS G., *Analyse. Théorie de l'intégration*, 8^e édition
BURG P., *Mathématiques. Les fondamentaux en Licence 1*
CANON É., *Analyse numérique*
CARASSUS L., PAGÈS G., *Finance de marché. Modèles mathématiques à temps discret*
CARTON O., *Langages formels. Calculabilité et complexité*
CHOULLI M., *Analyse fonctionnelle*
CHOULLI M., *Analyse complexe*
COTTET-EMARD F., *36 problèmes corrigés pour le CAPES de mathématiques*
COTTET-EMARD F., *Probabilités et tests d'hypothèses*
COTTET-EMARD F., *Algèbre linéaire et bilinéaire*
COTTET-EMARD F., *Analyse*
COTTET-EMARD F., *Toutes les maths – Analyse en 40 fiches*
COTTET-EMARD F., *Toutes les maths – Algèbre et probabilités en 62 fiches*
DARRACQ M.-C. & ROMBALDI J.-É., *Analyse pour la Licence*
DARRACQ M.-C. & ROMBALDI J.-É., *Algèbre et géométrie pour la Licence*
DARRACQ M.-C. & ROMBALDI J.-É., *Probabilités pour la Licence*
DEPAUW J., *Statistiques*
GIRARDIN V., LIMNIOS N., *Probabilités et introduction à la statistique*
MANSUY R., R. MNEIMNÉ, *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes – 3^e édition*
PAGÈS G., *101 quizz qui banquent. Mathématiques et finances sont-elles indépendantes ?*
WASSEF P., *Algèbre. Arithmétique pour l'informatique*

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web :

www.deboecksuperieur.com

En couverture : Coupe d'un nautille © Bereta/Getty Images

Maquette intérieure : Hervé Soulard / Nexeme

Mise en page de l'auteur

Maquette de couverture : Primo&Primo

Couverture : SCM, Toulouse

Dépôt légal :

Bibliothèque royale de Belgique : 2025/13647/073

Bibliothèque nationale, Paris : juin 2025

ISBN : 978-2-8073-6608-4

Tous droits réservés pour tous pays.

Il est interdit, sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, de reproduire (notamment par photocopie) partiellement ou totalement le présent ouvrage, de le stocker dans une banque de données ou de le communiquer au public, sous quelque forme ou de quelque manière que ce soit.

© De Boeck Supérieur SA, 2025 – Rue du Bosquet 7, B1348 Louvain-la-Neuve
De Boeck Supérieur – 5 allée de la 2^e DB, 75015 Paris

Table des matières

Avant-propos	5
1 Introduction	7
1.1 Brève historique	7
1.2 Exemples typiques	11
1.3 Mise en équation	11
1.4 Définitions	13
1.5 Exercices	14
1.6 Solution des exercices	16
2 Un peu de géométrie et de topologie	19
2.1 Topologie de $\mathbf{R}^n$	19
2.2 Convexité	24
2.3 Polyèdres	28
2.4 Enveloppe convexe - Sommets	33
2.5 Théorème de Krein-Milman	38
2.6 Fonctions affines et maximum	43
2.7 Théorème fondamental	47
2.8 Résolution graphique en dimension 2	48
2.9 Exercices	51
2.10 Solution des exercices	54
3 Algorithme du simplexe	69
3.1 Forme canonique d'un problème d'optimisation linéaire	69
3.2 Problème standard du maximum	72
3.3 Tableau basique	78
3.4 Solution basique	81
3.5 Exemple de production	88
3.6 Boucle de l'algorithme	90
3.7 Effet sur la fonction ω	94
3.8 Algorithme du simplexe	100
3.9 Méthode des deux phases	104
3.10 Exercices	113
3.11 Solution des exercices	118

4	Dualité	143
4.1	Problème dual	144
4.2	Théorème de dualité faible	149
4.3	Théorème de dualité forte	153
4.4	Écarts complémentaires	158
4.5	Variations du problème primal	160
4.6	Exercices	166
4.7	Solution des exercices	171
5	Programmation	187
5.1	Algorithme du simplexe	187
5.2	Méthode des deux phases	188
5.3	Solution des exercices	189
	Bibliographie	206
	Index	207

Avant-propos

Ce livre est issu d'un cours destiné aux étudiants de troisième année de Double Licence Mathématique et Economie à l'université de Strasbourg. On y présente les bases mathématiques de l'optimisation linéaire et de l'algorithme du simplexe en vue d'applications, à l'économie par exemple. Il s'agit d'un cours de mathématique complet, alors que bien souvent l'algorithme du simplexe est présenté comme une méthode à appliquer.

Toutes les notions utiles sont introduites de manière détaillée et illustrées par des exemples. On y retrouvera les définitions classiques de topologie de $\mathbf{R}^n$ (ouverts, fermés, bornés, compacts) ainsi que celles de géométrie (convexité, sommets, polyèdres, fonctions affines) utiles pour comprendre le principe de l'algorithme du simplexe. La plupart des résultats nécessaires à la mise en place et à l'exécution de celui-ci sont démontrés, les critères d'arrêt sont énoncés sous forme de propositions. Les seuls résultats admis en prérequis sont des résultats d'analyse, liés à la notion de continuité d'une fonction, en particulier le théorème de compacité de l'image d'un compact par une fonction continue.

Les exercices sont nombreux et ils sont presque tous corrigés de manière détaillée : les enseignants se plaignent régulièrement que les étudiants ne savent pas rédiger, ainsi, plutôt que de donner simplement des indications, la correction est vue ici comme un modèle de rédaction.

Ce cours est donc auto-suffisant, même s'il demande de la part du lecteur une certaine connaissance et habitude des mathématiques (manier des concepts, faire des démonstrations). Il sera utile aux étudiants de licence de mathématique, d'économie ou d'actuariat, curieux d'en apprendre plus sur les mathématiques de l'optimisation linéaire, aux étudiants qui préparent l'épreuve de modélisation de l'agrégation de mathématique et aux enseignants qui auront à enseigner l'optimisation linéaire.

Je remercie vivement toutes les personnes qui ont enseigné ce cours avant ou en même temps que moi : Paul Girault, qui m'a gentiment donné accès à toutes ses notes de cours, Nicolas Juillet, Michaël Bestard et Roxana Sublet pour leur relecture. Roxana Sublet a également participé à l'écriture du programme en python ; sans elle, cette partie n'aurait pas pu voir le jour.

Chapitre 1

Introduction

L'*optimisation linéaire*, aussi appelée *programmation linéaire*, est à l'origine du développement de l'optimisation mathématique. Les premiers exemples sont des exemples de planification de production et ont été résolus par L. Kantorovitch (1939), qui a mis en évidence la similarité de différentes situations. Plus tard, G. Dantzig (1947) résoud des problèmes d'optimisation de transport pour l'US Air Force. L'application de ces méthodes d'optimisation permet aux entreprises d'améliorer significativement leur gestion.

De quoi s'agit-il ?

Lorsque l'on parle d'*optimisation*, il s'agit de maximiser ou minimiser certaines quantités, en général exprimées sous forme de fonctions et en respectant des contraintes.

Le deuxième terme de l'intitulé est *linéaire* : seules des fonctions affines ou linéaires interviennent, que ce soit pour définir les conditions ou bien la fonction à optimiser.

Les problèmes à résoudre sont issus de situations concrètes et de domaines variés ; ils peuvent être modélisés par des systèmes d'inégalités linéaires et dans lesquels la fonction à optimiser est affine.

1.1 Brève historique

Les premiers problèmes d'optimisation linéaire sont étudiés par Leonid Kantorovitch, mathématicien et économiste soviétique, dès les années 1930, en tant que consultant pour la fabrication de contreplaqué. Constatant que le problème spécifique qu'il a à résoudre n'est qu'un exemple de problèmes typiques en économie, il s'attache donc à rechercher une méthode générale pour résoudre ce genre de problèmes. L'article est publié en 1939 en russe, puis traduit en anglais en 1960 sous le titre *Mathematical Methods of Organizing and Planning of Production* [Ka1960] ; Kantorovitch y décrit de nombreux exemples et des classes de problèmes d'optimisation linéaire. Il y explique aussi la méthode de résolution par les multiplicateurs, qu'il appelle *method of resolving multipliers*¹.

1. voir <https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1975/kantorovich/25950-autobiography-1975/>

Voici la première situation traitée et résolue par L. Kantorovitch :

Une entreprise possède huit machines à écorçage et doit préparer cinq essences de bois, dans les proportions suivantes :

type 1	type 2	type 3	type 4	type 5
10%	12%	28%	36%	14%

La productivité des machines en fonction du bois, c'est-à-dire le nombre d'unités maximales pouvant être produites par jour, est indiquée par le tableau :

	type 1	type 2	type 3	type 4	type 5
machine 1	4	7	8,5	13	16,5
machine 2	4,5	7,8	9,7	13,7	17,5
machine 3	5	8	10	14,8	18
machine 4	4	7	9	13,5	17
machine 5	3,5	6,5	8,5	12,7	16
machine 6	3	6	8	13,5	15
machine 7	4	7	9	14	17
machine 8	5	8	10	14,8	18

Comment répartir la production sur les différentes machines pour obtenir la plus grande quantité de bois final, en respectant la proportion demandée ?

La première solution qui vient à l'esprit est une répartition uniforme de la production sur chaque machine :

	type 1	type 2	type 3	type 4	type 5
machine 1	0,1	0,12	0,28	0,36	0,14
machine 2	0,1	0,12	0,28	0,36	0,14
machine 3	0,1	0,12	0,28	0,36	0,14
machine 4	0,1	0,12	0,28	0,36	0,14
machine 5	0,1	0,12	0,28	0,36	0,14
machine 6	0,1	0,12	0,28	0,36	0,14
machine 7	0,1	0,12	0,28	0,36	0,14
machine 8	0,1	0,12	0,28	0,36	0,14

Kantorovitch constate que l'on peut augmenter la quantité de bois écorcé si l'on choisit une autre répartition des essences que celle qui consiste à préparer chaque essence de bois sur chaque machine, dans la proportion finale attendue. Il interprète les rapports de productivité comme des rapports de temps pour préparer des quantités identiques de différentes essences de bois : ainsi, sur la machine 1 écorcer de l'essence de type 1 est 4/7 fois plus rapide qu'écorcer la même quantité d'essence de type 2.

On note x_{ij} la fraction d'une journée consacrée par la machine j à écorcer du bois de type i et p_{ij} la productivité associée. Pour la machine j , la contrainte s'écrit

$$x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + x_{4j} + x_{5j} \leq 1$$

Il s'agit de maximiser la production totale

$$\omega = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^8 x_{ij} p_{ij}$$

en respectant les contraintes de proportion pour chaque essence de bois :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^8 x_{1j}p_{1j} &= 0,1\omega = 0,1 \times \left(\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^8 x_{ij}p_{ij} \right) \\ \sum_{j=1}^8 x_{2j}p_{2j} &= 0,12\omega = 0,12 \times \left(\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^8 x_{ij}p_{ij} \right) \\ \sum_{j=1}^8 x_{3j}p_{3j} &= 0,28\omega = 0,28 \times \left(\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^8 x_{ij}p_{ij} \right) \\ \sum_{j=1}^8 x_{4j}p_{4j} &= 0,36\omega = 0,36 \times \left(\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^8 x_{ij}p_{ij} \right) \\ \sum_{j=1}^8 x_{5j}p_{5j} &= 0,14\omega = 0,14 \times \left(\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^8 x_{ij}p_{ij} \right) \end{aligned}$$

Kantorovitch obtient le résultat

	type 1	type 2	type 3	type 4	type 5
machine 1	0	0,3321	0	0	0,6679
machine 2	0	0,9129	0,0871	0	0
machine 3	0,5744	0	0,4256	0	0
machine 4	0	0	0,938	0,062	0
machine 5	0	0	1	0	0
machine 6	0	0	0	1	0
machine 7	0	0	0	1	0
machine 8	1	0	0	0	0

et constate que le gain de productivité est de 5% par rapport à la répartition uniforme.

Indépendamment des travaux de Kantorovitch, Tjalling Koopmans, mathématicien économiste d'origine néerlandaise puis naturalisé américain en 1946, étudie des problèmes de transport et est ainsi amené à s'intéresser à la programmation linéaire. Il prend comme exemple le transport maritime (cf [Ko1951]), expose le modèle dans le cas de n ports et s'intéresse également aux coûts marginaux ; la modélisation qu'il propose dans le cas de deux ports, permet de se ramener au problème suivant :

Considérons deux ports P et Q ; il s'agit d'acheminer chaque mois y_{PQ} cargos chargés du port P vers le port Q et y_{QP} cargos chargés de Q vers P , en minimisant le nombre total de bateaux utilisés. La durée totale d'un trajet chargé de P vers Q (chargement en P , voyage, puis déchargement en Q) est notée t_{PQ} et la durée du trajet à vide est notée s_{PQ} . On note de même t_{QP} et s_{QP} les durées de trajets Q vers P .

Pour écrire les équations dans ce cas particulier de deux ports, T.C. Koopmans note x_1 le nombre de bateaux par mois effectuant les deux trajets chargés, x_2 (respectivement x_3) le nombre de bateaux par mois effectuant le trajet chargé de P vers Q (respectivement de Q vers P) et le retour vide, puis x_4 le nombre de bateaux effectuant les deux trajets à vide.

Le nombre total de cargos utilisés est

$$\omega = (t_{PQ} + t_{QP})x_1 + (t_{PQ} + s_{QP})x_2 + (t_{QP} + s_{PQ})x_3 + (s_{PQ} + s_{QP})x_4$$

qu'il s'agit de minimiser.

C'est en 1947 que George Dantzig, mathématicien américain découvre la méthode du simplexe pour résoudre des problèmes de l'US Air Force et implante l'algorithme sur des ordinateurs. L'article paraît en 1951 sous le titre *Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities* (cf [Da1951]) dans la même monographie que l'article de Koopmans mentionné ci-dessus. G. Dantzig utilise l'expression *programmation linéaire*, que nous n'emploierons pas, à laquelle nous préférons l'expression *optimisation linéaire*.

La situation modèle qui est exposée par G. Dantzig et Marshall K. Wood dans *Programming of interdependant activities, I General discussions* (cf [Da1949]) est la suivante :

Pour organiser un pont aérien, qui se déroulera en quatre périodes, on dispose de 85 avions et de 210 équipages. Il s'agit d'acheminer 1,5 unités (1 unité vaut 100000 tonnes) au cours de la première période, 1,6 unités au cours de la deuxième période, 1,8 unités au cours de la troisième période et 2 unités au cours de la quatrième période.

On sait que :

- 50 avions peuvent transporter 1 unité ;
- sur 50 avions participant au transport i , seuls 49 peuvent participer au transport $i + 1$;
- le coût du transport pour un avion est de 9000 unités monétaires (1 unité monétaire vaut 1000 \$) ;
- si nécessaire, on peut se procurer des avions supplémentaires au prix de 200 unités par avion ;
- garder un équipage en réserve coûte 7 unités ;
- etc.

Il s'agit d'organiser le plan de vol par quart en minimisant le coût du pont aérien.

La découverte de l'algorithme du simplexe marque le début de la recherche en optimisation numérique, qui ne se limite pas aux cas linéaires.

Le prix Nobel d'économie est attribué à Leonid Kantorovitch et Tjalling Charles Koopmans, en 1975, pour leurs contributions à la théorie de l'allocation des ressources.²

L'algorithme du simplexe se programme facilement, mais son temps d'exécution peut être exponentiel selon les données de départ. Il est polynomial en moyenne, ce qui justifie son utilisation courante. Trouver une borne maximale pour le temps d'exécution de l'algorithme du simplexe et comprendre la différence entre le temps d'exécution théorique et le temps constaté en pratique est l'objet de beaucoup de recherches (cf [Bo1987]).

Il existe des algorithmes plus rapides, comme l'algorithme des points intérieurs ; nous ne nous étendrons pas davantage sur les coûts d'exécution ni sur les autres méthodes de résolution des problèmes d'optimisation linéaire.

2. voir <https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1975/summary/>

1.2 Exemples typiques

Pour fixer les idées, commençons par présenter deux exemples caractéristiques, simplifiés, qui correspondent chacun à des situations classiques d'optimisation linéaire : un problème de gestion de production et un problème de transport.

1.2.1 Problème de production

Cet exemple est inspiré de l'exemple 1 de L. Kantorovitch (cf [Ka1960])

Une entreprise cherche à optimiser la fabrication d'un objet constitué de deux pièces métalliques ; pour usiner ces pièces, elle possède trois tours à fraiser et un tour automatique, dont la production quotidienne maximale par machine est exprimée dans le tableau suivant :

	type I	type II
tour à fraiser	10	20
tour automatique	30	70

Le tour automatique peut donc fabriquer au plus 30 pièces de type I ou 70 pièces de type II.

Comment répartir la production de chaque pièce entre les deux types de machines, de manière à avoir le plus d'objets en fin de journée et à utiliser toutes les pièces fabriquées ?

1.2.2 Problème de transport

Cet exemple est inspiré de l'exemple de deux ports de T. Koopmans (cf [Ko1951]) et de la péniche-navette reliant Saverne et Strasbourg³.

Chaque mois, on cherche à acheminer, par le canal de la Marne au Rhin, au moins l'équivalent de 308 conteneurs pleins de Saverne vers Strasbourg et 242 conteneurs pleins de Strasbourg vers Saverne. Comme une péniche fait l'aller-retour en deux jours (un trajet dure 9h, chargement et déchargement de la péniche durant chacun 2h30), il y a deux péniches afin d'assurer un aller-retour quotidien. Les données sont les suivantes :

- une péniche peut contenir au plus 16 conteneurs ;
- il faut en moyenne un jour pour remplir le conteneur et un jour pour le vider.

Quel est le nombre minimum de conteneurs nécessaires pour assurer le transport des marchandises ?

1.3 Mise en équation

Comme on peut le constater sur les deux exemples ci-dessus, une grande partie de la modélisation a été faite en amont et permet l'écriture d'un énoncé simple. Il reste à procéder à la mise en équation. Celle-ci doit mener aux équations ou inégalités du premier degré et passe par deux étapes :

3. <https://www.strasbourg.port.fr/wp-content/uploads/2018/11/20200304-Fiche-PAS-navette-saverne-def.pdf>

- le choix des inconnues ;
- l'interprétation des contraintes et l'écriture de la fonction à maximiser ou à minimiser.

Revenons aux deux situations pour illustrer la mise en équation.

1.3.1 Problème de production

Notons x_1 le nombre de pièces de type I fabriquées par les tours à fraiser, x_2 le nombre de pièces de type I fabriquées par le tour automatique, x_3 le nombre de pièces de type II fabriquées par les tours à fraiser et x_4 le nombre de pièces de type II fabriquées par le tour automatique. Ce sont des quantités positives ou nulles.

La condition que toutes les pièces doivent être utilisées pour fabriquer l'objet final fournit une relation entre les inconnues, à savoir :

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4$$

Ainsi, $x_4 = x_1 + x_2 - x_3$.

De la première ligne du tableau, on déduit que fabriquer la pièce I prend deux fois plus de temps que la pièce II sur le tour à fraiser et que le nombre maximum de pièces qui peuvent être fabriquées sur ces trois tours est 60 pour le type II ou bien 30 pièces pour le type I ; ainsi

$$2x_1 + x_3 \leq 60.$$

De la même manière, de la deuxième ligne du tableau, on déduit que fabriquer sur le tour automatique 3 pièces I prend autant de temps que fabriquer 7 pièces II et que le nombre maximum de pièces pouvant être fabriquées sur ce tour est 70 pour le type II ou bien 30 pour le type I ; ainsi

$$\frac{7}{3}x_2 + x_4 \leq 70.$$

On en déduit les contraintes, qui s'expriment sous la forme d'un système d'inégalités, à trois inconnues, après avoir remplacé x_4 par son expression en fonction de x_1 , x_2 et x_3 :

$$\Gamma \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ 2x_1 + x_3 \leq 60 \\ x_1 + \frac{10}{3}x_2 - x_3 \leq 70 \end{cases}$$

Il s'agit de rendre maximum le nombre d'objets fabriqués, c'est-à-dire

$$\omega = x_1 + x_2.$$

Le problème consiste à déterminer le maximum de la fonction ω sur le domaine Γ .

1.3.2 Problème de transport

En suivant l'exemple de T. Koopmans, notons x_1 le nombre de conteneurs faisant le trajet aller-retour pleins, x_2 (respectivement x_3) le nombre de conteneurs faisant le trajet Saverne-Strasbourg pleins (respectivement Strasbourg-Saverne) et le retour à vide. Toutes les quantités sont positives ou nulles.

Avec les temps de chargement et de déchargement, les conteneurs pleins sur les deux trajets font un aller-retour en 6 jours, alors que les autres font un aller-retour en 4 jours. Pour simplifier, considérons qu'un mois compte 30 jours et 4 week-ends, soit 22 jours de travail.

La condition sur le nombre de conteneurs pleins à transporter de Saverne à Strasbourg par mois est

$$\frac{22}{6}x_1 + \frac{22}{4}x_2 \geq 308$$

celle sur le nombre de conteneurs pleins à transporter de Strasbourg à Saverne par mois est

$$\frac{22}{6}x_1 + \frac{22}{4}x_3 \geq 242$$

Il reste à écrire l'inégalité correspondant aux capacités d'une péniche :

$$\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 \leq 16$$

On obtient

$$\Gamma \begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\ \frac{22}{6}x_1 + \frac{22}{4}x_2 \geq 308 \\ \frac{22}{6}x_1 + \frac{22}{4}x_3 \geq 242 \\ \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 \leq 16 \end{cases}$$

Le nombre total de conteneurs à minimiser est :

$$\omega = x_1 + x_2 + x_3.$$

1.4 Définitions

Définition 1.4.1 *Un problème d'optimisation linéaire ou de programmation linéaire est un problème dans lequel les variables sont des nombres réels satisfaisant des équations ou des inéquations linéaires et dans lequel la valeur d'une fonction affine des variables doit être rendue minimale (ou maximale). Les équations ou inéquations à satisfaire s'appellent les contraintes.*

De manière explicite, il s'agit d'un problème à n inconnues réelles, notées $x_1, \dots, x_n$, qui sont soumises à s contraintes. Les contraintes sont des inégalités ou des égalités linéaires et peuvent être de trois types :

$$\Gamma \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \text{ pour } 1 \leq i \leq q \\ (2) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \text{ pour } q+1 \leq i \leq r \\ (3) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \text{ pour } r+1 \leq i \leq s \end{array} \right.$$

Les coefficients a_{ij} et b_j pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq s$ sont des nombres réels et les contraintes définissent un sous-ensemble Γ de $\mathbf{R}^n$.

La fonction à optimiser (maximiser ou minimiser) est une fonction affine ω de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, qui peut s'écrire

$$\omega(x_1, \dots, x_n) = \omega_0 + \sum_{i=1}^n \omega_i x_i,$$

où les coefficients ω_i pour $0 \leq i \leq n$ sont des réels.

Définitions 1.4.2 *L'ensemble Γ s'appelle le domaine des contraintes du problème. Les contraintes $x_i \geq 0$, lorsqu'elles apparaissent, sont appelées contraintes de positivité. Les autres contraintes sont appelées contraintes principales. Un point de Γ est appelé solution réalisable. La fonction ω est parfois appelée fonction objectif.*

On dit aussi que Γ est le domaine des solutions réalisables. Le problème d'optimisation consiste donc à rechercher la *meilleure* solution réalisable ou solution réalisable *optimale*.

Le but du cours est de démontrer les théorèmes et d'apprendre les techniques qui permettent de résoudre ces problèmes, notamment la *méthode du simplexe*. Nous rappellerons toutes les notions utiles et reviendrons sur les définitions d'inéquation linéaire et de fonction affine, notamment.

Le plan du cours est le suivant : pour commencer, nous allons étudier les propriétés topologiques et géométriques des domaines des contraintes ainsi que celles des fonctions affines. La deuxième partie sera consacrée à l'algorithme du simplexe et la troisième partie à l'étude de la dualité et l'interprétation des problèmes duaux.

1.5 Exercices

Exercice 1.5.1 Une fabrique de conserves, qui comporte deux usines, expédie des caisses vers trois points de ventes. Nous souhaitons que le plan d'expédition des caisses minimise le coût total de transport des usines aux points de vente. L'offre des usines et les commandes (minimales) des points de ventes sont les suivantes (en nombre de caisses) :

- l'usine 1 (U_1) fournit 350 caisses ;
- l'usine 2 (U_2) fournit 450 caisses ;
- le point de vente 1 (V_1) a commandé 200 caisses ;
- le point de vente 2 (V_2) a commandé 300 caisses ;
- le point de vente 3 (V_3) a commandé 50 caisses.

Les coûts de transport de chaque origine vers chaque destination sont donnés dans le tableau ci-contre (en Euros par caisse) :

	V_1	V_2	V_3
U_1	25	17	16
U_2	24	18	14

- a) Ecrire un problème d'optimisation linéaire traduisant ce problème.
 b) Déterminer une solution réalisable et la valeur de la fonction objectif associée.

Exercice 1.5.2 La société *Le carton*, un fabricant de papier, fabrique des rouleaux de papier de largeur 90 cm et de longueur L . Les clients souhaitent cependant disposer de rouleaux de plus petite largeur (mais toujours de longueur L). On doit traiter la commande suivante :

- 100 rouleaux de largeur 50,
- 120 rouleaux de largeur 40,
- 75 rouleaux de largeur 30.

a) Répertoirez les cinq façons *intelligentes* de découper un rouleau. Ce sont les découpes permettant d'obtenir des rouleaux de largeur 50, 40 ou 30 cm avec des chutes de largeur strictement inférieure à 30 cm. On pourra répertorier ces découpes par les lettres A, B, C, D et E. Par exemple la découpe A consiste à produire un rouleau de largeur 50 et un rouleau de largeur 40 (il n'y a pas de chute). On pourra présenter les découpes dans un tableau.

b) Ecrire un problème d'optimisation linéaire traduisant le problème consistant à minimiser le nombre de rouleaux utilisés.

Exercice 1.5.3 Un grossiste désire renouveler son stock de savons. Il s'adresse à trois fabricants (F_1 , F_2 et F_3) pour une commande d'au plus 20 lots (un lot correspond à 100 kg), sachant que :

- le fabricant F_1 peut fournir au maximum 10 lots, mais n'accepte jamais de commandes inférieures à 5 lots ;
- le fabricant F_2 peut fournir au maximum 8 lots, mais n'accepte jamais de commandes inférieures à 4 lots ;
- le fabricant F_3 peut fournir au maximum 9 lots ;
- le grossiste ne peut pas investir plus de 18000 Euros.

Les prix d'achat unitaires (en centaines d'Euros) auprès du fabricant et de revente sont les suivants

	F_1	F_2	F_3
prix d'achat	9	8	10
prix de revente	12	10	13,5

Le grossiste cherche à déterminer les commandes à passer à chaque fournisseur de manière à avoir un profit maximal.

- a) Peut-on écrire un problème d'optimisation linéaire permettant de répondre à la question du grossiste ?
 b) Déterminer une solution réalisable et la valeur de la fonction objectif associée.

1.6 Solution des exercices

Exercice 1.5.1

a) Notons c_{ij} le nombre de caisses expédiées de l'usine i vers le point de vente j .

En tenant compte de la production de chaque usine, on obtient les deux inéquations :

$$c_{11} + c_{12} + c_{13} \leq 350 \text{ et } c_{21} + c_{22} + c_{23} \leq 450.$$

Pour que les commandes des points de vente soient honorées : $c_{11} + c_{21} = 200$, $c_{12} + c_{22} = 300$ et $c_{13} + c_{23} = 50$.

La fonction à minimiser est $\omega = 25c_{11} + 24c_{21} + 17c_{12} + 18c_{22} + 16c_{13} + 14c_{23}$.

Le problème consiste à rechercher $\inf_{\Gamma} \omega$ où

$$\Gamma : \begin{cases} c_{ij} \geq 0 \\ c_{11} + c_{12} + c_{13} \leq 350 \\ c_{21} + c_{22} + c_{23} \leq 450 \\ c_{11} + c_{21} = 200 \\ c_{12} + c_{22} = 300 \\ c_{13} + c_{23} = 50 \end{cases}$$

et $\omega = 25c_{11} + 24c_{21} + 17c_{12} + 18c_{22} + 16c_{13} + 14c_{23}$.

b) Une solution réalisable est, par exemple, $c_{11} = 100$, $c_{21} = 100$, $c_{12} = 200$, $c_{22} = 100$, $c_{13} = 0$ et $c_{23} = 50$. On a alors

$$\omega = 25 \times 100 + 24 \times 100 + 17 \times 200 + 18 \times 100 + 16 \times 0 + 14 \times 50 = 10800.$$

Exercice 1.5.2

a) Voici les découpes possibles :

	50 cm	40 cm	30 cm
découpe A	1	1	0
découpe B	1	0	1
découpe C	0	2	0
découpe D	0	1	1
découpe E	0	0	3

b) Notons a le nombre de rouleaux découpés en suivant la découpe A, b le nombre de rouleaux découpés en suivant la découpe B, c , d et e de même pour les autres découpes.

Pour honorer la commande, il faut :

- au moins 100 rouleaux de largeur 50, d'où $a + b \geq 100$;
- au moins 120 rouleaux de largeur 40, d'où $a + 2c + d \geq 120$;
- au moins 75 rouleaux de largeur 30, d'où $b + d + 3e \geq 75$.

On obtient le domaine de contraintes

$$\Gamma : \begin{cases} a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0, e \geq 0 \\ a + b \geq 100 \\ a + 2c + d \geq 120 \\ b + d + 3e \geq 75 \end{cases}$$

La fonction à minimiser sur Γ est $\omega = a + b + c + d + e$.

Exercice 1.5.3

a) Notons x_1 , x_2 , et x_3 les commandes de lots de savons à effectuer respectivement aux fabricants F_1 , F_2 et F_3 . Il y a plusieurs situations possibles dans cet exemple :

- On suppose dans un premier temps que le grossiste commande auprès des trois fabricants. Les contraintes sur F_1 se traduisent par $x_1 \geq 5$ et $x_1 \leq 10$; les contraintes sur F_2 deviennent $x_2 \geq 4$ et $x_2 \leq 8$; celle sur F_3 devient $x_3 \leq 9$.

Le grossiste ne commandant pas plus de 20 lots de savons, on obtient la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 \leq 20$.

La contrainte d'investissement devient $9x_1 + 8x_2 + 10x_3 \leq 180$.

Le domaine des contraintes Γ_1 est alors déterminé par les inégalités

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\ 5 \leq x_1 \leq 10 \\ 4 \leq x_2 \leq 8 \\ x_3 \leq 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 \\ 9x_1 + 8x_2 + 10x_3 \leq 180 \end{cases}$$

Le profit est la différence entre le prix de revente et le prix d'achat ; la fonction profit à maximiser est alors

$$\omega = (12 - 9)x_1 + (10 - 8)x_2 + (13,5 - 10)x_3 = 3x_1 + 2x_2 + 3,5x_3.$$

Il s'agit alors de déterminer $\sup_{\Gamma_1} \omega$.

- Si le grossiste commande uniquement auprès des fabricants F_1 et F_3 , $x_2 = 0$, l'expression de ω reste la même et on obtient le domaine Γ_2 :

$$\Gamma_2 : \begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 = 0, x_3 \geq 0 \\ 5 \leq x_1 \leq 10 \\ x_3 \leq 9 \\ x_1 + x_3 \leq 20 \\ 9x_1 + 10x_3 \leq 180 \end{cases}$$

Il s'agit alors de déterminer $\sup_{\Gamma_2} \omega$.

- Si le grossiste commande uniquement auprès des fabricants F_2 et F_3 , $x_1 = 0$, l'expression de ω reste la même et on obtient le domaine Γ_3 :

$$\Gamma_3 : \begin{cases} x_1 = 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\ 4 \leq x_2 \leq 8 \\ x_3 \leq 9 \\ x_2 + x_3 \leq 20 \\ 8x_2 + 10x_3 \leq 180 \end{cases}$$

Il s'agit alors de déterminer $\sup_{\Gamma_3} \omega$.

• Il reste le cas où le grossiste commande uniquement auprès de F_3 , $x_1 = x_2 = 0$; on obtient le domaine Γ_4 :

$$\Gamma_4 : \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 \geq 0 \\ x_3 \leq 9 \\ x_3 \leq 20 \\ 10x_3 \leq 180 \end{cases}$$

Il s'agit alors de déterminer $\sup_{\Gamma_4} \omega$.

Remarque : Les quatre problèmes ci-dessous sont des problèmes d'optimisation linéaire. Le problème du grossiste consiste à déterminer $\sup_{\Gamma} \omega$ où $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ est la réunion des 4 domaines. Ce n'est pas un problème d'optimisation linéaire car Γ ne s'exprime pas sous la forme voulue.

b) Une solution réalisable (pour le problème 1) est, par exemple, $X = (6, 5, 1)$ et $\omega(X) = 18 + 10 + 3 = 31$.

Chapitre 2

Un peu de géométrie et de topologie

Ce chapitre est consacré au rappel des définitions et des propriétés des notions utiles pour la compréhension et la démonstration des théorèmes intervenant dans l'étude des problèmes d'optimisation linéaire. Le but du chapitre est d'énoncer le théorème fondamental 2.7.1, qui est un critère d'existence de solution.

Dans un premier temps, les notions fondamentales de topologie sont revues ; dans le deuxième paragraphe, nous étudierons la convexité, pour appliquer cette notion, dans le troisième paragraphe, aux domaines des contraintes, c'est-à-dire aux polyèdres. Nous définirons ensuite les enveloppes convexes et les sommets en 2.4, puis les fonctions affines en 2.6, de manière à terminer ce chapitre par le théorème fondamental.

2.1 Topologie de $\mathbf{R}^n$

On rappelle ici des propriétés de l'ensemble

$$\mathbf{R}^n = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ où } x_i \in \mathbf{R}, \text{ pour } 1 \leq i \leq n \right\}.$$

(i) C'est un espace vectoriel muni d'une norme $\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ qui vérifie :

- $\|X\| = 0 \Leftrightarrow X = 0$;
- pour $\lambda \in \mathbf{R}$, $\|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|$;
- inégalité triangulaire : $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$.

Optimisation

Ce manuel présente les bases mathématiques de l'optimisation linéaire destinées principalement aux étudiants des filières de mathématique appliquées à l'économie, aux sciences sociales et à l'actuariat, dès la 3^e année de Licence, ainsi qu'aux élèves des écoles d'ingénieurs.

Toutes les notions nécessaires à la compréhension sont rappelées et il propose de nombreux exemples d'application. Les tests d'arrêt de l'algorithme, présentés sous forme de théorème, sont intégralement démontrés. Plus de 50 exercices intégralement corrigés viennent compléter ce livre.

SOMMAIRE

Avant-propos

1. Introduction

Brève historique – Exemples typiques –
Mise en équation – Définitions – Exercices –
Solution des exercices

2. Un peu de géométrie et de topologie

Topologie de $\mathbb{R}^n$ – Convexité – Polyèdres –
Enveloppe convexe – Sommets – Théorème
de Krein-Milman – Fonctions affines
et maximum – Théorème fondamental –
Résolution graphique en dimension 2 –
Exercices – Solution des exercices

3. Algorithme du simplexe

Forme canonique d'un problème
d'optimisation linéaire – Problème standard

du maximum – Tableau basique – Solution
basique – Exemple de production – Boucle
de l'algorithme – Effet sur la fonction ω –
Algorithme du simplexe – Méthode des deux
phases – Exercices – Solution des exercices

4. Dualité

Problème dual – Théorème de dualité faible –
Théorème de dualité forte – Écarts
complémentaires – Variation du problème
primal – Exercices – Solution des exercices

5. Programmation

Algorithme du simplexe – Méthode des deux
phases – Solution des exercices

Bibliographie

LES PLUS

- Les définitions classiques de topologie de $\mathbb{R}^n$ et celles de géométrie sont présentes pour comprendre le principe de l'algorithme du simplexe
- La plupart des résultats nécessaires à la mise en place et à l'exécution de ce principe sont démontrés

Nathalie Wach est maîtresse de conférences à l'université de Strasbourg et directrice de l'IREM de Strasbourg. Elle a enseigné en master MEEF pendant de nombreuses années. Actuellement, elle enseigne l'optimisation en 3^e année de licence.

21,90 €

ISBN : 978-2-8073-6608-4



deboeck
SUPÉRIEUR

www.deboecksuperieur.com

De Boeck Supérieur s'engage
durablement
pour l'environnement

