

FRANÇOIS COTTET-EMARD

L1/L2
CAPES

MATHS

LES **CLÉS** POUR RÉSOUDRE 400 EXERCICES INCONTOURNABLES

**AVANT DE VOUS LANCER,
SUIVEZ LE GUIDE !**

- ▷ Domaines concernés
- ▷ Résultats fondamentaux utilisables
- ▷ Ce que l'on vous demandera de montrer
- ▷ Les questions à se poser



+ EN LIGNE

Compléments pédagogiques
Illustrations graphiques
Corrigés des exercices



deboeck **B**
SUPÉRIEUR

FRANÇOIS COTTET-EMARD

**L1/L2
CAPES**

MATHS

**LES CLÉS POUR RÉSOUDRE
400 EXERCICES INCONTOURNABLES**

deboeck **B**
SUPÉRIEUR

*L'accès aux ressources numériques associées à cet ouvrage est **personnel et incessible**. Il est soumis aux conditions d'utilisation en vigueur accessible sur le site De Boeck Supérieur et peut être interrompu à tout moment, sans garantie de maintien ou de compensation.*

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : **www.deboecksuperieur.com**

© De Boeck Supérieur s.a., 2025

Rue du Bosquet, 7 - B-1348 Louvain-la-Neuve

Tous droits réservés pour tous pays.

Il est interdit, sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, de reproduire (notamment par photocopie) partiellement ou totalement le présent ouvrage, de le stocker dans une banque de données ou de le communiquer au public, sous quelque forme et de quelque manière que ce soit.

Dépôt légal :

Bibliothèque nationale, Paris : août 2025

Bibliothèque royale de Belgique, Bruxelles : 2025/13647/097

ISBN 978-2-8073-6706-7

Sommaire

Présentation	5
Abréviations courantes	7
Accès en ligne	8

Algèbre

1	Polynômes et fractions rationnelles [En ligne]	
2	Structures et relations de base [En ligne]	
3	Espaces vectoriels	11
4	Matrices, systèmes linéaires, équations de SEV	21
5	Applications linéaires, matrices	32
6	Déterminants	46
7	Valeurs et vecteurs propres, diagonalisation	54
8	Polynômes d'endomorphisme ou de matrice	64
9	Trigonalisation élémentaire des matrices	73
10	Puissances et exponentielle de matrices	82
11	Formes linéaires, dualité	92
12	Espaces euclidiens, produit scalaire	100
13	Isométries, cas essentiels de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ [En ligne]	
14	Espace vectoriel hermitien [En ligne]	
15	Formes bilinéaires symétriques, quadratiques	110
16	L'anneau $\mathbb{Z}$ et les analogies avec $K[X]$	122
17	Arithmétique : congruences, anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	133
18	Groupes, groupes finis, groupes cycliques	145
19	Permutations	156

MATHS - Les clés pour résoudre 400 exercices incontournables

Analyse

20	Topologie et gros théorèmes sur $\mathbb{R}$ [En ligne]	
21	Les suites numériques	165
22	Intégrale généralisée de Riemann	175
23	Séries numériques	185
24	Suites et séries de fonctions	196
25	Séries entières	209
26	Intégrales dépendant d'un paramètre	218
27	Séries de Fourier	228
28	Intégrale multiple [En ligne]	
29	Limites, continuité, dérivées partielles	239
30	Différentielle	248
31	Formule de Taylor, extrema	258
32	Applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$	268
33	Fonctions implicites	279
34	Equations différentielles du premier ordre	288
35	Equations $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$	298
36	Systèmes différentiels $X'(t) = AX(t)$ [En ligne]	

Probabilités

37	Dénombrements, analyse combinatoire	311
38	Univers, probabilités, probabilités conditionnelles	322
39	Variables aléatoires finies ou discrètes	335
40	Variables aléatoires continues à densité	351
41	Loi des grands nombres, TLC, approximation, loi limite [En ligne]	
42	Intervalle de fluctuation, de confiance	369
43	Tests d'hypothèse simples	380
44	Tests avec la loi de Student ou du χ^2 [En ligne]	
45	Chaînes de Markov élémentaires [En ligne]	

Présentation

Ce recueil d'exercices, qui est destiné à l'année L2 et à la préparation au Capes de mathématiques, se compose de 45 fiches (ou chapitres), réparties en Algèbre linéaire et générale (19 fiches), Analyse (16 fiches) et Probabilités (9 fiches). Parmi elles, 10 se trouvent entièrement dans les compléments en ligne qui accompagnent le livre papier. Par ailleurs, dans chaque fiche, un certain nombre d'exercices ont leur corrigé renvoyé aussi en ligne, pour que le lecteur ne soit pas toujours tenté de tourner la page et de lire trop vite le corrigé. Quelques compléments en ligne, en plus de corrigés d'exercices, contiennent des exemples concrets avec des dessins (convergence uniforme par exemple). L'accès aux compléments en ligne, regroupés dans trois fichiers PDF, est expliqué plus loin, il est très simple.

Les 10 fiches entièrement en ligne correspondent soit à des rappels supposés connus depuis le L1 (topologie de $\mathbb{R}$, polynômes, relations binaires par exemple), soit au contraire à des compléments à la limite des programmes de base (produit scalaire hermitien, tests d'hypothèse avec les lois de Student ou du χ^2 par exemple). La numérotation des fiches est logique mais peut surprendre : sachant que les fiches 13 et 14 sont entièrement en ligne, la fiche 12 du livre papier sera évidemment suivie directement de la fiche 15 dans le livre papier, c'est tout à fait normal.

L'originalité de l'ouvrage et de sa démarche pédagogique se trouve dans la conception de chaque fiche, qui commence par une « feuille de route », rédigée de façon très novatrice, suivie des énoncés des exercices puis de leurs corrigés. La feuille de route de chaque fiche n'est pas un simple rappel des définitions et des théorèmes, mais un cahier des charges de la bonne compréhension du sujet, et des façons de procéder. En particulier, et c'est volontaire dans l'esprit de l'ouvrage, certaines définitions *ne sont pas rappelées*, c'est au lecteur de les connaître a priori. Une ou deux fiches ont des « vrais rappels de cours », par exemple celle sur les intervalles de confiance et de fluctuation, lorsqu'il s'agit de notions délicates avec des risques de confusion. Chaque fiche est divisée en quatre rubriques.

Domaines concernés : cette rubrique décrit le contexte général de la fiche, elle fixe le cadre.

Résultats fondamentaux utilisables : cette rubrique remplace le traditionnel rappel de cours détaillé. Certaines définitions ou théorèmes ne sont pas explicitement rappelés,

MATHS - Les clés pour résoudre 400 exercices incontournables

on a plutôt une liste exhaustive sous forme d’inventaire, de tous les résultats dont on a besoin pour résoudre les exercices. Elle est souvent divisée en plusieurs sous-rubriques, par clarté. L’analogie en chirurgie serait de sortir et laisser accessible l’ensemble des instruments dont on va avoir besoin pour l’opération (chose qui est systématiquement faite, heureusement).

Ce que l’on vous demandera de montrer : il s’agit d’une liste à peu près exhaustive de toutes les questions que l’énoncé va demander, sur le sujet concerné. Il n’y a jamais une infinité de questions possibles, et il est bon d’avoir la liste des plus courantes, pour voir où l’on va.

Les questions à se poser : c’est le point le plus original de l’ouvrage, dans chaque fiche. Quand on est devant l’énoncé, et avant de se lancer tête baissée sans réfléchir, on doit se poser un certain nombre de questions, faire le tour de ce que l’on connaît, des points où l’on est plus ou moins à l’aise. On doit avoir en tête la liste des techniques et résultats utilisables, mais aussi le rapport entre ces connaissances et le contexte actuel. Répondre dans sa tête aux questions indiquées permet de complètement cerner les possibilités de résolution : le chirurgien se demande lequel des instruments correspond le mieux à ce qu’il veut faire, sachant qu’il n’a pas d’autre choix que ce qui est accessible à portée de main.

Cette feuille de route est donc une approche plus performante que le simple rappel de cours traditionnel.

Abréviations courantes

Afin d’alléger le texte et de limiter le nombre de pages de l’ouvrage papier, un certain nombre d’abréviations vont éventuellement se rencontrer dans l’ouvrage, surtout dans le livre papier. Ce n’est pas très élégant au sens « Victor Hugo », mais cela permet de gagner des sauts de ligne inutiles, et au final des pages.

i.e.	: à savoir (pour <i>id est</i> en latin)
ssi	: si et seulement si
CNS	: condition nécessaire et suffisante
EV	: espace vectoriel
SEV	: sous-espace vectoriel
PC	: polynôme caractéristique
v.p.	: valeur propre
SEP	: sous-espace propre
DL	: développement limité
IG	: intégrale généralisée
IPP	: intégration par parties
VAC	: variation de la constante
VA ou v.a.	: variable aléatoire

Il apparaît par endroits des développements limités ou asymptotiques faisant intervenir un reste noté $\varepsilon(x)$ ou $\eta(x)$ ou $\varepsilon(n)$: il est sous-entendu (même si ce n’est pas écrit pour des raisons typographiques) que ces quantités tendent vers 0, que ce soit quand x tend vers 0 ou vers un certain x_0 clair ou quand x ou n tend vers $+\infty$.

Accès en ligne

Les ouvrages papier et en ligne sont divisés en trois parties, Algèbre (fiches 1 à 19), Analyse (fiches 20 à 36) et Probabilités (fiches 37 à 45). L’ouvrage en ligne se compose de trois fichiers PDF, le premier comportant les compléments sur chaque fiche d’algèbre, le deuxième ceux sur chaque fiche d’analyse et le troisième ceux sur chaque fiche de probabilités. Ces fiches en ligne sont numérotées exactement comme dans la table des matières précédente.

Il y a 10 fiches complètes entièrement nouvelles en ligne : elles sont clairement indiquées dans le sommaire. Elles comportent la feuille de route, les sujets et les corrigés des exercices, exactement comme pour les fiches du volume papier, mais avec de la couleur.

Pour les 35 fiches faisant parties du volume papier, les compléments en ligne sont essentiellement le rappel des sujets des exercices marqués [Corrigé en ligne] dans l’ouvrage papier, et ensuite leurs corrigés. Il y a aussi quelques exemples et dessins, en analyse.

Par exemple, pour avoir les compléments de la fiche 11 d’algèbre sur les formes linéaires, on télécharge le PDF « algèbre », et on regarde dans sa table des matières à quelle page (dans ce PDF) commence la fiche 11 en ligne. Pour avoir accès à la fiche 20 entièrement en ligne « Topologie et gros théorèmes sur $\mathbb{R}$ », on télécharge le PDF « analyse », et on regarde dans sa table des matières quel est le numéro de page (dans ce PDF) où commence la fiche 20 en ligne.

Voici comment accéder aux trois fichiers en ligne

ALGEBRE : par l’URL lienmini.fr/67067-algebre ou par le QRCode



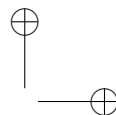
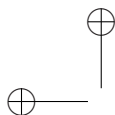
ANALYSE : par l’URL lienmini.fr/67067-analyse ou par le QRCode



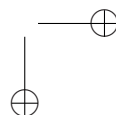
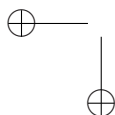
PROBABILITÉS : par l’URL lienmini.fr/67067-probabilites ou par le QRCode

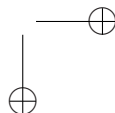
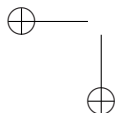
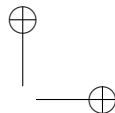
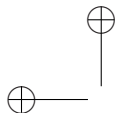


Attention, compte-tenu de cette simplicité d’accès aux trois PDF en ligne, les codes d’accès apparaissent une seule fois dans l’ouvrage papier, ici sur cette page.



Algèbre





Chapitre **3**

Espaces vectoriels

■ Domaines concernés

- Montrer que E est un espace vectoriel ou un sous-espace vectoriel (SEV).
- Espace vectoriel $K_n[X]$ des polynômes de degré $\leq n$ sur le corps K .
- Tableaux rectangulaires de nombres : matrices.
- Famille de vecteurs : notion de famille génératrice, de famille libre, de base.
- Rang d’une famille de vecteurs.
- Dimension d’un espace vectoriel.
- Montrer qu’une famille est une base.
- Compléter une famille libre en une base.
- Trouver de façon élémentaire des bases de $K_n[X]$ permettant d’obtenir des résultats puissants en algèbre et en analyse.
- Opérations sur les SEV.
- Somme directe de SEV.
- Projection sur un SEV parallèlement à un autre.

■ Résultats fondamentaux utilisables

- La caractérisation d’un sous-espace vectoriel : $\alpha x + \beta y \in F$ pour tous scalaires α, β et tous $x, y \in F$.
- Pour montrer qu’une famille est libre, on part de $\sum_{i=1}^k \alpha_i u_i = 0$ et on montre que tous les α_i sont nuls.
- Si une famille de vecteurs est liée, alors au moins l’un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

- Le rang d’une famille de vecteurs est le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants dans cette famille. Son calcul rapide et systématique est exposé dans la fiche suivante.
- Une famille est une base si et seulement si elle est libre et génératrice.
- Toutes les bases ont le même nombre de vecteurs, entier qui est la dimension de l’espace.
- En dimension n , toute famille de au moins $n + 1$ vecteurs est liée, et toute famille génératrice admet au moins n vecteurs.
- En dimension connue n , une famille de n vecteurs est une base ssi elle est libre ou elle est génératrice.
- $E = F \oplus G$ si et seulement si $F \cap G = \{0\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$.
- La somme $F = F_1 + F_2 + \cdots + F_k$ est l’ensemble des vecteurs de la forme $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ où $x_i \in F_i$ pour tout i . Cette somme est directe si et seulement si l’une des deux conditions suivantes est vérifiée (ce qui implique que l’autre l’est aussi) :
 - (i) La relation $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 0$ implique que tous les x_i sont nuls.
 - (ii) La réunion d’une base de F_1 , d’une base de F_2 ... et d’une base de F_k est une famille libre.
- Si la famille $\{u_1, \dots, u_m\}$ est libre dans E de dimension $n > m$, on peut la compléter en une base de E avec des vecteurs $u_{m+1}, \dots, u_n$ bien choisis.
- Une famille de polynômes dont les degrés sont distincts est libre dans $K[X]$.
- Si $E = F \oplus G$, tout $x \in E$ s’écrit de façon unique $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. Le vecteur y est la projection orthogonale de x sur F parallèlement à G et z est la projection de x sur G parallèlement à F .

■ Ce que l’on vous demandera de montrer

- Une partie F de E est un SEV de E .
- Trouver le rang d’une famille de vecteurs : cela se fait mieux avec la technique exposée en fiche suivante.
- Une famille est libre ou est génératrice ou est une base.
- Trouver les composantes d’un vecteur sur une certaine base.
- Trouver la dimension d’un espace vectoriel ou d’un SEV.
- Montrer que $E = F \oplus G$ ou $F = F_1 \oplus F_2 \cdots \oplus F_k$.

■ Les questions à se poser

- Pour montrer que E est un espace vectoriel, dois-je montrer les 8 propriétés de la définition ? Est-il réaliste qu’un exercice me demande de le faire ? A-t-on la possibilité de faire plus simple ?
- Quels sont les ensembles fondamentaux connus pour être des espaces vectoriels, et dont on connaît alors a priori la dimension ?
- Alors, en pratique, quelle est la bonne façon de montrer que E est un espace vectoriel ?
- Quelle est l’horreur à ne pas dire avec deux SEV F et G d’un espace vectoriel E ?
- Comment montrer qu’une famille est libre ? Comment calculer le rang d’une famille ? Comment montrer qu’une famille est génératrice ?
- Est-il plus facile de montrer qu’elle est libre ou génératrice ?
- Comment l’information sur la dimension a priori connue de E va-t-elle me permettre de montrer « rapidement » qu’une famille donnée est une base ?
- Avec les polynômes, n’ai-je pas un résultat puissant faisant intervenir les degrés ?
- Que signifie simplement que deux SEV sont en somme directe ?
- Est-ce que cette condition simple avec deux SEV se généralise simplement avec $k \geq 3$ SEV ?
- Il y a plusieurs CNS dans le cours pour montrer que $F_1, \dots, F_k$ sont en somme directe, laquelle est la plus adaptée à mon problème ?
- Je sais que $F_1, \dots, F_k$ sont en somme directe dans E : qu’est-ce-que je peux en déduire ?
- Je sais que $E = F_1 \oplus F_2 \cdots \oplus F_k$: que puis-je en déduire ? Comment fabriquer une base de E ?

Exercices

Quelques exercices se placent dans un espace vectoriel de dimension infinie, mais on travaille uniquement sur des SEV engendrés par des familles finies de polynômes ou de fonctions, et on sera tout de suite en dimension finie.

Exercice 1

Dans chacune des questions, on se donne une partie E de K^4 définie par une condition liant les composantes x, y, z, t du vecteur générique $X \in E$, et on demande si E est un espace vectoriel ou non.

$$\begin{array}{ll} 1 : x + 2y - 3z + 7t = 0 & 2 : x + 2y - 3z + 7t = 1 \\ 3 : (x - y)(z - t) = 0 & 4 : (x - y)^2 + 3(z - 2t)^2 = 0 \end{array}$$

Exercice 2

Dans chaque question, on se donne une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de K^n , et on demande si cette famille est libre ou non, quel est son rang et quelle est la dimension du SEV de K^n qu'elle engendre. La valeur de n se déduit des données de $\mathcal{F}$. On se ramènera soit à un système d'équations linéaires, à discuter par le pivot de Gauß, soit en bricolant par *système* D , soit à des considérations générales avec peu de calcul.

1. $\mathcal{F} : u = (1, 1, 1), v = (2, 1, -1), w = (-1, 1, 5)$.
2. $\mathcal{F} : u = (1, 1, 1), v = (2, 1, -1), w = (-1, 1, 7)$.
3. $\mathcal{F} : u = (1, 1), v = (2, 1), w = (-1, 7)$.
4. $\mathcal{F} : u = (3, 0, 0, 0), v = (-5, 1, 0, 0), w = (7, 8, 0, 0), x = (-1, 2, 9, 0)$.

Exercice 3

On se place dans $K_n[X]$ avec $n \geq 2$, et B est un polynôme de degré $1 \leq b \leq n - 1$. Dire si les sous-ensembles $E_1, \dots, E_{10}$ de $K_n[X]$ formés des polynômes P vérifiant la condition indiquée sont des SEV de $K_n[X]$ ou non.

$E_1 : P(1) = 0$	$E_2 : P(1) = 0 \text{ et } P(2) = 0$
$E_3 : P(1) = 0 \text{ ou } P(2) = 0$	$E_4 : P^2(-1) = 4$
$E_5 : P \text{ divisible par } B$	$E_6 : P \text{ non divisible par } B$
$E_7 : P(3) = 1 \text{ et } P'(3) = 0$	$E_8 : P(2) = P'(2) = 0$
$E_9 : P(1) + P(2) = 0$	$E_{10} : P(1) + P'(3) = 0$

Exercice 4

On est a priori dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Soit E l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto a + b \cos^2 x + c \sin^2 x + d \cos 2x + e \sin 2x$, où a, b, c, d, e décrivent $\mathbb{R}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et en donner *sans aucun calcul* la dimension maximale.
2. Montrer que la famille $\mathcal{F} = \{1, \cos^2 x, \sin^2 x, \cos 2x, \sin 2x\}$ est en fait au maximum de rang 3, toujours sans grand calcul.
3. Montrer que E est effectivement de dimension 3.

Exercice 5

On se place dans $E = K_8[X]$, et soit B un polynôme de degré 5.

1. Montrer que l'ensemble G des éléments de E divisibles par B est un SEV de E .
2. Montrer que $E = F \oplus G$ où $F = K_4[X]$.
3. En déduire une base de E issue de cette somme directe.

Exercice 6 [🔗 Corrigé en ligne]

Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, on appelle F l'ensemble des polynômes divisibles par $X^2 + 1$ et G celui des polynômes divisibles par $X^2 + X + 7$.

1. Montrer que F et G sont des SEV de E et donner leurs dimensions.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.
3. En déduire une base de E issue de cette somme directe.

Exercice 7

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_8\}$ une base d'un espace vectoriel E sur K . Fabriquer de façon simple une décomposition de E en somme directe telle que (il n'y a pas unicité en général, ce n'est pas la question) :

1. Il y ait 8 SEV composant cette somme directe.
2. Il y ait 4 SEV dans cette somme directe.
3. Il y ait 3 SEV dans cette somme directe.
4. Il y ait 2 SEV de dimensions différentes dans cette somme directe.

Exercice 8

Les deux questions sont indépendantes.

1. Dans $\mathbb{R}_8[X]$, on se donne les SEV F_1, F_2, F_3 de bases respectives
 $F_1 : \{5, X(X-2)(X+3), X^7\}$, $F_2 : \{3X, X^5 + X^2 + 3, X^8 - X^4\}$
 $F_3 : \{X^2 - 6X + 2, 5X^4 - X^3 + 6, -X^6 + X^5 + 3\}$
 Montrer **sans aucun calcul** que $\mathbb{R}_8[X] = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.
2. Vrai ou Faux ? Dans un espace vectoriel E , si les SEV $F_1, F_2, \dots, F_k$ sont en somme directe, alors la réunion des bases des F_i forme une base de E .

Exercice 9 [🔗 Corrigé en ligne]

On se place dans l'espace vectoriel E des fonctions réelles de la variable réelle, qui est de dimension infinie, chose que l'on va montrer en question 1, puis on en regardera quelques SEV élémentaires. Toutes les fonctions sont à valeurs réelles.

1. Sachant que E contient $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout n , justifier que E ne peut pas être de dimension finie.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, est un SEV de E .
3. a) Idem pour l'ensemble $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ des fonctions dérivables et à dérivée continue.
 b) Idem pour l'ensemble $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ des fonctions n fois dérivables et à dérivée n ème continue.
- c) Identifier $F = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$. Est-ce un SEV de E ?
4. Comment mieux rédiger la question « l'ensemble des fonctions f vérifiant $f'' + 9f = 0$ est un espace vectoriel » ? Vérifier que c'est bien vrai.

Exercice 10 [🔗 Corrigé en ligne]

Dans cet exercice, on se place dans l'espace vectoriel E des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ à valeurs complexes, qui est de dimension infinie sur $\mathbb{C}$, chose qui n'intervient pas ici. On se donne un complexe a différent de 0 et de 1 et soit la partie G de E formée des suites (u_n) géométriques de raison a , à savoir vérifiant $u_n = au_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer que G est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
2. Donner l'expression du terme général d'une suite (u_n) appartenant à G .
3. En déduire une base de G et sa dimension.
4. On suppose dans cette question que $|a| < 1$ et on considère une suite (v_n) vérifiant $v_n = av_{n-1} + b$ où $b \neq 0$ est donné.
5. a) Former l'équation très simple vérifiée par la limite éventuelle ℓ de la suite.
 b) En introduisant la suite (u_n) définie par $u_n = v_n - \ell$, donner l'expression générale de v_n et montrer qu'elle converge bien vers le nombre ℓ supposé.
 c) L'ensemble H formé des suites arithmético-géométriques vérifiant pour ce a et ce b donnés la relation $v_n = av_{n-1} + b$ pour $n \geq 1$, est-il un espace vectoriel ?

Corrigés

Exercice 1

- Oui. Si $X(x, y, z, t)$ et $X'(x', y', z', t')$ sont dans E , alors les composantes $(ax + a'x', ay + a'y', az + a'z', at + a't')$ de $aX + a'X'$ vérifient bien la relation d'appartenance à E . On peut aussi dire que la relation liant x, y, z, t pour être dans E est « linéaire » avec 0 au second membre.
- Non : $X(1, 0, 0, 0)$ est dans E , mais $2X$ ne l'est pas. La relation liant x, y, z, t pour être dans E est « linéaire au premier membre », mais « avec 1 au second membre », ce n'est plus linéaire.
- Non : la relation équivaut à $x = y$ (on est dans un plan F) OU $z = t$ (on est dans un autre plan G). La réunion de deux SEV est encore un espace vectoriel uniquement lorsque l'un des deux est inclus dans l'autre. Ce n'est pas le cas ici. De façon plus concrète, $X = (1, 1, 3, 4)$ et $Y = (2, 5, 0, 0)$ sont dans E , mais $X + Y = (3, 6, 3, 4)$ ne l'est pas, ce qui empêche E d'être un espace vectoriel.
- Oui. Il s'agit de l'intersection des hyperplans $x = y$ et $z = 2t$, ce qui est bien un SEV de E .

Exercice 2

- On est dans K^3 avec une famille de 3 vecteurs. Elle est libre (et est donc une base de K^3) si et seulement si la relation $au + bv + cw = 0$ implique $a = b = c = 0$.
- On regarde le système linéaire
$$\begin{cases} a + 2b - c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ a - b + 5c = 0 \end{cases}$$
. En soustrayant la 1ère équation aux deux autres, on arrive à
$$\begin{cases} a + 2b - c = 0 \\ -b + 2c = 0 \\ -3b + 6c = 0 \end{cases}$$
 où la 3ème équation ne sert à rien, puisque c'est la même que la 2ème. Le système équivaut donc à
$$\begin{cases} a + 2b - c = 0 \\ -b + 2c = 0 \end{cases}$$
. On peut prendre $c = 1, b = 2, a = -3$, ce qui donne la relation $-3u + 2v + w = 0$: la famille est liée, et de rang < 3 . Il est clair que $\{u, v\}$ est une famille libre, et $\mathcal{F}$ est donc de rang 2, et engendre un plan dans K^3 .
- On applique le même principe, mais on arrive à un système de 3 équations qui donne $c = 0$, puis $b = 0, a = 0$. La famille $\mathcal{F}$ libre, et forme une base de K^3 .
- On est dans K^2 avec une famille de 3 vecteurs : elle est obligatoirement liée, puisque l'on a plus de vecteurs que la dimension de l'espace vectoriel. Les vecteurs u et v sont indépendants, et $\mathcal{F}$ est de rang 2 et donc une base de K^2 .
- L'étude de la relation $au + bv + cw + dx = 0$ (pour étudier si la famille est libre ou non) se traduit par le système évident (aucun calcul, juste une recopie des données)

$\{3a - 5b + 7c - d = 0, b + 8c + 2d = 0, 9d = 0\}$ qui admet de façon évidente, après $d = 0$, des solutions non identiquement nulles en a, b, c . La famille $\mathcal{F}$ est donc liée, et est au maximum de rang 3. La répartition des 0 en bas des vecteurs u, v, x montre qu'ils forment une famille libre. Il en résulte que w est une combinaison linéaire de u, v, x . *C'est même mieux, puisque u, v, w vivent dans le même plan $z = t = 0$: on vérifie que $w = 47/3u + 8v$.* On a finalement un SEV de dimension 3 de K^4 . On pouvait aussi remarquer dès le début que les 4 vecteurs vivent dans l'hyperplan $t = 0$ de dimension 3, et que le rang de $\mathcal{F}$ est obligatoirement ≤ 3 .

Exercice 3

Pour chaque E_i , l'idée est de montrer que pour tous $P, Q \in E_i$ et tous scalaires λ, μ , alors $\lambda P + \mu Q$ est encore dans E_i (CNS la plus générale pour être un SEV).

1. On a $(\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1)$ par définition de la structure d'espace vectoriel des polynômes, et donc $(\lambda P + \mu Q)(1) = 0$ dès que $P(1) = Q(1) = 0$. E_1 est bien un SEV de $K_n[X]$, et donc un espace vectoriel.
2. E_2 est l'intersection du SEV des polynômes vérifiant $P(1) = 0$ et de celui des polynômes vérifiant $P(2) = 0$: on sait que l'intersection de deux SEV est encore un SEV, et E_2 est bien un espace vectoriel.
3. E_3 est la réunion du SEV des polynômes vérifiant $P(1) = 0$ et de celui des polynômes vérifiant $P(2) = 0$: on n'a aucun résultat sur la réunion de deux SEV, sauf dans les cas particuliers d'inclusion. $P = X - 1$ et $Q = X - 2$ sont bien dans E_3 , mais $P + Q = 2X - 3 \notin E_3$: E_3 n'est pas un espace vectoriel.
4. Si P vérifie $P^2(-1) = 4$, alors $Q = 3P$ ne vérifie pas cette condition, puisque $Q^2(-1) = 36$. E_4 n'est pas un espace vectoriel, sinon $3P$ serait dans E_4 .
5. P est dans E_5 si et seulement si $P = B \times P_1$, où P_1 est un polynôme de degré $\leq n - b$. Pour $P, Q \in E_5$, on peut écrire $\lambda P + \mu Q = B \times (\lambda P_1 + \mu Q_1)$, et $\lambda P + \mu Q$ est bien divisible par B , et reste dans $K_n[X]$: E_5 est bien un SEV de $K_n[X]$.
6. Un espace vectoriel contient l'élément neutre 0, qui est ici le polynôme nul, à savoir un polynôme divisible par tout polynôme, en particulier par B : E_6 ne contient pas le polynôme nul, et n'est donc pas un espace vectoriel.
7. E_7 ne contient pas le polynôme nul, et n'est donc pas un espace vectoriel.
8. On a $(\lambda P + \mu Q)(2) = \lambda P(2) + \mu Q(2)$ et $(\lambda P + \mu Q)'(2) = \lambda P'(2) + \mu Q'(2)$. Si P, P', Q, Q' sont nuls en $x = 2$, il en va de même de $\lambda P + \mu Q$, et E_8 est un espace vectoriel. On peut aussi dire que P et Q sont divisibles par $(X - 2)^2$, et qu'il en va de même pour tout $\lambda P + \mu Q$.
9. On a $(\lambda P + \mu Q)(1) + (\lambda P + \mu Q)(2) = \lambda[P(1) + P(2)] + \mu[Q(1) + Q(2)] = 0$ lorsque $P, Q \in E_9$: on a un espace vectoriel.
10. On a bien un SEV de $K_n[X]$ puisque $(\lambda P + \mu Q)(1) + (\lambda P + \mu Q)'(3) = \lambda[P(1) + P'(3)] + \mu[Q(1) + Q'(3)] = 0$ pour tous $P, Q \in E_{10}$ et tous scalaires λ, μ .

Exercice 4

1. L'idée est de montrer que E est un SEV de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, chose qui est claire puisqu'il s'agit de l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$. La famille $\mathcal{F}$ est donc un générateur à 5 éléments de E : la dimension de E est obligatoirement ≤ 5 , suivant que la famille $\mathcal{F}$ est libre (dimension égale à 5) ou liée (dimension ≤ 4).
2. La trigonométrie élémentaire nous dit que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, ce qui montre que les trois fonctions $\{1, \cos^2 x, \sin^2 x\}$ sont liées. Pour définir E , on peut sans souci éliminer (par exemple) la fonction $\sin^2 x$ qui est combinaison linéaire des deux autres. La dimension de E est donc déjà au maximum égale à 4, et $\{1, \cos^2 x, \cos 2x, \sin 2x\}$ est un générateur de E .
Mais on a aussi $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$, ce qui montre que les trois fonctions $1, \cos^2 x, \cos 2x$ sont liées, et on peut éliminer (par exemple) $\cos^2 x$ et dire que E est engendré par $\{1, \cos 2x, \sin 2x\}$, et est donc de dimension ≤ 3 .
3. Ça se complique un peu. Pour regarder si $\mathcal{B} = \{1, \cos 2x, \sin 2x\}$ forme une famille libre ou non, on part de la relation $a + b \cos 2x + c \sin 2x = 0$, (fonction nulle, à savoir égalité à 0 pour tout x), et on étudie si les constantes réelles a, b, c sont nulles ou non. Le plus simple est de donner à x quelques valeurs astucieuses :
 - • Pour $x = 0$, il vient $a + b = 0$. Pour $x = \pi/2$, il vient $a - b = 0$, et on en déduit $a = b = 0$.
 - • Il reste $c \sin 2x = 0$ pour tout x , à savoir évidemment $c = 0$.
4. La famille $\mathcal{B}$ est donc libre, et elle engendre E : c'est une base de E , lequel est de dimension 3.

Exercice 5

1. Un polynôme $P \in E$ est divisible par B quand il s'écrit $P(X) = B(X)Q(X)$ où Q est un polynôme tel que $\deg(B) + \deg(Q) \leq 8$, à savoir de degré ≤ 3 . Pour tous $P_1 = Q_1 B, P_2 = Q_2 B$ dans G et tous scalaires α, β , on a $\alpha P_1 + \beta P_2 = B \times (\alpha Q_1 + \beta Q_2)$ où le degré de $\alpha Q_1 + \beta Q_2$ reste bien ≤ 3 . On a donc $\alpha P_1 + \beta P_2 \in G$, et G est un SEV de E .
2. a) Première démonstration : la division euclidienne par B permet d'écrire de façon unique tout polynôme A sous la forme $A = BQ + R$ où $\deg(R) \leq 4$, puisque le diviseur B est de degré 5. Pour $A \in E$, on a $BQ \in G$ et $R \in F$. L'existence et l'unicité de la décomposition est la définition de la somme directe $E = F \oplus G$.
b) Seconde démonstration : une base de F est $\{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ et F est de dimension 5. Un élément de G s'écrit $B(X)(a + bX + cX^2 + dX^3)$ et $\{B, XB, X^2B, X^3B\}$ en est donc une base : G est de dimension 4. On a donc $\dim F + \dim G = 9 = \dim E$. Par ailleurs, on a clairement $F \cap G = \{0\}$: en effet, un polynôme non nul appartenant à F est de degré ≤ 4 et s'il est divisible par B , il est au moins de degré 5. C'est impossible. Les deux conditions $F \cap G = \{0\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$ caractérisent la somme directe.

3. On a une base de $E = F \oplus G$ en prenant la réunion d’une base de F et d’une base de G , à savoir $\{1, X, X^2, X^3, X^4, B, XB, X^2B, X^3B\}$.

Exercice 7

1. En appelant D_i la droite engendrée par e_i , on a $E = D_1 \oplus D_2 \oplus \cdots \oplus D_8$.
2. En appelant P_1 le plan de base $\{e_1, e_2\}$ et ainsi de suite jusqu’à P_4 le plan de base $\{e_7, e_8\}$, on a $E = P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4$.
3. Par exemple E_1 de base $\{e_1, e_2, e_3\}$, E_2 de base $\{e_4, e_5, e_6\}$ et E_3 de base $\{e_7, e_8\}$.
4. Par exemple F_1 de base $\{e_1, \dots, e_5\}$ et F_2 de base $\{e_6, e_7, e_8\}$.

À chaque fois, le principe fondamental est le suivant : la réunion des bases des SEV formant la somme directe doit être une base de E .

Exercice 8

1. Les 9 polynômes donnés sont tous de degré distincts, et forment donc une famille libre (et donc une base) de $\mathbb{R}_8[X]$, lequel est de dimension 9. Ceci prouve (a) que l’énoncé a un sens, à chaque fois on a bien une base de F_i (b) que F_1, F_2, F_3 sont en somme directe puisque la réunion de leurs bases est une famille libre (c) que $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = \mathbb{R}_8[X]$ puisque la réunion de leurs trois bases est une base de $\mathbb{R}_8[X]$. L’affirmation (b) est vraie, mais en fait peu utile pour conclure.
2. C’est faux ! La somme directe signifie que la réunion des bases des $F_1, F_2, \dots, F_k$ est une famille libre dans E . Mais rien ne dit qu’il « y a assez de vecteurs dans cette réunion » pour former une base de E .

Chapitre 4

Matrices, systèmes linéaires, équations de SEV

L'entier n désigne le nombre de lignes d'une matrice A ou bien le nombre d'équations d'un système linéaire $AX = B$ et p désigne le nombre de colonnes de A ou le nombre d'inconnues du système, et B est un vecteur colonne de dimension n .

■ Domaines concernés

- Opérations simples sur les matrices, calcul de l'inverse par résolution d'un système linéaire. Matrice carrée, triangulaire, diagonale.
- Anneau des matrices carrées de dimension n .
- Rang d'une matrice, échelonnement : dans une matrice échelonnée, le nombre de 0 en tête de ligne augmente strictement quand on descend dans la matrice.
- Matrices équivalentes, semblables, matrice symétrique, transposée tA de A , matrice nilpotente, matrice orthogonale, matrices congruentes.
- Composantes d'un vecteur sur une base, matrice de changement de base.
- Méthode de Gauss (avec combinaison linéaire de lignes, c'est très visuel) pour ramener un système linéaire $AX = B$ à un système échelonné, résolution, nombre de solutions, inconnues paramètres.
- Rang d'une famille de vecteurs, en extraire une famille libre maximale.
- Rang d'un système linéaire.
- Equations *indépendantes* d'un sous-espace vectoriel. Sous-espace vectoriel défini par un système linéaire $AX = 0$. Relation entre la dimension d'un SEV et le nombre d'équations *indépendantes* le définissant.

- Interprétation géométrique des solutions du système $AX = B$ où B est un vecteur non nul : on est alors en géométrie dite affine, celle « où une droite ou un plan ou autre ne passe pas toujours par l’origine ».

■ Résultats fondamentaux utilisables

- Le produit de matrices n’est en général pas commutatif : si AB et BA existent, il n’y a aucune raison que $AB = BA$. Le produit AB de deux matrices non nulles peut très bien être la matrice nulle. On a ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- B est l’inverse de la matrice carrée A lorsque $AB = BA = I_d$. Il suffit de vérifier l’une des deux conditions $AB = I_d$ ou $BA = I_d$, inutile de vérifier les deux.
- Le rang de A , à savoir le nombre maximal de colonnes indépendantes de A , est aussi égal au nombre maximal de lignes indépendantes de A , à savoir $\text{rang}(A) = \text{rang}({}^tA)$. Le rang est évidemment inférieur ou égal à n et à p .
- Echelonner une matrice A , ce qui se fait par la méthode du pivot de Gauss, permet d’obtenir une matrice où le nombre de 0 en tête de ligne augmente strictement quand on descend, et ayant le même rang que A . Ce rang se lit instantanément : il est égal au nombre de lignes non identiquement nulles de la forme échelonnée.
- On calcule l’inverse A^{-1} d’une matrice carrée A (on a $n = p$) en résolvant le système $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ où les $x'_1, \dots, x'_n$ sont « formelles » et où les inconnues sont $x_1, \dots, x_n$.
- La relation $V = PV'$ liant les composantes V d’un vecteur sur une ancienne base $\mathcal{B}$ et celles V' sur une nouvelle base $\mathcal{B}'$, avec P matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. **Quand on ne fait pas de bêtise dans la vie, on n’a jamais de « PV ».**
- Pour calculer le rang d’une famille $V_1, \dots, V_p$ en dimension n , il est pratique de partir du système $\alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_p V_p = 0$ (choisir une base et on a n équations et p inconnues) et d’étudier ce qui se passe quand on l’échelonne. Le rang est égal au nombre d’équations restantes autres que « $0 = 0$ ». La famille est libre lorsque le rang est égal à p (le nombre de vecteurs).
- Dans un système linéaire à n équations et p inconnues, la seule chose que l’on peut *a priori* dire avant calculs est : « si $n < p$ (plus d’inconnues que d’équations) le système est soit impossible soit admet une infinité de solutions ».
- Le rang r du système linéaire $AX = B$ est le rang de la matrice A , attention le second membre B n’intervient pas dans cette définition. Les deux entiers *importants* dans le système sont **ce rang r et le nombre p d’inconnues**.
- Le pivot de Gauss ramène le système à une forme $TX = B'$ où T est échelonnée (presque triangulaire...) de rang r . **Le système admet des solutions si et seulement si ce nouveau système ne contient pas d’équations de la forme « $0 = 1$ ».** On le voit donc à l’œil nu.

Chapitre 4 Matrices, systèmes linéaires, équations de SEV

- Si le rang r est strictement inférieur au nombre d'équations n , cela signifie qu'il y a $n - r$ équations qui sont soit inutiles (combinaison linéaires des r autres) soit qui rendent le système impossible.
- Un système admettant des solution possède une solution unique si et seulement si $r = p$ (la matrice T est carrée et inversible).
- Un système admettant des solutions possède une infinité de solutions ssi $p > r$ (plus d'inconnues que le rang, T est plus large que haute). En faisant passer $p - r$ inconnues bien choisies au second membre (inconnues paramètres), on peut résoudre le système en exprimant les r inconnues restantes en fonction des inconnues paramètres.
- L'ensemble des solutions du système $AX = 0$ de rang r est un sous-espace vectoriel de K^p de dimension r . Réciproquement, tout SEV de K^p de dimension r est l'ensemble des solutions d'un système $AX = 0$ de rang r . C'est donc l'intersection de r hyperplans de K^p , un hyperplan de K^p étant un SEV de dimension $p - 1$, défini par une unique équation de la forme $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p = 0$.
- La relation liant la dimension de l'espace E , celle d'un SEV F et le nombre d'équations **indépendantes** caractérisant F est

$$\dim E = \dim F + \text{nombre d'équations indépendantes de } F$$
- C'est logique : le nombre de degrés de liberté de F (sa dimension) est égal au nombre total de degrés de liberté (la dimension de E) diminué du nombre de contraintes pour être dans F (le nombre d'équations indépendantes décrivant F). Attention aux mots **équations indépendantes** : une droite de $\mathbb{R}^2$ admet une unique « équation indépendante », mais on peut aussi la représenter par le système linéaire formé de trois fois de suite cette équation !
- En dimension n , pour trouver un système d'équations cartésiennes du SEV engendré par une famille $\{V_1, \dots, V_p\}$ libre ou non, on cherche les CNS liant $x_1, \dots, x_n$ pour que le système $\alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_p V_p = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ admette des solutions $\alpha_1, \dots, \alpha_p$: on échelonne ce système par Gauß. Ces CNS sont de la forme « $0 =$ expression en $x_1, \dots, x_n$ » et elles forment les équations cartésiennes (indépendantes) du SEV.

■ Ce que l'on vous demandera de montrer

- Calculer des sommes, produits, transposées de matrices, on doit connaître les définitions de ces opérations.
- Calculer l'inverse d'une matrice carrée : il faut se ramener à un système linéaire et appliquer le pivot de Gauss pour le résoudre.
- Calculer le rang d'une matrice, ce qui se fait par échelonnement.

- Calculer le rang d’une famille de vecteurs : on se ramène à celui de la matrice obtenue en stockant ces vecteurs en ligne ou en colonne dans une matrice, et en échelonnant.
- Résoudre un système linéaire, discuter s’il admet des solutions ou non. Regarder en particulier le cas où les données contiennent des paramètres.
- Identifier la nature du SEV ensemble des solutions du système $AX = 0$, donner sa dimension.
- Étant donné un SEV F de E , trouver un système d’équations indépendantes de F ou en trouver une base.
- Questions analogues sur le système $AX = B$, avec $B \neq 0$, en « géométrie affine » où les droites/plans ... ne passent pas par l’origine comme dans les espaces vectoriels, mais où le concept géométrique traditionnel parle « de la même façon ».

■ Les questions à se poser

- Les dimensions des matrices A et B permettent-elles de calculer le produit AB ou le produit BA ou les deux ou aucun ?
- Je ne sais *a priori* pas si la matrice carrée A est inversible. Comment vais-je m’en apercevoir dans la tentative de résolution du système $AX = X'$?
- La matrice est-elle symétrique, triangulaire, diagonale, orthogonale ($A^t A = I_d$) ?
- Dois-je, pour trouver le rang d’une famille de vecteurs, les stocker en lignes ou en colonnes dans une matrice ? **Réponse** : sachant que le pivot de Gauss le plus visuel se fait en combinant les **lignes**, le mieux est de stocker les vecteurs en **lignes** car les lignes non indistinctement nulles de la matrice échelonnée nous donnent visuellement les numéros d’une sous-famille libre maximale de la famille initiale de vecteurs. Mais si on veut simplement le rang (et pas une base du SEV engendré), peu importe qu’on stocke les vecteurs en ligne ou en colonne.
- Quand j’ai fait le pivot de Gauss et constaté que le système va admettre une infinité de solutions, comment choisir les inconnues « paramètres » à faire passer « au second membre » ?
- Quand le système a été échelonné par Gauss, comment puis-je le résoudre ?
- Quand j’ai résolu avec des inconnues paramètres le système $AX = 0$ définissant un SEV F de E comment ai-je sans nouveau calcul une base de F ?
- Essayer de bien comprendre (par exemple en dimension concrète 3 avec des plans) ce que signifie « solution unique », « infinité de solutions », « aucune solution », et être capable de généraliser en dimension supérieure, à la fois dans les espaces vectoriels « où tout passe par l’origine » et en géométrie affine.

Exercices

Exercice 1

1. Echelonner les matrices suivantes et donner leur rang. On rappelle que l'on peut toujours permuter deux lignes, pour calculer le rang.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Interpréter les résultats en terme de « rang de famille de vecteurs » (deux familles de vecteurs par matrice, celle des lignes et celle des colonnes.)

Exercice 2

On se place dans K^4 avec les familles de vecteurs :

$$\mathcal{F}_1 : (1, -1, 2, 3), (2, 1, 3, 1), (1, 2, -1, 1) ; \mathcal{F}_2 : (1, -1, 2, 3), (2, 1, 3, 1), (1, -4, 3, 8)$$

1. Pour chaque famille, étudier si elle est libre ou liée et donner son rang.
2. Si elle est liée, trouver une relation linéaire liant les vecteurs de la famille.

Exercice 3

Pour chaque réel θ on pose $A(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit $A(\theta)A(\theta')$.
2. a) Sans nouveau calcul, montrer que les matrices $A(\theta)$ et $A(\theta')$ commutent.
b) Sans nouveau calcul, montrer que $A(\theta)$ est inversible et donner son inverse.
3. a) Identifier θ' tel que ${}^tA(\theta) = A(\theta')$.
b) À quelle condition sur θ la matrice $A(\theta)$ est-elle symétrique ? Donner les matrices correspondantes.
4. Que vaut le produit $A(\theta) {}^tA(\theta)$? Quel est l'adjectif qualifiant la matrice $A(\theta)$?
L'interprétation géométrique est donnée dans le corrigé.

Exercice 4

- Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente, i.e. qu'il existe k entier tel que $A^k = 0$. On calculera $A^2, A^3, A^4 \dots$.
- Que vaut formellement $(I_3 - A)(I_3 + A + A^2 + A^3)$? En déduire l'inverse de $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

- Trouver un vecteur directeur de la droite de $\mathbb{R}^3$ d'équations cartésiennes $\{x + 2y + z = 0, 2x - 5y + 3z = 0\}$.
- Trouver une base du SEV de $\mathbb{R}^4 : \{x + 2y + z - t = 0, 2x - 5y + 3z + 2t = 0\}$. Quelle est sa dimension ? Était-ce prévisible avant calcul ?

Exercice 6 [🔗 Corrigé des 2 derniers systèmes en ligne]

Discuter et résoudre les systèmes suivants. On donnera à chaque fois le rang du système et une justification, en fonction du rang, du résultat obtenu (unicité, impossibilité, infinité de solutions) :

$$\begin{cases} x & +2y & -3z & = & 4 \\ 2x & +y & +z & = & 9 \\ -3x & +2y & -z & = & -6 \end{cases} \quad \begin{cases} x & +2y & -3z & = & 4 \\ 2x & +y & +z & = & 9 \\ x & -4y & +11z & = & 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & +2y & -3z & = & 4 \\ 2x & +y & +z & = & 9 \\ x & -4y & +11z & = & 14 \end{cases} \quad \begin{cases} x & +2y & -3z & = & 4 \\ 2x & +y & +z & = & 9 \\ x & -4y & +11z & = & 6 \\ 10x & +11y & -9z & = & 43 \end{cases}$$

Exercice 7 [🔗 Corrigé en ligne]

Soit le système $S_1 : \begin{cases} x & +y & +2z & -t & = & 8 \\ 2x & +y & +3z & +t & = & 10 \\ -3x & +4y & -z & -2t & = & 0 \end{cases}$.

- Justifier qu'il ne peut pas admettre une solution unique.
- Appliquer la méthode du pivot et donner les solutions. Quel est le rang du système ?

Chapitre 4 Matrices, systèmes linéaires, équations de SEV

3. a) Suite à l'échelonnement, donner une sous-matrice carrée inversible de rang maximal extraite de la matrice 3×4 formée des coefficients du premier membre.
- b) Que se passe-t-il si l'on change les valeurs $(8, 10, 0)$ du second membre ?

Exercice 8 [✎ Corrigé en ligne]

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan P de base $u(1, -1, 3)$ et $v(2, 1, 2)$. On cherche une équation cartésienne de ce plan.

1. Former le système linéaire à 3 équations aux 2 inconnues α, β exprimant que le vecteur $X(x, y, z)$ appartient à P .
2. a) En échelonnant ce système, trouver la CNS liant x, y, z pour qu'il admette une solution α, β et conclure.
- b) Le calcul explicite de α, β est-il utile, au vu du but cherché ? Pourquoi a-t-on unicité de α, β ?
3. On se place maintenant dans l'espace affine de dimension 3 (on travaille avec des points), et on appelle Q le plan de base u, v et passant par le point $A(-2, 7, 1)$. Sans nouveaux calculs, expliquer comment trouver son équation à partir de celle de P .

Exercice 9 [✎ Corrigé en ligne]

On se place dans $\mathbb{R}^5$ et E est le SEV engendré par $U_1 = (1, -1, 3, 2, 1)$, $U_2 = (2, 1, 2, 0, -3)$, $U_3 = (0, -3, 4, 4, 5)$. On cherche un système d'équations cartésiennes de E , et on en déduira sa dimension, **sans s'occuper de regarder a priori** si les vecteurs sont indépendants ou non.

1. Former le système de 5 équations aux 3 inconnues α, β, γ traduisant que le vecteur $X = (x, y, z, t, u)$ est dans E .
2. Echelonner ce système.
3. En déduire un système d'équations cartésiennes de E et sa dimension.

Exercice 10 [✎ Corrigé en ligne]

E est le SEV de $\mathbb{R}^5$ défini par : le vecteur $V(x, y, z, t, u)$ appartient à E si et seulement

$$\text{si on a } \begin{cases} x & -y & +3z & +2t & +u & = & 0 \\ 2x & +y & +2z & & -3u & = & 0 \\ -x & -3y & +4z & +4t & +7u & = & 0 \end{cases}.$$

1. À ce stade, peut-on donner la dimension de E ?
2. Echelonner le système et exprimer ses solutions en fonction d'un certain nombre d'inconnues paramètres.
3. En déduire une base de E et sa dimension.
4. Reprendre l'exercice en remplaçant la 3ème équation par $x + 5y - 5z - 6t - 9u = 0$.

Corrigés

Exercice 1

1. a) Remplacer L_2 par $L_2 - 2L_1$, L_3 par $L_3 - 3L_1$, L_4 par $L_4 + L_1$ donne A_1 ci dessous. Dans A_1 , remplacer L_3 par $L_3 - 4L_2$ et L_4 par $L_4 + 7L_2$ donne A_2 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & -10 \\ 0 & 7 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 15 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -25 & 14 & -10 \end{pmatrix}$$

On termine en remplaçant dans A_2 la ligne L_4 par $L_4 + 25/15L_3$ et on obtient $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 15 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 22/3 & -40/3 \end{pmatrix}$, qui est bien échelonnée, le nombre de 0 en tête de ligne allant en croissant strictement. La matrice initiale est de rang 4, puisqu'il n'y a aucune ligne nulle dans A_4 .

- b) La première étape conduit à $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -9 & 3 & 9 & -6 \end{pmatrix}$.

La ligne L_2 , qui a déjà deux 0 en tête, ne peut pas servir pour faire apparaître des 0 en deuxième colonne dans L_3 et L_4 .

On permute L_3 et L_2 : $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -9 & 3 & 9 & -6 \end{pmatrix}$.

On fait apparaître un 0 en deuxième colonne de L_4 en remplaçant L_4 par $L_4 -$

$$9/4L_2 : B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3/4 & 9/4 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

On met un 0 en 3ème colonne de L_4 en remplaçant L_4 par $L_4 - 3/4L_3$, et il

$$\text{vient } B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Il y a seulement trois lignes non nulles, et}$$

le rang de B vaut 3.

2. La matrice A s'interprète comme la famille de ses 5 vecteurs colonnes dans K^4 ou aussi comme la famille de ses 4 vecteurs lignes dans K^5 . Dans les deux cas, ces familles sont de rang 4, le rang de la matrice, puisque le rang de A est égal à celui de sa transposée. Même principe pour B , sauf que les deux familles sont uniquement de rang 3 maintenant.

Exercice 2

1. a) On étudie, pour la famille $\mathcal{F}_1$, la relation $\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = 0$ et on regarde si $\alpha = \beta = \gamma = 0$ (famille libre) ou non (famille liée). Cela se traduit par le système

$$\text{à 4 équations et 3 inconnues } \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}.$$

Remplacer E_2 par $E_2 + E_1$ (elle devient $3\beta + 3\gamma = 0$), E_3 par $E_3 - 2E_1$ (elle devient $-\beta - 3\gamma = 0$) et E_4 par $E_4 - 3E_1$ (elle devient $-5\beta - 2\gamma = 0$) nous conduit à un système où les nouvelles équations E_2, E_3, E_4 donnent de façon évident $\beta = \gamma = 0$. On en déduit $\alpha = 0$. La famille $\mathcal{F}_1$ est libre et donc de rang 3, elle engendre un SEV de dimension 3.

- b) On étudie, pour la famille $\mathcal{F}_2$, la relation $\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = 0$ et on regarde si $\alpha = \beta = \gamma = 0$ (famille libre) ou non (famille liée). Cela se traduit par le

$$\text{système à 4 équations et 3 inconnues } \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta - 4\gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 3\gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + 8\gamma = 0 \end{cases}.$$

Remplacer E_2 par $E_2 + E_1$ (elle devient $3\beta - 3\gamma = 0$), E_3 par $E_3 - 2E_1$ (elle devient $-\beta + \gamma = 0$) et E_4 par $E_4 - 3E_1$ (elle devient $-5\beta + 5\gamma = 0$) nous conduit au système élémentaire $\{\alpha + 2\beta + \gamma = 0, \beta = \gamma\}$ (puisque E_2, E_3, E_4 sont identiques), et qui maintenant admet une infinité de solutions avec $\alpha = -3\gamma, \beta = \gamma$.

Le système est de rang 2 (deux équations indépendantes) et la famille $\mathcal{F}_2$ est liée. En prenant $\gamma = 1$, on a $\beta = 1, \alpha = -3$, ce qui signifie que $-3V_1 + V_2 + V_3 = 0$.

Exercice 3

- Les formules d'addition trigonométriques donnent $A(\theta)A(\theta') = A(\theta + \theta')$.
- a) On a ainsi $A(\theta)A(\theta') = A(\theta')A(\theta)$, et les deux matrices commutent toujours.
b) On a clairement $A(0) = I_3$. On a donc $A(\theta)A(\theta') = I_3$ dès que $\theta + \theta' = 0$ modulo 2π , à savoir tout simplement $\theta' = -\theta[2\pi]$. On a $A(\theta)^{-1} = A(-\theta)$.
- a) La transposée de $A(\theta)$ s'obtient en changeant le sinus en son opposé, à savoir en changeant θ en $-\theta$: ${}^tA(\theta) = A(-\theta)$.
b) La matrice est symétrique si et seulement si $\sin \theta = \sin(-\theta) = -\sin \theta$, à savoir $\sin \theta = 0$ et donc $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.
Cela donne $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ pour $\theta = \pi$ ou bien la matrice identité I_3 pour $\theta = 0$.
- Les deux questions précédentes montrent que $A(\theta)^{-1}$ est la transposée de $A(\theta)$: on a la définition d'une matrice dite orthogonale (à savoir représentant une isométrie de $\mathbb{R}^3$ sur une base orthonormée) : dans le cas présent, il s'agit de la rotation d'angle θ dans le plan $\{\vec{j}, \vec{k}\}$, l'axe de rotation étant $\vec{i}$ et orientant l'espace.

Exercice 4

- On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^4 = 0$.
- C'est une identité remarquable qui se retrouve en effectuant les produits : on obtient $I_3 - A^4$, à savoir I_3 . Sachant que $I_3 - A = B$, elle s'écrit $B \times (I_3 + A + A^2 + A^3) = I_3$, à savoir $B^{-1} = I_3 + A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

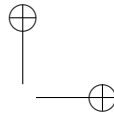
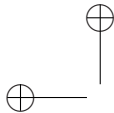
- Remplacer E_2 par $E_2 - 2E_1$ échelonne le système en $\{x + 2y + z = 0, -9y + z = 0\}$, d'où l'on tire $z = 9y$ puis $x = -11y$. Le vecteur générique de D s'écrit $(-11y, y, 9y)$: un vecteur directeur est $(-11, 1, 9)$.
- Remplacer E_2 par $E_2 - 2E_1$ échelonne le système en $\{x + 2y + z - t = 0, -9y + z + 4t = 0\}$, système de rang 2 et on est en dimension 4 : le SEV considéré est de dimension $4 - 2 = 2$. On tire de la seconde équation $z = 9y - 4t$ et le report dans la première équation donne $x = -11y + 5t$. On écrit ceci sous forme vectorielle

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les deux vecteurs de droite forment une base du SEV.

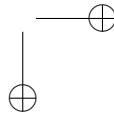
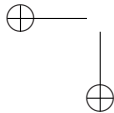
Exercice 6

- On remplace E_2 par $E_2 - 2E_1$ et E_3 par $E_3 + 3E_1$ pour enlever x des deux dernières équations, ce qui donne $\begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ -3y + 7z = 1 \\ 8y - 10z = 6 \end{cases}$. Puis on remplace E_3 par $E_3 + 8/3E_2$ ce qui donne $\begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ -3y + 7z = -4 \\ 26/3z = 26/3 \end{cases}$. La dernière équation donne $z = 1$, le report dans la deuxième donne $y = 2$ et le report dans la première donne $x = 3$.
- On remplace E_2 par $E_2 - 2E_1$ et E_3 par $E_3 - E_1$ pour enlever x des deux dernières équations, ce qui donne $(S_2) : \begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ -3y + 7z = 1 \\ -6y + 14z = 2 \end{cases}$. Avant de se lancer dans



Chapitre 4 Matrices, systèmes linéaires, équations de SEV

une nouvelle étape de pivot, on peut constater à l’œil nu que la dernière équation est la même que la deuxième, à une multiplication par 2 près. Le système est équivalent à celui des deux premières équations de (S_2) . Le système est de rang 2 avec 3 inconnues, et il admet donc une infinité de solutions. La troisième équation du système initial est une combinaison linéaire des deux premières, et ne sert à rien. L’ensemble des solutions dépend d’un paramètre, par exemple z : la seconde équation de S_2 donne $y = 7/3z - 1/3$ et le report dans la première équation donne $x = -5/3z + 14/3$. L’ensemble des solutions est la droite de l’espace affine passant par le point $(14/3, -1/3, 0)$ et de vecteur directeur (par exemple) $(-5, 7, 3)$.



Chapitre **5**

Applications linéaires, matrices

E est un espace vectoriel de dimension p sur K , F un E.V. de dimension n sur K , et f une application de E dans F . Le grand cas particulier est évidemment $E = F$ avec $p = n$. La notation A désignera une matrice à n lignes et p colonnes, destinée à être la matrice de f sur une base donnée de E et une base donnée de F .

■ Domaines concernés

- Caractérisation d’une application linéaire, noyau, image, injectivité, surjectivité, isomorphisme, automorphisme. Application linéaire réciproque (inverse) le cas échéant. Composition d’applications linéaires. Sous-espace vectoriel stable.
- Rang d’une application linéaire, théorème de la dimension.
- Anneau $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E (applications linéaires de E dans lui-même).
- Matrice d’une application linéaire sur des bases données de E et de F . Changement de bases, dont la fondamentale $A' = P^{-1}AP$.
- Formes linéaires, qui auront quand même droit à une fiche spéciale avec la dualité, notion considérée comme compliquée (sans vraiment l’être).
- Le [à peu près] seul cas de dimension infinie concernera l’espace $K[X]$ des polynômes sur K ; mais on peut normalement se ramener à un certain $K_n[X]$ de dimension finie $n + 1$.
- On pourra aussi travailler, en dimension infinie, dans l’espace [par exemple] des fonctions continues sur $[0, 1]$, où il faudra évidemment travailler directement sur l’expression de f , une base de l’espace étant totalement inaccessible et ingérable. Autre possibilité : certaines équations différentielles simples, mais la démarche sera très bien détaillée.
- Projection et symétrie.

Résultats fondamentaux utilisables

- $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ pour montrer que f est linéaire.
- f est injective si et seulement si son noyau $\text{Ker } f$, à savoir le SEV de E formé des vecteurs x tels que $f(x) = 0$, est réduit au vecteur nul. Avoir f injective nécessite $\dim F \geq \dim E$, pour qu'il y ait « suffisamment de place » dans F pour contenir « une copie conforme » de E .
- Plus généralement, la relation $f(x_1) = f(x_2)$ équivaut à $x_1 = x_2 + z$ où $z \in \text{Ker } f$.
- f est surjective si et seulement si $\text{Im } f = F$. Avoir f surjective nécessite $\dim F \leq \dim E$, pour que « F soit plus petit que E ».
- Théorème de la dimension : $\dim E = \dim (\text{Ker } f) + \dim (\text{Im } f)$.
- Lorsque $n = p$ (E et F de même dimension, ce qui est en particulier vrai lorsque f est un endomorphisme de E), f est **bijective (isomorphisme) si et seulement si elle est injective ou bien surjective**, il suffit de montrer l'une des deux conditions **seulement**, et en général c'est $\text{Ker } f = \{0\}$ qui est de loin la plus simple.
- Étant données une base $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_p\}$ de E et une base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de F , la matrice A de f sur ces deux bases possède n lignes et p colonnes, sa première colonne contenant les composantes de $f(u_1)$ sur la base $\mathcal{V}$, et ainsi de suite. Comme E est de dimension p et F de dimension n , on a bien une matrice $n \times p$.
- On a ainsi aisément une base de l'image $\text{Im } f$, sachant que les colonnes de A forment un système générateur de $\text{Im } f$ (mais pas nécessairement une base!).
- La formule de changement de base $A' = P^{-1}AP$ pour un endomorphisme (ou $A' = Q^{-1}AP$ pour $f : E \rightarrow F$, P étant la matrice de passage au départ et Q celle à l'arrivée).
- Le rang de f est le rang de la matrice A , matrice écrite sur **deux bases quelconques** de E et de F .
- Avec des polynômes, penser à la relation « famille libre » et « degrés distincts ».
- La projection sur F parallèlement à G (avec $E = F \oplus G$) est un endomorphisme p_F de E vérifiant $p_F^2 = p_F$. Son noyau est G et son image est F . La symétrie par rapport à F et parallèlement à G est $s = p_F - p_G$ et elle vérifie $s^2 = I_d$.
- La relation $p^2 = p$ caractérise une projection et $s^2 = I_d$ caractérise une symétrie.

Ce que l'on vous demandera de montrer

- Que f est une application linéaire.

- Trouver le noyau de f (résoudre le système $AX = 0$) et/ou l'image de f (extirper une famille libre de la famille des colonnes de A) et le rang de f . Etre conscient que connaître le noyau ou l'image donne immédiatement le rang de f , et donc la dimension de l'image ou du noyau.
- Montrer que f est un isomorphisme de E sur F , soit pour en déduire la dimension de F (égale alors à celle de E), soit pour simplement pouvoir résoudre des équations $y = f(x)$ où $y \in F$ est donné.
- Faire des changements de base dans E et/ou F et écrire la matrice de f sur ces nouvelles bases.
- En utilisant un isomorphisme entre $K_n[X]$ et K^{n+1} , montrer rapidement l'existence et l'unicité d'un polynôme de degré $\leq n$ vérifiant des conditions sur ses valeurs ou celles de sa dérivée en certains points.

■ Les questions à se poser

- Est-il pertinent de se ramener à la matrice de f sur deux bases, ou bien est-ce que je peux travailler directement sur l'expression de f , en particulier dans le cas où l'on travaille avec des polynômes.
- Ai-je bien compris que parler du « noyau de la matrice carrée A » est un abus de langage, et qu'on devrait parler « du noyau de l'endomorphisme de K^n dont A est la matrice », par exemple sur la base canonique de K^n . Mais que cet abus de langage est admissible.
- Application linéaire de rang 1 : toutes les colonnes (ou lignes) de la matrice sont proportionnelles. Application linéaire de rang ≥ 2 : il y a au moins deux colonnes (ou lignes) non proportionnelles. En dimension 3 ou 4, comment se simplifier le travail avec ces deux remarques ?
- Penser que si f est injective ($\text{Ker } f$ réduit au vecteur nul), alors f réalise un isomorphisme de E sur l'image $\text{Im } f$.
- Avec une composée $f \circ g$, quelles conditions sur f et/ou g impliquent que la composée est injective ou surjective ?

Exercices

Exercice 1

Soit $n \geq 2$ donné et F l'application associant à un polynôme $P \in K_n[X]$ le polynôme $F(P)$ défini par $F(P)(X) = P(X+1)$.

1. Dans quel espace vectoriel arrive-t-on ? Montrer que F est linéaire et trouver son noyau.
2. En déduire que F est un automorphisme de $K_n[X]$ (endomorphisme bijectif) et donner son inverse F^{-1} .
3. On prend $n = 3$: écrire la matrice A de F sur la base $\{1, X, X^2, X^3\}$. Donner la valeur de A^{-1} sans calcul d'inversion de matrice.

Exercice 2

On se place dans $E = K_n[X]$ avec $n \geq 2$. Pour tout $P \in E$, on note $T(P)$ le polynôme défini par

$$T(P)(X) = P(X) + \frac{1}{1!}P'(X) + \frac{1}{2!}P''(X) + \cdots + \frac{1}{n!}P^{(n)}(X)$$

1. Quel est le degré de $T(P)$ par rapport à celui de P ? Montrer rapidement que T est un endomorphisme de E .
2. a) Calculer $T(1), T(X), T(X^2)$ et subodorer la valeur de $T(X^k)$ pour $1 \leq k \leq n$. Le démontrer ensuite directement (à savoir sans récurrence).
b) Finalement, qui est le polynôme $T(P)$, en fonction de P ? Quelle formule cela-vous rappelle-t-il ?

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & -5 & -6 & -9 \end{pmatrix}$, qui peut être considérée comme la matrice d'une application linéaire f de K^p dans K^n .

1. **Question sans aucun calcul** : que valent n et p ? L'application f peut-elle être injective ? Surjective ? Quelles sont les valeurs possibles de son rang ?
2. a) Trouver $\text{Ker } f$: on donnera la dimension et une base.
b) Trouver $\text{Im } f$: on donnera la dimension et une base.

Exercice 4

Soit $E = K_3[X]$, et soient a, b, c, d quatre scalaires distincts. On pose

$$P_1 = \frac{(X-b)(X-c)(X-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}, \quad P_2 = \frac{(X-a)(X-c)(X-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)}$$

$$P_3 = \frac{(X-a)(X-b)(X-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)}, \quad P_4 = \frac{(X-a)(X-b)(X-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

1. Soit $Q = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 + \delta P_4$. Calculer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en fonction des valeurs de Q en certains points de K .
2. Que peut-on dire de la famille $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ pour E ?
3. a) Que peut-on dire de l'application $Q \in E \mapsto U(Q) = (Q(a), Q(b), Q(c), Q(d)) \in K^4$?
b) En déduire que pour tous scalaires, y_1, y_2, y_3, y_4 , il existe un unique polynôme Q de degré ≤ 3 tel que $Q(a) = y_1, Q(b) = y_2, Q(c) = y_3, Q(d) = y_4$.
c) Quelle est l'image réciproque de la base canonique de K^4 par U ? Retrouver ainsi, d'une autre façon, le résultat de la question 2.
4. Quelle est la matrice de Q sur la base précédente de E (au départ) et la base canonique de K^4 (à l'arrivée).

Exercice 5

On se place dans $E = K_n[X]$ avec $n \geq 2$. Pour $P \in E$, on note

$$U(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$$

1. Calculer $U(1), U(X), U(X^2)$. À l'aide du début du binôme de Newton, montrer que $U(X^p)$ est de degré $p-2$ pour $p \geq 2$.
2. Vérifier que U est un endomorphisme de E et exprimer le degré de $U(P)$ en fonction du degré de P .
3. Trouver le noyau de U et en déduire son rang. Comparer $\text{Im } U$ et $K_{n-2}[X]$.
4. Montrer que U est nilpotent, i.e. qu'il existe un entier m tel que $U^m = 0$. On pourra éventuellement distinguer les cas n pair et n impair, mais ce n'est pas vraiment indispensable.
5. On prend $n = 4$. Ecrire la matrice A de U sur la base $\{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ et calculer A^2, A^3 .

Exercice 6 [🔗 Corrigé en ligne]

On se place dans $E = K_n[X]$, pour $n \geq 2$.

1. L'application $P \mapsto U(P) = X^2 P''(X) - 3X P'(X) + 2P(X)$ est-elle un endomorphisme de E ?

2. a) D'où vient le terme de plus haut degré de $U(P)$?
b) L'application précédente est-elle injective ?
3. Pour chaque $Q \in K_n[X]$, existe-t-il $P \in K_n[X]$ tel que $Q = X^2 P''(X) - 3XP'(X) + 2P(X)$?
4. On prend $n = 3$. Ecrire la matrice de U sur la base canonique de $K_3[X]$ et vérifier qu'elle est bien inversible.
5. Reprendre *le plus rapidement possible* le problème avec $V(P) = X^2 P'' - 2XP' + 2P$: V est-il un automorphisme ? Quel est son rang et son noyau ?

Exercice 7

On se place dans $\mathbb{R}^3$, et on considère la projection p sur le plan $F : x + 2y + z = 0$ parallèlement à la droite G de vecteur directeur $u(1, 2, 1)$. Il s'agit d'une application linéaire (à peu près clair géométriquement), et on va trouver sa matrice sur la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour un vecteur $X(x, y, z)$ on notera x', y', z' les composantes de $X' = p(X)$.

1. Ecrire les deux relations liant X et X' et caractérisant cette projection.
2. En déduire les relations liant x, y, z et x', y', z' et donner la matrice A (sur la base canonique de $\mathbb{R}^3$) de cette projection. Comparer A^2 et A .
3. Trouver « un peu au pif » une base $\{v, w\}$ de F , et donner (sans calcul, juste par des considérations géométriques) la matrice de p sur la base $\{u, v, w\}$.
4. Vérifier la relation « $A' = P^{-1}AP$ » liant les deux matrices de p sur nos deux bases différentes (lesquelles ?) : on commencera par bien écrire P .

Exercice 8

On se place dans $\mathbb{R}^3$, et on considère la symétrie s par rapport au plan $F : x + 2y + z = 0$ et parallèlement à la droite G de vecteur directeur $u(1, -2, 1)$. Il s'agit d'une application linéaire (à peu près clair géométriquement), et on va trouver sa matrice sur la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour un vecteur $X(x, y, z)$ on notera x', y', z' les composantes de $X' = s(X)$.

1. Ecrire les deux relations liant X et X' et caractérisant cette symétrie.
2. En déduire les relations liant x, y, z et x', y', z' et donner la matrice A (sur la base canonique de $\mathbb{R}^3$) de cette projection. Calculer A^2 .

Exercice 9

Dans un E.V. E de dimension 3 sur K rapporté à une base $\{e_1, e_2, e_3\}$, on se donne l'endomorphisme f dont la matrice sur cette base est $B = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 10 \\ -2 & -4 & 7 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

MATHS

Ce livre n'est pas un recueil classique d'exercices. Il apprend à **réfléchir efficacement** face à un énoncé.

Quels sont les résultats fondamentaux mobilisables ? Quelles **sont les bonnes questions à se poser** avant de se lancer dans la résolution ? À travers une approche novatrice, ce livre propose :

- une sélection claire des outils théoriques de niveau L1-L2 (sans démonstration),
- une liste structurée des objectifs et types de questions que l'étudiant doit se poser devant un exercice,
- une méthode pour choisir les bons outils en fonction de chaque situation.

Le lecteur apprend ainsi à construire une démarche rigoureuse et autonome.

Les énoncés des exercices sont intégrés dans le livre papier, tandis qu'une partie des corrigés, des illustrations graphiques et des compléments pédagogiques sont disponibles **en ligne**.

Un outil précieux pour les étudiants en mathématiques, physique ou toute autre filière scientifique de premier cycle, qui souhaitent progresser dans la compréhension des sujets et du raisonnement mathématique.



**DU MÊME
AUTEUR**



24,90 €

ISBN : 978-2-8073-6706-7



9 782807 367067

De Boeck Supérieur s'engage
durablement
pour l'environnement



www.deboecksuperieur.com