ADMIS CRPE

CONCOURS 2021

5e édition

CRPE

PROFESSEUR DES ÉCOLES

Mathématiques

en 60 fiches

RÉVISER L'ESSENTIEL

ÉCRIT

- Savoirs disciplinaires et didactiques
- Méthode et conseils
- 220 QCM et exercices corrigés

Vuibert
N°1 DES CONCOURS

ADMIS CRPE

CONCOURS 2021

5e édition

CRPE

PROFESSEUR DES ÉCOLES

Mathématiques

en 60 fiches

Ouvrage dirigé par Marc Loison
Docteur en histoire de l'éducation et sciences de l'éducation,
Maître de conférences honoraire en histoire contemporaine de l'université d'Artois,
Ancien conseiller pédagogique chargé de mission académique
pour l'éducation prioritaire

Éric Greff
Professeur agrégé de mathématiques en INSPÉ,
Docteur en didactique de l'informatique

André Mul
Professeur honoraire de mathématiques

ISBN : 978-2-311-20735-4

Maquette de couverture : Séverine Tanguy
Maquette intérieure : Bleu T
Composition : So'Graph



La loi du 11 mars 1957 n'autorisant aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article 40).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.
Le « photocopillage », c'est l'usage abusif et collectif de la photocopie sans autorisation des auteurs et des éditeurs. Largement répandu dans les établissements d'enseignement, le « photocopillage » menace l'avenir du livre, car il met en danger son équilibre économique. Il prive les auteurs d'une juste rémunération. En dehors de l'usage privé du copiste, toute reproduction totale ou partielle de cet ouvrage est interdite. Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur.
S'adresser au Centre français d'exploitation du droit de copie : 20, rue des Grands-Augustins, F-75006 Paris.
Tél. : 01 44 07 47 70

© Vuibert – août 2020 – 5, allée de la 2e DB – 75015 Paris
Site Internet : http://www.vuibert.fr

Sommaire

Les épreuves du concours de professeur des écoles 5

Partie 1 | Résoudre un problème portant sur un ou plusieurs domaines des programmes de l'école ou du collège

Fiche 1 Proportionnalité (1) 8
Fiche 2 Proportionnalité (2) 12
Fiche 3 Droites 16
Fiche 4 Constructions à la règle et au compas 20
Fiche 5 Angles 25
Fiche 6 Symétries 30
Fiche 7 Triangles 36
Fiche 8 Théorème de Pythagore 40
Fiche 9 Réciproque du théorème de Pythagore 44
Fiche 10 Théorème de Thalès 46
Fiche 11 Réciproque du théorème de Thalès 50
Fiche 12 Cercle et disque 52
Fiche 13 Polygones 58
Fiche 14 Polyèdres 62
Fiche 15 Cylindres et cônes 66
Fiche 16 Périmètres, aires et volumes 69
Fiche 17 Patrons de solides 73
QCM de validation 77

Partie 2 | Résoudre des exercices complémentaires à la première partie

Fiche 18 Numération 82
Fiche 19 Ensembles de nombres 84
Fiche 20 Valeurs approchées, encadrement et écriture scientifique 88
Fiche 21 Les nombres premiers 91
Fiche 22 PPCM et PGCD 93
Fiche 23 Multiples et diviseurs 95
Fiche 24 Fractions 99
Fiche 25 Éléments de calcul algébrique 104
Fiche 26 Puissances et racines carrées 108
Fiche 27 Fonctions numériques 111
Fiche 28 Autres fonctions 114
Fiche 29 Notion de fonction et informatique (tableur et Scratch) 116
Fiche 30 Équations 121

Fiche 31 Systèmes d'équations 125
Fiche 32 Aperçu sur les inéquations et systèmes d'inéquations 127
Fiche 33 Échelles et vitesses 131
Fiche 34 Pourcentages 134
Fiche 35 Statistiques 138
Fiche 36 Calculs statistiques 141
Fiche 37 Éléments de probabilités 146
Fiche 38 Programmation de parcours (robot et Scratch) 151
Fiche 39 Coordonnées et équations de droites 155
QCM de validation 161

Partie 3 | Analyser un dossier composé d'un ou plusieurs supports d'enseignement des mathématiques

Fiche 40 Notions de didactique (1) 166
Fiche 41 Notions de didactique (2) 170
Fiche 42 Les différentes phases d'une leçon 174
Fiche 43 Addition soustraction 179
Fiche 44 Technique de l'addition 183
Fiche 45 Technique de la soustraction 187
Fiche 46 Grandeurs et mesures 192
Fiche 47 Aires et périmètres 196
Fiche 48 Droites et constructions 201
Fiche 49 Figures planes : quadrilatères et cercles 205
Fiche 50 Quadrillages et symétrie 209
Fiche 51 Cubes et pavés 213
Fiche 52 École maternelle 217
Fiche 53 Fractions 222
Fiche 54 Nombres décimaux 226
Fiche 55 Multiplication 230
Fiche 56 Technique de la multiplication 234
Fiche 57 Division 238
Fiche 58 Technique de la division 242
Fiche 59 Proportionnalité 244
Fiche 60 Résolution des problèmes 248
QCM de validation 253

Les épreuves du concours de professeur des écoles

Deux épreuves écrites d'admissibilité

Cadre de référence : Programmes de l'école primaire

Niveau attendu : Maîtrise des programmes du collège, connaissance approfondie des cycles d'enseignement de l'école primaire et des éléments du socle commun de connaissance, de compétences et de culture et des contextes de l'école maternelle et de l'école élémentaire

Épreuve écrite de français **Barème : 40 points – Durée : 4 heures**		
1. **Question** sur un ou plusieurs textes littéraires ou documentaires	11 points	Note globale ≤ 10 éliminatoire 5 points pour la correction syntaxique et la qualité écrite de la production du candidat
2. **Connaissance de la langue :** – grammaire, orthographe, lexique et système phonologique ; – questions portant sur des connaissances ponctuelles ; – analyse d'erreurs types dans des productions d'élèves	11 points	
3. **Analyse d'un dossier** composé d'un ou plusieurs supports d'enseignement du français (manuels, documents pédagogiques) et de productions d'élèves	13 points	
Épreuve écrite de mathématiques **Barème : 40 points – Durée : 4 heures**		
1. **Problème** portant sur un ou plusieurs domaines des programmes de l'école ou du collège ou sur des éléments du socle commun de connaissances	13 points	Note globale ≤ 10 éliminatoire
2. **Exercices indépendants** complémentaires à la première partie : QCM, réponses construites, analyse d'erreurs types dans des productions d'élèves	13 points	5 points au maximum peuvent être retirés pour la correction syntaxique et la qualité écrite
3. **Analyse d'un dossier** composé d'un ou plusieurs supports d'enseignement des mathématiques (manuels, documents pédagogiques) et de productions d'élèves	14 points	

Deux épreuves orales d'admission Entretien avec un jury afin d'évaluer la capacité du candidat à s'exprimer avec clarté et précision et à réfléchir aux enjeux scientifiques, didactiques, épistémologiques, culturels et sociaux que revêt l'enseignement des champs disciplinaires du concours et des rapports qu'ils entretiennent entre eux		
Épreuve de mise en situation professionnelle dans un domaine au choix du candidat **Domaines d'enseignement :** sciences et technologie, histoire, géographie, histoire des arts, arts visuels, éducation musicale, langues vivantes étrangères (allemand, anglais, espagnol ou italien), enseignement moral et civique (domaine à choisir au moment de l'inscription) **Barème : 60 points – Durée : 1 heure**		
1. Remise préalable au jury d'un dossier de dix pages au plus, annexes comprises, portant sur le sujet choisi (format papier accompagné le cas échéant d'un support numérique [clef USB])		
2. **Présentation du dossier** par le candidat : – synthèse des fondements scientifiques relatifs au sujet retenu ; – description d'une séquence pédagogique relative au sujet et accompagnée de documents	20 points	20 minutes
3. **Entretien avec le jury :** – aspects scientifiques, pédagogiques et didactiques du dossier ; – approfondissement dans le domaine considéré notamment sur les différentes théories du développement de l'enfant	40 points	40 minutes
Entretien à partir d'un dossier **Objectifs de cet entretien :** Évaluer les compétences du candidat pour l'enseignement de l'éducation physique et sportive ainsi que sa connaissance de la place de cet enseignement dans l'éducation à la santé à l'école primaire. Apprécier les connaissances du candidat sur le système éducatif français et plus particulièrement sur l'école primaire (organisation, valeurs, objectifs, histoire et enjeux contemporains). Apprécier la capacité du candidat à se situer comme futur agent du service public (éthique, sens des responsabilités, engagement professionnel) et comme futur professeur des écoles dans la communauté éducative **Barème : 100 points – Durée : 1 heure 15 – Préparation : 3 heures**		
1. **Éducation physique et sportive** Sujet proposé par le jury et relatif à une activité physique, sportive et artistique praticable à l'école élémentaire ou au domaine des activités physiques et expériences corporelles à l'école maternelle	40 points	Exposé : 10 minutes Entretien : 20 minutes
2. **Exposé** à partir d'un dossier de 5 pages maximum fourni par le jury et portant sur une **situation professionnelle** inscrite dans le fonctionnement de l'école primaire. L'exposé vise à attester de la part du candidat de compétences professionnelles en cours d'acquisition **Entretien** portant sur les acquis et besoins des élèves, sur la diversité des conditions d'exercice du métier et sur les valeurs de la République	60 points Exposé : 20 points Entretien : 40 points	Exposé : 15 minutes Entretien: 30 minutes

PARTIE 1

Résoudre un problème portant sur un ou plusieurs domaines des programmes de l'école ou du collège

Fiche	1	Proportionnalité (1)	8
Fiche	2	Proportionnalité (2)	12
Fiche	3	Droites	16
Fiche	4	Constructions à la règle et au compas	20
Fiche	5	Angles	25
Fiche	6	Symétries	30
Fiche	7	Triangles	36
Fiche	8	Théorème de Pythagore	40
Fiche	9	Réciproque du théorème de Pythagore	44
Fiche	10	Théorème de Thalès	46
Fiche	11	Réciproque du théorème de Thalès	50
Fiche	12	Cercle et disque	52
Fiche	13	Polygones	58
Fiche	14	Polyèdres	62
Fiche	15	Cylindres et cônes	66
Fiche	16	Périmètres, aires et volumes	69
Fiche	17	Patrons de solides	73
QCM de validation			77

FICHE 1 Proportionnalité (1)

PLAN DE LA FICHE

Retenir	8
1. Introduction	8
2. Tableaux de proportionnalité	8
3. Proportions	9
S'entraîner	10
Corrigés	11

Retenir

1. Introduction

Pour faire une purée pour 4 personnes, il faut 800 g de pommes de terre, 30 cl de lait et 40 g de beurre. Compléter le tableau suivant en inscrivant les quantités pour 20 personnes.

	Pommes de terre	Lait	Beurre
Quantités pour 4 personnes	800 g	30 cl	40 g
Quantités pour 20 personnes			

Pour traiter cette question il existe plusieurs façons de faire. La méthode la plus rapide consiste à multiplier toutes les quantités par 5 puisque 20 personnes c'est 5 fois 4 personnes. En procédant ainsi, nous avons appliqué les règles de la **proportionnalité**. Cette notion joue un rôle très important, non seulement dans la résolution de problèmes pratiques, mais aussi sur le plan théorique. On utilise la proportionnalité en calcul, mais aussi en géométrie.

2. Tableaux de proportionnalité

Le tableau ci-dessous met en regard les côtés de cinq carrés et leurs périmètres.

Côté (en cm)	7	12	28	35	50
Périmètre (en cm)	28	48	112	140	200

On peut observer que, dans chaque colonne :
– le nombre de la seconde ligne s'obtient en multipliant le nombre de la première par 4 ;

– inversement, le nombre de la première ligne s'obtient en multipliant le nombre de la seconde par $\frac{1}{4} = 0{,}25$ ou bien encore en le divisant par 4.

On dit que ce tableau est un **tableau de proportionnalité**.

Dans chaque colonne d'un tableau de proportionnalité, le nombre qui figure sur la ligne du bas est égal au produit de celui qui figure sur la ligne du haut par un nombre constant appelé le **coefficient de proportionnalité** du tableau.

3. Proportions

Considérons les six nombres a, b, c, a', b' et c' dont aucun n'est nul.

Si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ le tableau

a	b	c
a'	b'	c'

est un tableau de proportionnalité. Ainsi, le tableau

5	8	6
15	24	18

est un tableau de proportionnalité car $\frac{5}{15} = \frac{8}{24} = \frac{6}{18}$.

Dans le cas d'un tableau de proportionnalité qui ne comprend que 4 nombres disposés en deux lignes et deux colonnes, on parle de proportion.

Quatre nombres non nuls a, b, c et d forment une **proportion** si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. On a alors $a \times d = b \times c$.

Il est facile de calculer l'un des quatre nombres d'une proportion quand on connaît les trois autres. Calculons par exemple le nombre x qui figure dans la proportion $\frac{8}{x} = \frac{4}{5}$. La réponse est $x = 10$. On a en effet $8 \times 5 = 4 \times x$, d'où $x = \frac{40}{4} = 10$.

Les proportions interviennent dans de nombreux problèmes.

Ex. : Au cours du jour, on peut échanger 125 dollars US pour 100 euros.
1. Quelle somme en euros peut-on obtenir à ce cours en vendant 190 dollars US ?
2. Quelle somme en dollars US peut-on obtenir à ce cours en vendant 300 euros ?

Réponse : On peut résoudre ces deux questions de plusieurs façons. Tout d'abord, on peut chercher à exprimer chaque unité monétaire en fonction de l'autre :
– 1 dollar US vaut 100 : 125 = 0,8 euro, donc 190 dollars US valent : $190 \times 0{,}8 = 152$ euros.
– 1 euro = 1,25 dollar US, donc 300 euros permettent d'obtenir : $300 \times 1{,}25 = 375$ dollars US.
On peut aussi, et c'est plus rapide, écrire une proportion du type $\frac{\text{somme en euros}}{\text{somme en dollars US}} = \frac{100}{125}$.
Dans le premier cas, cette proportion devient $\frac{x \text{ euros}}{190} = \frac{100}{125}$, d'où $x = \frac{190 \times 100}{125} = 152$ euros.
Dans le deuxième cas, la proportion devient $\frac{300}{x \text{ dollars US}} = \frac{100}{125}$, d'où $x = \frac{125 \times 300}{100} = 375$ dollars US.

S'entraîner

1 Complétez ce tableau de proportionnalité.

3,5	4,2		6	
5,6		8,8		13,6

2 Luc est un excellent coureur de 5 000 m. Pour son entraînement, il a établi le tableau suivant :

Distance (en km)	2	3	4	5
Temps de passage	5 min 36 s	8 min 24 s	11 min 12 s	14 min

Les temps de passage sont-ils proportionnels aux distances ? Si oui, quel est le temps prévu au kilomètre ?

3 Si on fabrique 3 kg de pain avec 2 kg de farine, quelle quantité de pain fabrique-t-on avec 80 kg de farine ? Quelle quantité de farine faut-il pour faire 90 kg de pain ? Donnez les réponses avec deux méthodes différentes.

4 2 stylos et 3 gommes valent 7 euros mais 5 stylos et 2 gommes valent 12 euros. (Les stylos ont tous le même prix, toutes les gommes ont le même prix.) Quel est le prix d'un stylo ? Quel est le prix d'une gomme ? Répondez à la question sans écrire d'équations.

5 Cinq verres de même contenance remplissent un pichet. Pour remplir un jéroboam, il faut neuf pichets et trois verres. Il est rappelé qu'un jéroboam contient 6 litres. Quelles sont les contenances d'un verre et du pichet ? Les réponses sont demandées en centilitres.

Corrigés

1 On passe de 3,5 à 5,6 en multipliant par 1,6.

3,5	4,2	5,5	6	8,5
5,6	6,72	8,8	9,6	13,6

2 Il faut convertir les temps de passage en secondes. On obtient respectivement 336 s, 504 s, 672 s et 840 s. En divisant ces nombres par les distances correspondantes, on trouve toujours 168. Les temps sont bien proportionnels aux distances.
Le tableau de marche a été établi sur la base de 168 s au kilomètre, soit 2 min 48 s.

3 **1.** Avec 1 kg de farine on fait 1,5 kg de pain. Avec 80 kg de farine, on fera $80 \times 1{,}5 = 120$ kg de pain.
Pour faire 90 kg de pain, il faut $90 : 1{,}5 = 60$ kg de farine.

2. On pourrait dire aussi : le poids du pain vaut 1,5 fois celui de la farine ; donc 80 kg de farine donnent $80 \times 1{,}5 = 120$ kg de pain. Le poids de farine représente $\frac{2}{3}$ de celui du pain ; donc pour avoir 90 kg de pain, il faut $90 \times \frac{2}{3} = 60$ kg de farine.

4 Si 2 stylos et 3 gommes valent 7 euros, alors 4 stylos et 6 gommes valent 14 euros.
Si 5 stylos et 2 gommes valent 12 euros, alors 15 stylos et 6 gommes valent 36 euros.
On en déduit, par soustraction, que 11 stylos valent 22 euros, donc 1 stylo vaut 2 euros.
Une gomme vaut 1 euro.

5 1 jéroboam = 9×5 verres + 3 verres = 48 verres.
48 verres = 6 litres = 600 centilitres, donc 1 verre = 12,5 cl.
1 pichet = $5 \times 12{,}5 = 62{,}5$ cl.

FICHE 2 Proportionnalité (2)

Plan de la fiche

Retenir 12
1. Grandeurs proportionnelles 12
2. La double proportionnalité 12
3. Partages proportionnels 13
4. Proportionnalité et représentation graphique 13
S'entraîner 14
Corrigés 14

Retenir

1. Grandeurs proportionnelles

Le périmètre d'un carré s'obtient très simplement en multipliant le côté du carré par 4 : on dit que le périmètre d'un carré est proportionnel à la longueur de son côté.

Deux grandeurs sont **proportionnelles** quand la mesure de l'une s'obtient en multipliant la mesure correspondante de l'autre par un même nombre. Ce nombre est appelé le **coefficient de proportionnalité**.

2. La double proportionnalité

Dans un certain nombre de problèmes, on utilise deux tableaux de proportionnalité ou deux séries de grandeurs proportionnelles (quelquefois plus !). On parle alors de double proportionnalité.

Ex. : Le baril de pétrole brut vaut 52 dollars US. Quel est le prix d'un litre en euros ? On donne 1 baril = 170 litres et 1 dollar US = 0,845 euro.

Réponse : Les données de l'énoncé peuvent être regroupées en deux tableaux de proportionnalité.

1 dollar	0,845 euro
52 dollars	x euros

170 litres	x euros
1 litre	p euros

Le tableau 1 nous donne la proportion $\frac{1}{52} = \frac{0{,}845}{x}$ d'où $x = 52 \times 0{,}845 =$ 43,94 euros.

Le tableau 2 nous donne la proportion $\frac{170}{1} = \frac{x}{p}$ soit $\frac{170}{1} = \frac{43{,}94}{p}$.
On en tire $p = \frac{43{,}94}{170} = 0{,}258$ euro. 1 litre de pétrole brut vaut 0,258 euro.

3. Partages proportionnels

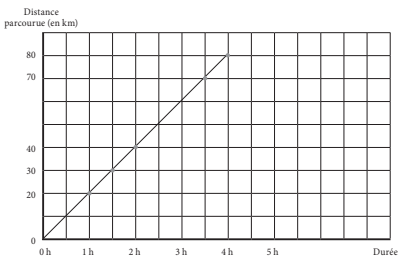
Ex. : Pour procéder à des partages ou à des répartitions, on utilise diverses méthodes, selon les résultats escomptés. L'une de ces méthodes, très utilisée dans la vie courante, consiste à faire appel à la proportionnalité. Prenons l'exemple de trois copropriétaires qui doivent répartir une dépense de 1 000 euros proportionnellement à leurs surfaces habitables : 65 m², 75 m² et 110 m². Quelle doit être la somme payée par chacun ?
Réponse : La somme des surfaces habitables est 65 + 75 + 110 = 250 m².
On fait payer 1 000 ÷ 250 = 4 euros par m².
Les copropriétaires paieront donc respectivement 65 × 4 = 260 euros, 75 × 4 = 300 euros et 110 × 4 = 440 euros.
La répartition est bien proportionnelle aux surfaces habitables puisque $\frac{260}{65} = \frac{300}{75} = \frac{440}{110} = 4$.

4. Proportionnalité et représentation graphique

Le tableau ci-dessous montre la distance parcourue par un cycliste qui roule à vitesse constante pendant des temps différents :

Temps du parcours	1 h	1 h 30	2 h	3 h 30	4 h
Distance parcourue	20 km	30 km	40 km	70 km	80 km

Puisque la vitesse est constante, les distances parcourues sont proportionnelles aux durées des parcours. Représentons graphiquement les distances parcourues en fonction des durées.
On observe deux choses :
– les cinq points représentatifs sont alignés ;
– la droite qui passe par ces points passe aussi par l'origine du repère.
Ces deux propriétés caractérisent la proportionnalité (une seule ne suffit pas !).



S'entraîner

1 Des enfants utilisent le système d'échange suivant :

pour 9 pogs on obtient 20 billes ;

pour 15 pogs on obtient 16 agates.

Combien obtient-on d'agates en échange de 25 billes ?

2 3 machines identiques tournant à plein régime permettent de fabriquer 21 000 bouteilles en 5 jours. Combien de jours faudrait-il pour que 7 machines identiques travaillant dans les mêmes conditions fabriquent 88 200 bouteilles ?

3 On lit dans le journal, à la rubrique Marché des changes, 1 euro = 1,1872 dollar US et 1 euro = 139,18 yens.

Quelle est la valeur en euro de 1 dollar US ? Quel est le prix en euros de 850 dollars US ?

Quelle est la valeur en yens de 2 400 dollars US ?

4 Partagez une somme de 60 euros entre deux enfants proportionnellement à leurs âges, 9 ans et 11 ans.

5 Un chef d'entreprise doit partager une prime de 1 500 euros entre trois employés A, B et C. La prime sera répartie proportionnellement aux années d'ancienneté des employés : 3 ans pour A, 4 ans pour B et 8 ans pour C.

Quelle somme chacun des employés recevra-t-il ?

Corrigés

1 Pour l'échange des pogs contre des billes, le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

Nombre de pogs	9	15
Nombre de billes	20	x

Pour l'échange des billes contre des agates, le tableau suivant est aussi un tableau de proportionnalité :

Nombre de billes	x	25
Nombre d'agates	16	y

D'après ces tableaux, $\frac{9}{20} = \frac{15}{x}$ et $\frac{x}{16} = \frac{25}{y}$. On en tire $x = \frac{20 \times 15}{9} = \frac{100}{3}$ et $y = \frac{16 \times 25}{x}$.
En reportant dans la seconde égalité la valeur de x qui a été trouvée, on peut écrire $\frac{16 \times 25}{\frac{100}{3}} = \frac{16 \times 25 \times 3}{100} = 12$. On obtient 12 agates en échange de 25 billes.

2 Pour une durée de fonctionnement de 5 jours, le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

Nombre de machines	3	7
Nombre de bouteilles	21 000	x

Pour 7 machines, le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

Nombre de jours	5	y
Nombre de bouteilles	x	88 200

Le premier tableau nous donne $x = \frac{7 \times 21\,000}{3} = 49\,000$ bouteilles.

Le second tableau nous donne $y = \frac{88\,200 \times 5}{x} = \frac{8\,200 \times 5}{49\,000} = 9$ jours.

3 1 dollar US = 1 : 1,1872 = 0,8423 euro.
850 dollars US = $850 \times \frac{1}{1{,}1872} = 715{,}97$ euros.
2 400 dollars US = $2\,400 \times \frac{1}{1{,}1872}$ euros = $2\,400 \times \frac{1}{1{,}1872} \times 139{,}18$ yens, soit 281 361,18 yens.

4 9 ans + 11 ans = 20 ans.
Attribuons une somme de 60 : 20 = 3 euros par année.
L'aîné recevra 3 × 11 = 33 euros. Le cadet recevra 3 × 9 = 27 euros.
Le partage a bien été fait proportionnellement aux âges car $\frac{27}{9} = \frac{33}{11}$.

5 3 + 4 + 8 = 15 ans.
Attribuons une somme de 1 500 : 15 = 100 euros par année d'ancienneté.
A recevra 100 × 3 = 300 euros, B recevra 100 × 4 = 400 euros, C recevra 100 × 8 = 800 euros.
Le partage a bien été fait proportionnellement aux années d'ancienneté car $\frac{300}{3} = \frac{400}{4} = \frac{800}{8}$.

FICHE 3 Droites

Plan de la fiche

Retenir 16
1. Les noms des objets géométriques 16
2. Parallèles et perpendiculaires 17
3. Propriétés des droites parallèles 18
S'entraîner 18
Corrigés 19

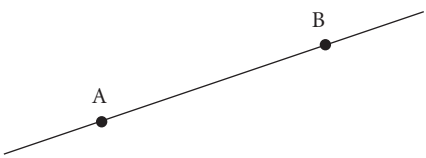
Retenir

1. Les noms des objets géométriques

Les objets géométriques sont constitués par des points. Les points sont désignés par des lettres capitales et les noms des figures sont constitués à l'aide des noms des points qui les caractérisent.

Soit A et B deux points différents.

a. La notation (**AB**) désigne la **droite** qui passe par A et par B.



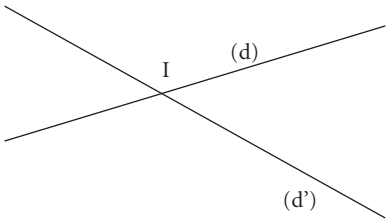
b. La notation [**AB**) désigne la **demi-droite** d'origine A qui passe par B.

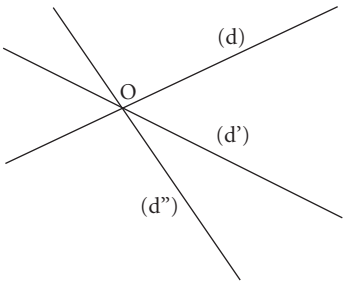


c. La notation [**AB**] désigne le **segment** d'extrémités A et B ; la notation **AB** désigne la **longueur** du segment [AB].



Si deux droites (d) et (d') ont un point commun et un seul appelé I, on dit qu'elles sont **sécantes** en I. On dit aussi que I est l'**intersection** des droites (d) et (d').





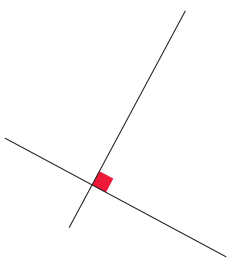
Si trois droites (d), (d') et (d") ont un point commun O, on dit qu'elles sont **concourantes** en O. On dit que O est leur **point de concours**.

2. Parallèles et perpendiculaires

Deux droites sont **perpendiculaires** quand elles forment un angle droit.

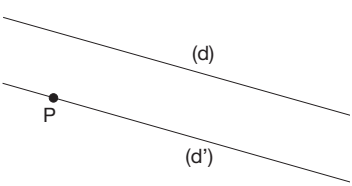
On utilise très souvent un codage pour indiquer que deux droites sont perpendiculaires.

On dit aussi que les droites sont orthogonales.



Par un point donné, on ne peut faire passer qu'une seule droite perpendiculaire à une droite donnée.

Deux droites **parallèles** n'ont aucun point commun. Un axiome d'Euclide affirme que par un point qui n'appartient pas à une droite on peut faire passer une parallèle et une seule à cette droite.



Si deux droites sont parallèles, alors toute parallèle à l'une est parallèle à l'autre.

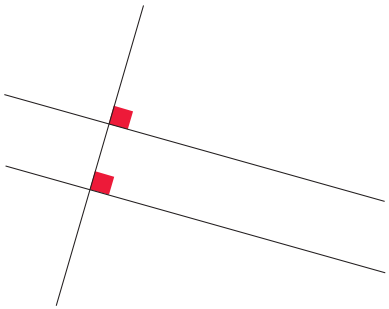
Réciproquement, si deux droites sont parallèles à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.

Si deux droites parallèles ont un point commun, alors elles sont confondues.

Cette propriété est souvent utilisée quand on veut démontrer que trois points sont alignés.

3. Propriétés des droites parallèles

Cette figure illustre les quatre propriétés suivantes :



a. Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.

b. Si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

c. Si deux droites sont perpendiculaires, toute parallèle à l'une est perpendiculaire à l'autre.

d. Si deux droites sont perpendiculaires, toute perpendiculaire à l'une est parallèle à l'autre.

S'entraîner

1. Démontrez que le parallélogramme ABCD tel que (AB) et (BC) sont perpendiculaires, est un rectangle.

2. Tracez un quadrilatère qui a deux côtés parallèles et aussi deux côtés perpendiculaires sans être un rectangle.

3. Soit ABCD un quadrilatère quelconque avec M milieu de [AB], N milieu de [BC], P milieu de [CD] et Q milieu de [DA]. En utilisant le résultat suivant : dans un triangle la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté, démontrez que MNPQ est un parallélogramme.

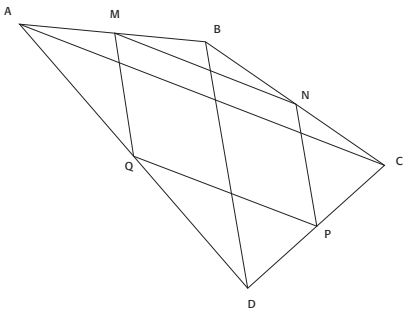
4. Soit ABCD un quadrilatère quelconque ayant ses diagonales perpendiculaires. On a aussi M milieu de [AB], N milieu de [BC], P milieu de [CD] et Q milieu de [DA]. En vous inspirant de l'exercice précédent, démontrez que MNPQ est un rectangle.

Corrigés

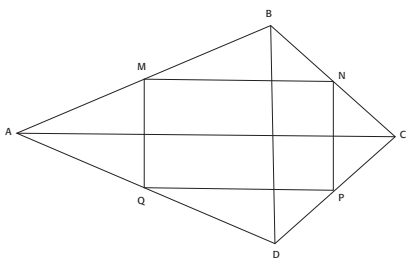
1 Comme ABCD est un parallélogramme, (AB) et (CD) sont parallèles donc (BC) est perpendiculaire à (CD).
Comme (AD) et (BC) sont parallèles, (AB) est perpendiculaire à (AD). Le quadrilatère ABCD a 3 angles droits, il en a donc 4 et c'est un rectangle.

2 Il suffit de tracer un trapèze rectangle.

3 En utilisant le résultat donné, on peut dire que (MN) et (AC) sont parallèles et que (QP) et (AC) le sont aussi. Donc (MN) et (QP) sont parallèles.
De la même façon, on peut dire que (MQ) et (BD) sont parallèles et que (NP) et (BD) le sont aussi. Donc (MQ) et (NP) sont parallèles.
Donc MNPQ est un parallélogramme.



4



D'après le 3, on sait que MNPQ est un parallélogramme.

(AC) et (BD) sont perpendiculaires, (MQ) et (BD) sont parallèles donc (MQ) et (AC) sont perpendiculaires.

(AC) et (MN) sont parallèles, comme (MQ) et (AC) sont perpendiculaires alors (MN) et (MQ) sont perpendiculaires.

D'après le 1, on sait qu'un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle donc MNPQ est un rectangle.

FICHE 4 Constructions à la règle et au compas

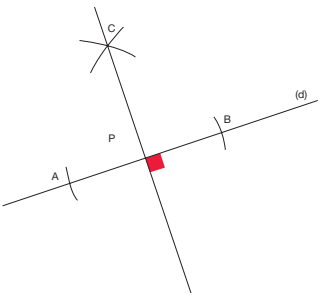
Plan de la fiche

Retenir 20
1. Construire une droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné 20
2. Distance d'un point à une droite 21
3. Construire une droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné 22
4. Construire la médiatrice d'un segment 23
S'entraîner 23
Corrigés 24

Retenir

1. Construire une droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné

Soit P un point quelconque et soit (d) une droite. Pour construire la perpendiculaire à (d) qui passe par P, il nous faut considérer deux cas.



1er cas : P appartient à la droite (d)

De P comme centre, tracer deux arcs de cercle de même rayon qui coupent (d) en A et B.

Avec le même rayon, tracer un arc de centre A et un arc de centre B : ils se coupent en C.

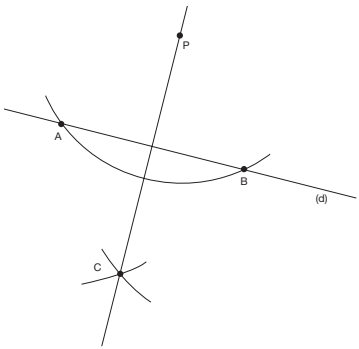
(PC) est la droite cherchée.

2e cas : P n'appartient pas à la droite (d)

De P comme centre, tracer un arc de cercle qui coupe (d) en A et B.

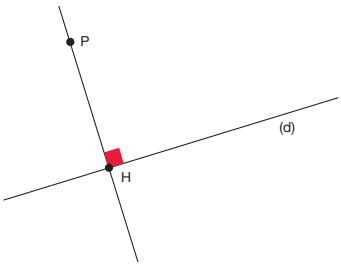
Avec le même rayon, tracer un arc de centre A et un arc de centre B : ils se coupent en C.

(PC) est la droite cherchée.



2. Distance d'un point à une droite

Soit (d) une droite quelconque et soit P un point du plan. La perpendiculaire à (d) qui passe par P la rencontre en H.



Le point H est le projeté orthogonal de P sur la droite (d). Si P appartient à la droite (d) on a évidemment H = P.

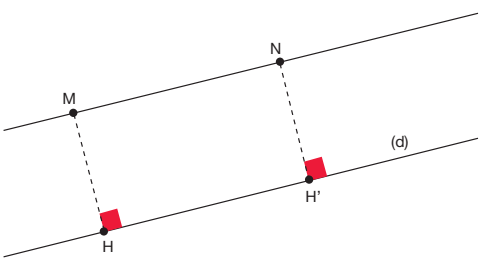
Soit H le projeté orthogonal d'un point P sur une droite (d). La longueur PH est la **distance du point P à la droite (d)**.

Si H = P cette distance vaut évidemment 0.

Soit M et N deux points et soit (d) une droite.

Si M et N sont situés tous deux dans l'un des demi-plans déterminés par la droite (d) et s'ils sont à la même distance de (d), alors la droite (MN) est parallèle à la droite (d).

Réciproquement, si la droite (MN) est parallèle à la droite (d), alors M et N sont à la même distance de (d).



3. Construire une droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné

Par un point P qui n'appartient pas à une droite (d), on ne peut faire passer qu'une seule droite parallèle à (d). Un point P et une droite (d) étant donnés, on peut effectuer cette construction de deux façons différentes.

La première méthode utilise deux constructions de perpendiculaires.

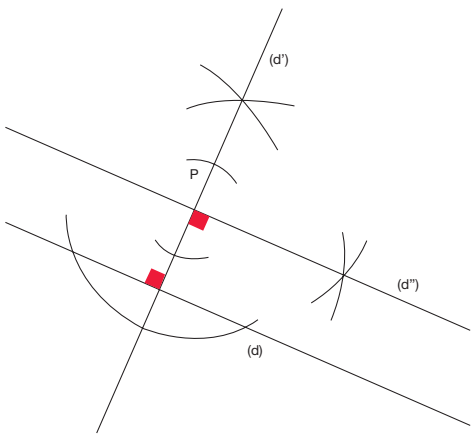
Voici cette construction :

Avec des perpendiculaires

Construire la perpendiculaire (d') à (d) qui passe par P.

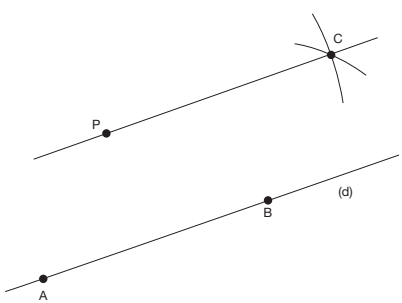
Construire ensuite la perpendiculaire (d") à (d') qui passe par P : (d") est la parallèle à (d) qui passe par P.

La seconde méthode est beaucoup plus rapide car elle n'utilise que deux arcs de cercle.



Seconde méthode : avec deux arcs de cercle seulement

Marquer deux points A et B quelconques sur (d).
De P comme centre, tracer un arc de rayon AB.
De B comme centre, tracer un arc de rayon AP.
Les deux arcs se coupent en C : la droite (PC) est la droite cherchée.



4. Construire la médiatrice d'un segment

La définition et les propriétés de la médiatrice d'un segment jouent un rôle important dans l'étude des symétries orthogonales.

La **médiatrice** d'un segment est la droite qui passe par le milieu de ce segment et qui lui est perpendiculaire.

Soit P un point du plan et soit [AB] un segment.

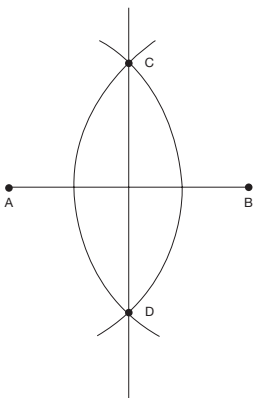
Si P appartient à la médiatrice du segment [AB], alors il est **équidistant** de A et de B.

Réciproquement, si P est équidistant de A et de B, alors il appartient à la médiatrice de [AB].

Construction d'une médiatrice

Soit [AB] un segment. Pour construire sa médiatrice, il faut :

- tracer deux arcs de cercle de même rayon, l'un de centre A et l'autre de centre B ;
- ces deux arcs se coupent en C et D : la droite (CD) est la médiatrice du segment [AB].



Remarque du formateur :
La construction de la médiatrice à la règle non graduée et au compas permet de placer le milieu d'un segment sans mesurer la longueur du segment.

S'entraîner

1. Avec la règle graduée et le compas, construisez un rectangle ABCD de longueur 5 cm et de largeur 3 cm.

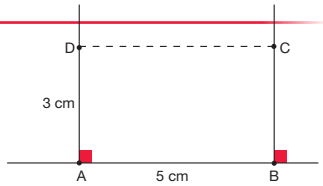
2. Avec la règle non graduée et le compas, construisez un carré ABCD.

3. Avec la règle graduée et le compas, construisez un triangle ABC qui soit rectangle en A et tel que AB = 6 cm et AC = 4 cm.

4 À partir d'un segment [AB], tracez le triangle équilatéral ABC.

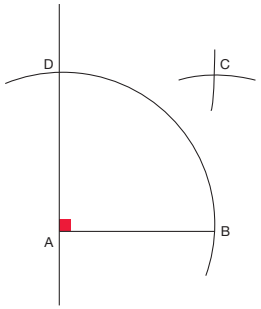
Corrigés

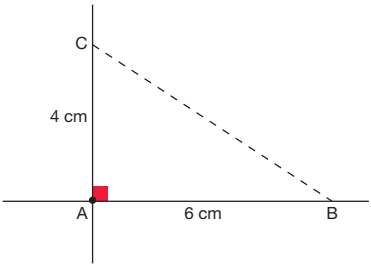
1 Sur une droite quelconque, marquer les points A et B tels que AB = 5 cm.
En A et en B, tracer les perpendiculaires à la droite (AB).
Marquer les points C et D tels que AD = BC = 3 cm.
Joindre C et D.



2 Tracer un segment [AB].

Construire la perpendiculaire en A à (AB). Sur cette droite, marquer D avec le compas tel que AD = AB.
Tracer un arc de cercle de centre D et de rayon AB puis un arc de cercle de centre B de rayon AB. Ces deux arcs se coupent en A et en C.





3 Il suffit de placer les segments [AB] et [AC] sur deux perpendiculaires en A.

4 Il suffit de tracer le cercle de centre A passant par B et aussi le cercle de centre B passant par A.
Les deux cercles se coupent en deux points. Choisir un de ces points comme troisième sommet.
Tracer les segments [AC] et [BC].

ADMIS CRPE

CONCOURS 2021

5e édition

CRPE

PROFESSEUR DES ÉCOLES

Mathématiques

en 60 fiches

Révisez l'essentiel

Tout votre programme en fiches

- **CONNAISSANCES INDISPENSABLES** pour mémoriser **tous les points incontournables du programme** avec **60 fiches synthétiques**
- **220 QCM ET EXERCICES CORRIGÉS** pour vous **auto-évaluer**
- **CONSEILS DU FORMATEUR** pour connaître les **attentes du jury** et déjouer les **pièges** lors de votre épreuve d'admissibilité

Des auteurs spécialistes du concours, enseignants et formateurs au plus près des réalités de l'épreuve

L'essentiel pour votre épreuve

- Résoudre un problème
- Résoudre des exercices
- Analyse des supports d'enseignement

Admis, la collection la + complète



Le Tout-en-un pour une préparation complète

Les Entraînements pour se mettre en condition

Les Fiches pour aller à l'essentiel

Un site dédié aux concours : www.vuibert.fr

ISBN : 978-2-311-20735-4

Vuibert N°1 DES CONCOURS