

Concours
Professeur des écoles

CRPE
2021

4^e édition

Mathématiques

Toute la discipline en un seul volume

Le manuel complet pour réussir l'écrit

- Méthodologie détaillée
- Autoévaluations
- Tous les savoirs disciplinaires et didactiques associés
- 500 QCM et exercices d'application
- 150 entraînements types concours
- Annales 2019 corrigées

**OFFERT
en ligne**

• Annales 2020

M. Loison (dir.)
F. Bianco, V. Bouquillon,
J.-R. Delplace

Vuibert N°1
DES CONCOURS

Concours
Professeur des écoles

4^e édition

Mathématiques

Le manuel complet pour réussir l'écrit

Ouvrage dirigé par **Marc Loison**

*Docteur en histoire de l'éducation et sciences de l'éducation,
Maître de conférences honoraire en histoire contemporaine de l'université d'Artois,
Ancien conseiller pédagogique chargé de mission académique pour l'éducation prioritaire*

Franky Bianco

*Conseiller pédagogique EPS et généraliste en circonscription primaire,
membre du jury académique CRPE et membre du groupe départemental Maths 62*

Valérie Bouquillon

*Conseillère pédagogique départementale en maternelle, inspection académique
du Pas-de-Calais, et membre du jury académique CRPE*

Jean-Robert Delplace

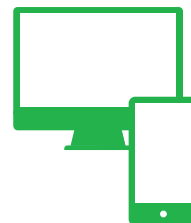
*Professeur honoraire en ESPE, agrégé de mathématiques,
titulaire d'un master 2 en didactique des mathématiques*

Vuibert

OFFERT pour réussir votre CRPE

Téléchargez :

- un sujet corrigé de la session 2020 pour vous mettre dans les conditions de l'épreuve ;
- les orientations ministérielles de 2018 concernant le renforcement de la maîtrise du calcul et de la résolution des problèmes ;
- les repères annuels de progression en mathématiques.



Adresse : www.vuibert.fr/site/208825

ISBN : 978-2-311-20882-5

Conception de la couverture : Delphine d'Inguibert et Valérie Goussot

Réalisation de la couverture : Les PAOistes

Conception de l'intérieur : Bleu T

Composition : Emili Lorie



La loi du 11 mars 1957 n'autorisant aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Le « photocopillage », c'est l'usage abusif et collectif de la photocopie sans autorisation des auteurs et des éditeurs. Largement répandu dans les établissements d'enseignement, le « photocopillage » menace l'avenir du livre, car il met en danger son équilibre économique. Il prive les auteurs d'une juste rémunération. En dehors de l'usage privé du copiste, toute reproduction totale ou partielle de cet ouvrage est interdite. Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur.

S'adresser au Centre français d'exploitation du droit de copie : 20, rue des Grands-Augustins, F-75006 Paris. Tél. : 01 44 07 47 70

© Vuibert – août 2020 – 5, allée de la 2^e DB – 75015 Paris

Site Internet : <http://www.vuibert.fr>

Avant-propos

La maîtrise des savoirs enseignés et une solide culture générale sont la condition nécessaire de l'enseignement. Elles permettent aux professeurs des écoles d'exercer **la polyvalence propre à leur métier** et d'avoir une vision globale des apprentissages, en favorisant la cohérence, la convergence et la continuité des enseignements. C'est la raison pour laquelle on attend du futur professeur des écoles que vous souhaitez devenir qu'il maîtrise parfaitement les savoirs disciplinaires et leur didactique ainsi que la langue française dans le cadre de son enseignement. Ce sont ces deux objectifs que le présent ouvrage s'est fixés.

Dans la continuité de ces objectifs clairement affichés dans le référentiel de compétences des professeurs des écoles, je souhaiterais attirer votre attention sur quelques points majeurs à respecter dans le cadre de la préparation de l'épreuve d'admissibilité de mathématiques du CRPE que ce manuel aborde en détail.

Insistons tout d'abord sur le fait que **la maîtrise des savoirs disciplinaires et leur didactique** dans chacun des domaines mathématiques (nombres, calculs, géométrie, grandeurs et mesures, organisation et gestion des données) **est une compétence essentielle pour tout professeur**. On enseigne bien ce que l'on connaît bien !

La première partie de l'épreuve, constituée d'un problème portant sur un ou plusieurs domaines des programmes de l'école ou du collège, ou sur des éléments du socle commun de connaissances, de compétences et de culture, permet d'apprécier particulièrement la capacité du candidat à **rechercher, extraire et organiser l'information utile**. La seconde partie, composée d'exercices indépendants complémentaires à la première partie, permet de **vérifier les connaissances et les compétences** (analyse d'erreurs-types, formulation d'hypothèses) du candidat.

Ces deux parties sont certes exigeantes mais elles restent à **la portée de tous les candidats** quelle que soit leur formation antérieure. Il suffit de bien gérer ses acquis, de les réactualiser et, bien sûr, de s'astreindre à une préparation rigoureuse. Elles ne portent généralement que sur des connaissances de base et tout s'apprend. Même si on pense avoir les connaissances fondamentales nécessaires, il est important de vérifier qu'elles sont bien mémorisées. Pour ce faire, les nombreux exercices et corrigés proposés dans cet ouvrage devraient être utiles aux candidats qui n'ont pas eu l'occasion de faire des mathématiques depuis plusieurs années.

Dans la troisième et dernière partie de l'épreuve, le futur professeur des écoles ne doit pas hésiter à porter un jugement argumenté sur les propositions didactiques faites, montrant ainsi **sa capacité d'analyse et sa faculté à se projeter dans le quotidien de la classe**. Pour être capable d'effectuer une analyse didactique réfléchie et argumentée, de faire preuve de bon sens et de proposer des démarches et situations pédagogiques adaptées au niveau et besoins des élèves, on mesure ici toute l'importance de s'appuyer sur les stages effectués dans les classes dans le cadre de la première année de formation MEEF, mais aussi de connaître parfaitement **les programmes de l'école primaire et le socle commun de compétences, de connaissances et de culture**.

Marc Loison

maître de conférences honoraire, docteur en histoire de l'éducation
et sciences de l'éducation, directeur de l'ouvrage

Sommaire

Comment aborder le CRPE	8
Méthodologie de l'épreuve	14
Les questions tombées au CRPE, session 2019	22

PARTIE 1 Nombres et calculs

1. Les différents types de nombres

SAVOIRS DISCIPLINAIRES 24

1. Nombres entiers naturels 26
2. Nombres entiers relatifs 27
3. Nombres rationnels 27
4. Nombres décimaux 28
5. Nombres irrationnels 28
6. Représentations des ensembles de nombres 29
7. Une autre écriture des nombres 30
8. Écriture scientifique d'un nombre 32

SAVOIRS ET PRATIQUES DIDACTIQUES 35

1. Construction du nombre 37
2. Manipulations et construction du nombre 41
3. Construction du concept de nombre à l'école maternelle 42
4. Comptines numériques 43
5. Construction du nombre à l'école maternelle 44
6. Entiers et décimaux : contradictions et utilité 45
7. Introduction des nombres décimaux à l'école primaire 47
8. Nombres décimaux et fractions décimales 48

ENTRAINEMENT À L'ÉPREUVE 52

2. Numération de position

SAVOIRS DISCIPLINAIRES 63

1. Généralités 66
2. Systèmes de numérations à base 67

SAVOIRS ET PRATIQUES DIDACTIQUES 76

1. Le zéro et les systèmes de numération de position 78
2. Le passage à la dizaine au CP 79
3. La construction de la numération de position 81
4. La numération de position et les difficultés des élèves 82

5. La base 60 : exemples de progression et d'exercices 83

ENTRAINEMENT À L'ÉPREUVE 86

3. Nombres et opérations

SAVOIRS DISCIPLINAIRES 101

1. L'addition, vocabulaire et définitions 103
2. La soustraction 104
3. La multiplication 105
4. La division 108
5. Opérations et calcul algébrique 111

SAVOIRS ET PRATIQUES DIDACTIQUES 115

1. Les opérations à l'école maternelle 117
2. Aspect « objet » ou « outil » des opérations 117
3. Classification des problèmes additifs 118
4. Addition et soustraction à l'école élémentaire 121
5. Techniques opératoires de la soustraction 122
6. Typologie des problèmes multiplicatifs 124
7. La multiplication, progressivité des apprentissages 125
8. Situations modélisées par une division 129
9. Propriétés en jeu dans la technique de la multiplication 130
10. La division, progressivité des apprentissages 131
11. Recommandations et points de vigilance 137

ENTRAINEMENT À L'ÉPREUVE 142

4. Arithmétique

SAVOIRS DISCIPLINAIRES 160

1. Multiples et diviseurs 163
2. Nombres premiers 165
3. PGCD et PPCM de deux nombres entiers 167
4. Division euclidienne 168

SAVOIRS ET PRATIQUES DIDACTIQUES	172	3. Situation-jeux pour jouer avec les nombres entiers naturels	174
1. Les compétences arithmétiques à l'école primaire	173		
2. Multiple ou non ?	173	ENTRAINEMENT À L'ÉPREUVE	176

PARTIE 2 Espace et géométrie

5. Éléments de base de la géométrie plane euclidienne

SAVOIRS DISCIPLINAIRES 190

1. Plan et droites du plan	192
2. Positions relatives de deux droites du plan	193
3. Notion de longueur et de distance	196
4. Repérage d'un point	199

SAVOIRS ET PRATIQUES DIDACTIQUES 205

1. Les trois types de géométrie de C. Houdement et A. Kuzniak	206
2. Géométrie plane en maternelle : la topologie	207
3. Utilisation des tangrams de l'école maternelle au cycle 3	208
4. Utilisation du quadrillage de la maternelle au cycle 3	208
5. Angle et perpendicularité	209
6. Parallélisme	210

ENTRAINEMENT À L'ÉPREUVE 214

6. Angles

SAVOIRS DISCIPLINAIRES 222

1. Définition	224
2. Classification des angles	224
3. Mesure d'un angle	225
4. Positions possibles de deux angles	225
5. Droites sécantes, droites parallèles et angles	226
6. Angles et triangles	227
7. Notion de trigonométrie	228

SAVOIRS ET PRATIQUES DIDACTIQUES 232

1. Les formes à l'école maternelle et au cycle 2	234
2. Les angles au cycle 3	234
3. Progression possible (étapes incontournables)	235

ENTRAINEMENT À L'ÉPREUVE 241

7. Polygones

SAVOIRS DISCIPLINAIRES 251

1. Polygones	253
--------------	-----

2. Trapèzes	254
3. Parallélogrammes	255
4. Triangles	259

SAVOIRS ET PRATIQUES DIDACTIQUES 267

1. Niveaux de Van Hiele	269
2. Connaissances spatiales, connaissances géométriques	270
3. Les différentes façons de voir une figure plane par un élève	271
4. Instruments de la géométrie plane	272
5. Outils et supports didactiques au CP-CE1	273
6. Les polygones au cycle 3	274
7. Aborder les polygones en classe par le biais des TICE	279

ENTRAINEMENT À L'ÉPREUVE 282

8. Grands théorèmes

SAVOIRS DISCIPLINAIRES 294

1. Théorème de Pythagore	296
2. Théorème de Thalès	296

SAVOIRS ET PRATIQUES DIDACTIQUES 300

ENTRAINEMENT À L'ÉPREUVE 301

9. Transformations du plan

SAVOIRS DISCIPLINAIRES 306

1. Translation	308
2. Symétrie axiale	309
3. Symétrie centrale	309
4. Rotation	310
5. Homothétie	311

SAVOIRS ET PRATIQUES DIDACTIQUES 314

1. Objectifs d'apprentissage aux cycles 2 et 3	316
2. La symétrie au cycle 3	316
3. Apprentissage de la symétrie et variables didactiques	322
4. Symétrie axiale et outil référent	322
5. Principales difficultés	323

ENTRAINEMENT À L'ÉPREUVE 325

10. Solides

SAVOIRS DISCIPLINAIRES	339
1. Polyèdres	341
2. Polyèdres réguliers	342
3. Différents types de polyèdres	344
4. Solides non polyèdres	345
5. Patron d'un solide	346
6. Sections planes de solides	347
7. Droites et plans de l'espace	348

8. Repérage sur/dans un solide	349
SAVOIRS ET PRATIQUES DIDACTIQUES	354
1. Les solides de la maternelle au cycle 2	356
2. Géométrie plane et géométrie spatiale	358
3. Les solides au cycle 3	360
4. Progressivité des apprentissages au cycle 3	360
5. Outils référents	364
ENTRAINEMENT À L'ÉPREUVE	366

PARTIE 3 Grandeurs et mesures

11. Grandeurs, grandeurs de la géométrie et formules de mesures

SAVOIRS DISCIPLINAIRES	376
1. Définitions	378
2. Grandeurs usuelles	379
3. Formules usuelles	381

SAVOIRS ET PRATIQUES DIDACTIQUES	385
---	-----

1. Grandeurs et mesures, quelles différences ?	387
2. Grandeurs et mesures, quels liens ?	387
3. Idées générales pour une progression sur les grandeurs	388
4. Progressivité dans les apprentissages	391
5. Le temps	393

ENTRAINEMENT À L'ÉPREUVE	398
---------------------------------	-----

PARTIE 4 Organisation et gestion de données, fonctions

12. Proportionnalité

SAVOIRS DISCIPLINAIRES	408
1. Définitions	410
2. Propriétés des suites proportionnelles	412

SAVOIRS ET PRATIQUES DIDACTIQUES	420
1. Précautions et conseils	421
2. La proportionnalité au cycle 3	421

ENTRAINEMENT À L'ÉPREUVE	426
---------------------------------	-----

13. Applications usuelles de la proportionnalité

SAVOIRS DISCIPLINAIRES	435
1. Pourcentages	438
2. Échelles	441
3. Vitesse, distance et temps	442

SAVOIRS ET PRATIQUES DIDACTIQUES	445
1. Précautions et conseils	446
2. Progressivité des apprentissages	446
3. Proportionnalité et moyennes	446
4. Proportionnalité et échelles	447
5. Proportionnalité et pourcentages	450
6. Difficultés et remédiation	452

ENTRAINEMENT À L'ÉPREUVE	455
---------------------------------	-----

14. Fonctions

SAVOIRS DISCIPLINAIRES	469
1. Définitions et notations	471
2. Fonctions usuelles	471
3. Représentation graphique d'une fonction	472

ENTRAINEMENT À L'ÉPREUVE	476
---------------------------------	-----

15. Statistiques

SAVOIRS DISCIPLINAIRES	485
1. Vocabulaire	487
2. Éléments caractéristiques d'une série statistique	490

ENTRAINEMENT À L'ÉPREUVE	496
---------------------------------	-----

16. Probabilités

SAVOIRS DISCIPLINAIRES	502
1. Langage des probabilités	505
2. Calcul des probabilités	508
3. Cas particulier	509

ENTRAINEMENT À L'ÉPREUVE	513
---------------------------------	-----

PARTIE 5 Problèmes

17. Problèmes résolus par l'arithmétique ou par l'algèbre

SAVOIRS DISCIPLINAIRES

	522
1. Résolution par la méthode algébrique	524
2. Résolution par une méthode arithmétique	526

SAVOIRS ET PRATIQUES DIDACTIQUES

1. Notion de problème	531
2. Typologie des problèmes	532
3. Consignes à éviter avec les élèves	534

ENTRAÎNEMENT À L'ÉPREUVE

536

PARTIE 6 Annales corrigées

18. Sujet CRPE 2019 groupement 1 : cycles 1 et 3

548

Usage du nombre en maternelle
Calcul en ligne (nombres décimaux)
et proportionnalité au CM

OFFERT en ligne :

- le sujet corrigé CRPE 2020 groupement 3 ;
- les orientations ministérielles de 2018 concernant le renforcement de la maîtrise du calcul et de la résolution des problèmes ;
- les repères annuels de progression en mathématiques.

sur www.Yuibert.fr/site/208825

Les **10 outils clés** pour maîtriser les connaissances indispensables le jour de l'épreuve :

1. La trigonométrie dans un triangle rectangle (p. 228)
2. Les quadrilatères particuliers (p. 256)
3. Le théorème de Pythagore (p. 296)
4. Le théorème de Thalès (p. 296)
5. Les périmètres (p. 381), aires (p. 381) et volumes (p. 382)
6. La correspondance entre un volume et une capacité (p. 383)
7. La propriété de linéarité (p. 412), la règle de trois et le tableau de proportionnalité (p. 414)
8. Les pourcentages (p. 438)
9. Les échelles (p. 441) et les vitesses (p. 442)
10. La lecture d'un graphique (p. 472)

Comment aborder le CRPE

Vous avez choisi de devenir professeur des écoles. Vous vous interrogez sans doute sur les études à suivre, les modalités de recrutement, le contenu, le calendrier des épreuves et peut-être les perspectives de carrière. Autant de questions auxquelles le présent ouvrage va tenter de répondre rapidement en préambule, avant d'aborder la préparation méthodologique de l'épreuve écrite de mathématiques du concours de recrutement des professeurs des écoles (CRPE).

1. Quelques éléments sur le CRPE

A. Conditions de diplômes requises

Pour accéder au métier de professeur des écoles, il faut avoir obtenu un master et satisfaire aux épreuves du concours de recrutement des professeurs des écoles (CRPE).

Le CRPE, dont les épreuves comportent désormais une dimension professionnelle importante, s'adresse principalement aux étudiants qui préparent un master « métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation » (MEEF) au sein d'un institut national supérieur du professorat et de l'éducation (INSPE). Il se déroule en totalité (admissibilité et admission) à la fin de la première année de master. Le CRPE est également ouvert aux étudiants inscrits en master 2 et aux personnes titulaires d'un diplôme de master ou d'un grade équivalent.

Par grade équivalent, il faut entendre l'un des trois cas de figure suivants :

- un titre ou diplôme sanctionnant un cycle d'études postsecondaires d'au moins cinq années, acquis en France ou dans un autre État, et attesté par l'autorité compétente de l'État considéré ;
- un diplôme conférant le grade de master, conformément aux dispositions de l'article D612-34 du Code de l'éducation (DESS, DEA, diplôme d'ingénieur) ;
- un titre ou diplôme classé au niveau 1 du répertoire national des certifications professionnelles (RNCP).

Vous êtes dispensé de diplôme si vous êtes mère ou père d'au moins trois enfants ou sportif de haut niveau. Les étudiants admis au CRPE seront, au cours de leur seconde année de master, rémunérés à plein temps en tant que fonctionnaires stagiaires et effectueront un service d'enseignement à mi-temps.

B. Qualifications requises

En France, les personnels d'enseignement et d'éducation font partie de la fonction publique d'État. Ils sont recrutés sur concours du ministère de l'Éducation nationale. Pour postuler au CRPE, vous devez vous inscrire lors de la campagne menée par le ministère de l'Éducation nationale, sous réserve, rappelons-le, d'être inscrit en master 1 ou d'être titulaire d'un master complet.

Par ailleurs, pour être candidat au CRPE, vous devrez obligatoirement justifier :

- d'une attestation certifiant que vous avez réalisé un parcours d'au moins 50 mètres dans une piscine placée sous la responsabilité d'un service public, établie soit par un service universitaire (STAPS, SCAPS), soit par une autorité d'un service public territorial des activités physiques et sportives (piscine municipale), soit par une autre autorité publique habilitée à assurer une formation dans le domaine de la natation ;
- d'une attestation certifiant votre qualification en secourisme reconnue de niveau au moins égal à celui de l'unité d'enseignement « prévention et secours civiques de niveau I » (PSC1) par le ministère de l'Intérieur (Sécurité civile). Les candidats détenteurs de l'ancienne formation aux premiers secours (AFPS) n'ont pas à justifier du PSC1.

Les dispenses de diplôme consenties aux mères et aux pères d'au moins trois enfants et aux sportifs de haut niveau ne s'étendent pas aux qualifications en natation et en secourisme exigées.

C. Contenu des épreuves

L'arrêté du 19 avril 2013 paru au *Journal officiel* du 27 avril 2013 fixe les modalités d'organisation du concours externe, du concours externe spécial, du second concours interne, du second concours interne spécial et du troisième concours de recrutement de professeurs des écoles.

Deux grandes séries d'épreuves sont définies par référence aux programmes de l'école primaire (arrêté du 13 mai 2015, art. 4), mais aussi par référence aux compétences professionnelles des maîtres (annexe de l'arrêté du 1^{er} juillet 2013 paru au *Journal officiel* du 18 juillet 2013). Attention, initialement les épreuves du CRPE étaient définies par référence aux programmes de l'école primaire de 2008. Ces derniers ont été modifiés en 2015 et consolidés en 2018. On pourra donc se reporter, pour information, au *Bulletin officiel* du 19 juin 2008. On veillera surtout à lire très attentivement le *Bulletin officiel* du 26 mars 2015 (pour l'école maternelle) et ceux du 26 novembre 2015 et du 26 juillet 2018 (pour l'école élémentaire). Les éléments de programme font désormais l'objet de repères annuels de progression déclinés dans le *Bulletin officiel* n° 22 du 29 mai 2019, dont il faudra impérativement prendre connaissance.

Les épreuves du CRPE

Deux épreuves écrites d'admissibilité		
Cadre de référence : Programmes de l'école primaire		
Niveau attendu : Maîtrise des programmes du collège, connaissance approfondie des cycles d'enseignement de l'école primaire et des éléments du socle commun de connaissances, de compétences et de culture et des contextes de l'école maternelle et de l'école élémentaire		
Épreuve écrite de français		
Barème : 40 points- Durée : 4 heures		
1. Question sur un ou plusieurs textes littéraires ou documentaires	11 points	Note globale ≤ 10 éliminatoire Correction syntaxique et qualité écrite de la production du candidat notées sur 5 points
2. Connaissance de la langue : - grammaire, orthographe, lexique et système phonologique - questions portant sur des connaissances ponctuelles - analyse d'erreurs-types dans des productions d'élèves	11 points	
3. Analyse d'un dossier composé d'un ou plusieurs supports d'enseignement du français (manuels, documents pédagogiques) et de productions d'élèves	13 points	
Épreuve écrite de mathématiques		
Barème : 40 points- Durée : 4 heures		
1. Problème portant sur un ou plusieurs domaines des programmes de l'école ou du collège ou sur des éléments du socle commun de connaissances	13 points	Note globale ≤ 10 éliminatoire 5 points au maximum pour la correction syntaxique et la qualité écrite peuvent être retirés.
2. Exercices indépendants complémentaires à la première partie : QCM, réponses construites, analyse d'erreurs-types dans des productions d'élèves	13 points	
3. Analyse d'un dossier composé d'un ou plusieurs supports d'enseignement des mathématiques (manuels, documents pédagogiques) et de productions d'élèves	14 points	

Deux épreuves orales d'admission		
Entretien avec un jury afin d'évaluer la capacité du candidat à s'exprimer avec clarté et précision et à réfléchir aux enjeux scientifiques, didactiques, épistémologiques, culturels et sociaux que revêt l'enseignement des champs disciplinaires du concours, et des rapports qu'ils entretiennent entre eux		
Épreuve de mise en situation professionnelle dans un domaine au choix du candidat Barème : 60 points – Durée : 1 heure		
Domaines d'enseignement : sciences et technologie, histoire, géographie, histoire des arts, arts visuels, éducation musicale, langue vivante étrangère (allemand, anglais, espagnol ou italien), enseignement moral et civique (domaine à choisir au moment de l'inscription)		
1. Remise préalable au jury d'un dossier de dix pages au plus, annexes comprises, portant sur le sujet choisi : format papier accompagné le cas échéant d'un support numérisé (clé USB)		
2. Présentation du dossier par le candidat : - synthèse des fondements scientifiques relatifs au sujet retenu - description d'une séquence pédagogique relative au sujet et accompagnée de documents	20 points	20 minutes
3. Entretien avec le jury : - aspects scientifiques, pédagogiques et didactiques du dossier - approfondissement dans le domaine considéré, notamment sur les différentes théories du développement de l'enfant	40 points	40 minutes

Entretien à partir d'un dossier Barème : 100 points – Durée : 1 h 15 – Préparation : 3 heures		
Objectifs de cet entretien : Évaluer les compétences du candidat pour l'enseignement de l'éducation physique et sportive ainsi que sa connaissance de la place de cet enseignement dans l'éducation à la santé à l'école primaire. Apprécier les connaissances du candidat sur le système éducatif français et plus particulièrement sur l'école primaire (organisation, valeurs, objectifs, histoire et enjeux contemporains). Apprécier la capacité du candidat à se situer comme futur agent du service public (éthique, sens des responsabilités, engagement professionnel) et comme futur professeur des écoles dans la communauté éducative		
1. Éducation physique et sportive Sujet proposé par le jury et relatif à une activité physique, sportive et artistique praticable à l'école élémentaire ou au domaine des activités physiques et expériences corporelles à l'école maternelle	40 points	Exposé : 10 minutes Entretien: 20 minutes
2. Exposé à partir d'un dossier de 5 pages maximum fourni par le jury et portant sur une situation professionnelle inscrite dans le fonctionnement de l'école primaire. L'exposé vise à attester de la part du candidat de compétences professionnelles en cours d'acquisition. Entretien portant sur les acquis et besoins des élèves, sur la diversité des conditions d'exercice du métier et sur les valeurs de la République	60 points Exposé : 20 points Entretien : 40 points	Exposé : 15 minutes Entretien: 30 minutes

2. Le métier de professeur des écoles

A. Compétences générales exigées

L'arrêté du 1^{er} juillet 2013 a clairement défini les compétences que tous les professeurs et personnels d'éducation doivent maîtriser. Elles sont au nombre de quatorze :

1. Faire partager les valeurs de la République.
2. Inscrire son action dans le cadre des principes fondamentaux du système éducatif et dans le cadre réglementaire de l'école.
3. Connaître les élèves et les processus d'apprentissage.
4. Prendre en compte la diversité des élèves.
5. Accompagner les élèves dans leur parcours de formation.
6. Agir en éducateur responsable et selon des principes éthiques.
7. Maîtriser la langue française à des fins de communication.
8. Utiliser une langue vivante étrangère dans les situations exigées par son métier.
9. Intégrer les éléments de la culture numérique nécessaires à l'exercice de son métier.
10. Coopérer au sein d'une équipe.
11. Contribuer à l'action de la communauté éducative.
12. Coopérer avec les parents d'élèves.
13. Coopérer avec les partenaires de l'école.
14. S'engager dans une démarche individuelle et collective de développement professionnel.

Par ailleurs, outre ces compétences communes aux professeurs et personnels d'éducation, ce même arrêté précise que la maîtrise des savoirs enseignés et une solide culture générale sont la condition nécessaire de l'enseignement. Elles permettent au professeur des écoles d'exercer la polyvalence propre à son métier et d'avoir une vision globale des apprentissages, en favorisant la cohérence, la convergence et la continuité des enseignements. D'autre part, le professeur des écoles est un praticien expert des apprentissages. Il doit donc, en plus des quatorze compétences précitées :

1. Maîtriser les savoirs disciplinaires et leur didactique.
2. Maîtriser la langue française dans le cadre de son enseignement.
3. Construire, mettre en œuvre et animer des situations d'enseignement et d'apprentissage prenant en compte la diversité des élèves.
4. Organiser et assurer un mode de fonctionnement du groupe favorisant l'apprentissage et la socialisation des élèves.
5. Évaluer les progrès et les acquisitions des élèves.

B. Des outils Vuibert au service de la formation professionnelle

Afin d'aider dans leurs pratiques quotidiennes de classe les professeurs des écoles débutants, les éditions Vuibert mettent à leur disposition, dans la collection « Métier enseignant », une série d'outils didactiques et pédagogiques. Ces derniers intitulés *Je prépare ma classe de...* couvrent la totalité des cours de l'école primaire et apportent des réponses concrètes en termes de programmations, séquences ou séances d'apprentissage. Dans chaque champ disciplinaire ou domaine d'activités sont proposés quelques exemples de fiches de préparation détaillées. Celles-ci articulent objectifs notionnels et compétences visées, conditions préalables et organisation matérielle de la classe, description du déroulement de l'activité étape par étape, résultats attendus, évaluation et conseils, prolongement ou ouverture transdisciplinaire.

C. Spécialisations et perspectives de carrière

■ Par mutation

Les mutations sont annuelles dans le cadre du mouvement national des personnels.

■ Par détachement

Vous pouvez être détaché dans un autre ministère, dans une collectivité territoriale, dans un organisme de recherche...

■ Par changement de fonction

Un professeur des écoles peut devenir maître de l'enseignement spécialisé, psychologue scolaire, maître formateur, directeur d'école.

■ Par changement de corps

Vous pouvez passer les concours pour accéder à la fonction d'inspecteur de l'Éducation nationale, de professeur du second degré (concours interne pour les professeurs des écoles titulaires), d'enseignant-chercheur (possibilité de mettre à profit le master Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation pour accéder aux études conduisant au doctorat).

Voilà donc à grands traits la carrière que vous embrasserez si vous franchissez avec succès les différentes étapes du concours de recrutement de professeurs des écoles. Pour vous y aider, les éditions Vuibert mettent à votre disposition une nouvelle série d'outils méthodologiques en parfaite conformité avec les épreuves d'admissibilité et d'admission au CRPE.

Le présent manuel vous permettra, par le biais de points disciplinaires et didactiques portant sur les nombres et les calculs, l'espace et la géométrie, les grandeurs et les mesures, l'organisation et la gestion de données, les fonctions, les problèmes, tous complétés par des autoévaluations, des exercices d'application et d'entraînement, de vous préparer efficacement à l'épreuve d'admissibilité de mathématiques. C'est le souhait que les auteurs de cet ouvrage et moi-même formulons. Par ailleurs, la mise en œuvre éditoriale de cet ouvrage n'aurait pas été possible sans l'aide précieuse de Kévin Lacroix, que je tiens ici personnellement à remercier.

Marc Loison,
Maitre de conférences honoraire
de l'université d'Artois,
directeur de l'ouvrage

Méthodologie de l'épreuve

1. Résolution de problèmes

A. Les différents types de problèmes

Il n'y a pas de méthodologie de résolution de problèmes, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de méthode permettant de résoudre à coup sûr n'importe quel problème donné de mathématiques. En effet, d'une part, les problèmes de mathématiques peuvent se présenter sous des formes très différentes – énoncé comprenant du texte et des nombres, énoncé sans nombre, texte accompagné d'un dessin sur lequel il est possible de prélever des informations, dessin de géométrie codé, etc. – d'autre part, les méthodes applicables à un type de problème ne sont pas nécessairement identiques à celles à appliquer à une autre catégorie de problèmes.

Ainsi, les quatre problèmes suivants ne sont pas traités de la même façon.

Problème ① Louis se rend de la ville A à la ville B, distantes de 60 km, à la vitesse moyenne de 80 km/h, puis il revient à la ville A par la même route, à la vitesse moyenne de 100 km/h.

Déterminer sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours.

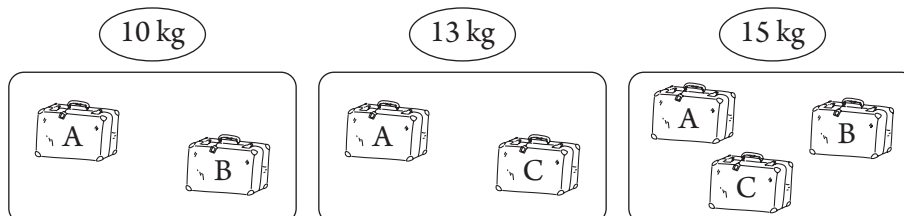
Problème ② 4 enfants sont côte à côte dans une classe.

On sait que :

- Charlie est plus lourd que Macha ;
- François est le plus lourd ;
- Macha est plus lourde que Louis.

Ranger ces 4 enfants du plus léger au plus lourd.

Problème ③ Bien observer bien les trois dessins ci-dessous. Ils représentent des valises numérotées A, B et C. Ces valises sont placées dans de grands coffres.



Déterminer la masse de chacune de ces valises.

Problème ④ Dans une salle, il y a 18 sièges : des chaises et des trépiéds. Lou compte 66 pieds en tout. Combien y a-t-il de sièges de chaque sorte ?

Pour le problème ① : On effectue une recherche en appliquant la définition d'une vitesse moyenne, c'est-à-dire qu'on détermine la distance totale parcourue, ainsi que le temps total de parcours.

Distance totale parcourue : $60 \text{ km} + 60 \text{ km} = 120 \text{ km}$

Temps de parcours pour le trajet aller :

Distance, en km	80	60
Temps, en min	60	T_1

$$T_1 = \frac{60 \times 60}{80}, \text{ soit } T_1 = 45 \text{ min}$$

Temps de parcours trajet retour :

Distance, en km	100	60
Temps, en min	60	T_2

$$T_2 = \frac{60 \times 60}{100}, \text{ soit } T_2 = 36 \text{ min}$$

Le temps total de parcours est : $45 \text{ min} + 36 \text{ min} = 81 \text{ min}$

Finalement, $V = \frac{120}{81} \times 60 \approx 88,9 \text{ km/h}$.

Pour le problème ② : Il est possible d'utiliser une droite sur laquelle on place les enfants par ordre de poids croissant.

Louis	Macha	Charlie	François
-------	-------	---------	----------

Pour le problème ③ : Une simple comparaison des dessins deux à deux permet de trouver les réponses à la question posée.

Par comparaison du premier coffre et du dernier coffre, la masse de C est :

$$15 \text{ kg} - 10 \text{ kg} = 5 \text{ kg}.$$

Par comparaison des deux derniers coffres, la masse de B est :

$$15 \text{ kg} - 13 \text{ kg} = 2 \text{ kg}.$$

En regardant le premier coffre, la masse de A est :

$$10 \text{ kg} - 2 \text{ kg} = 8 \text{ kg}.$$

Pour le problème ④ : Il est possible de faire de nombreux types de raisonnement, parmi lesquels un raisonnement par fausse supposition.

On suppose qu'il n'y a que des chaises. Cela représente donc $18 \times 4 = 72$ pieds. Comme on ne compte que 66 pieds, il y a donc $72 - 66 = 6$ pieds en trop. Or, chaque fois qu'on remplace une chaise par un trépied, cela baisse le nombre de pieds de 1 unité. Il y a donc 6 trépieds, et par conséquent $18 - 6 = 12$ chaises.

A NOTER

Dans le premier problème, certaines connaissances du cours étaient nécessaires, sans lesquelles il est impossible de résoudre le problème, alors que, pour les deux autres problèmes, il suffit de posséder des techniques personnelles, supposant certaines connaissances et pratiques générales. Enfin, en ce qui concerne le dernier problème, la résolution nécessite de connaître un raisonnement appris en réalisant des exercices de la même famille que celui qui était proposé.

B. Recommandations d'ordre général

■ Dans le cas où le problème se présente sous la forme d'un texte, il faut commencer par prendre le temps de bien lire l'énoncé, pour éviter de répondre à des questions qui ne sont pas posées, comme cela arrive régulièrement dans des copies de concours.

EXEMPLE

Il faut calculer la longueur d'un segment dans un problème de géométrie. Sans plus de précisions, cela sous-entend que l'on cherche la valeur exacte de cette longueur. Imaginons que la réponse attendue est $2\sqrt{2}$. Si l'on propose comme résultat le nombre 2,82, qui est la valeur approchée du résultat au centième près par défaut, la réponse est correcte, mais elle ne correspond pas à ce qui est attendu. L'accumulation de ces rédactions et recherches non demandées peut finir par faire perdre beaucoup de temps, surtout dans les parties didactiques.

■ À la fin de la lecture, il faut avoir une bonne représentation du problème posé et être capable de le redire sans soutien de l'énoncé, autrement dit, être capable de répondre à ce type de questions : « De quoi s'agit-il ? », « Quelles sont les données du problème ? », « Que dois-je chercher ? »

■ Il ne faut jamais chercher « dans sa tête » plus d'une minute environ, et si l'on n'a pas d'idée, il faut toujours se forcer à écrire, mais on ne le fait que si aucune idée ne vient.

■ Que peut-on écrire ?

■ D'abord, on écrit l'hypothèse, c'est-à-dire ce que l'on sait, et qui en général est écrit dans l'énoncé. L'hypothèse peut par exemple consister en des renseignements pris sur une figure de géométrie codée ou sur un schéma accompagnant un problème d'arithmétique.

■ On peut alors transformer cette hypothèse, c'est-à-dire l'écrire autrement, si l'on a des idées de transformation (car n'importe quelle transformation n'amènera pas nécessairement un cheminement vers la conclusion).

EXEMPLE

Si l'hypothèse met en jeu un triangle ABC isocèle en A, on peut toujours écrire $AB = AC$ ou $\widehat{B} = \widehat{C}$.

■ Pour écrire « autrement », il y a quelques pistes possibles :

- utiliser des résultats du cours (définitions, théorèmes, propriétés, etc.) ;
- utiliser des techniques de transformations vues dans d'autres exercices ;
- utiliser des renseignements donnés dans l'énoncé, ce qui revient souvent à utiliser les résultats de la (ou des) question(s) précédente(s).

■ On écrit la conclusion, et, de même, on peut éventuellement l'écrire autrement.

■ Il arrive que la méthode à utiliser soit sous-entendue dans l'énoncé, d'où l'importance de lire correctement la question.

EXEMPLE

Déduire que... signifie qu'il faut utiliser le résultat établi à la question précédente.

■ Dans les problèmes de géométrie, il est souvent demandé de réaliser une figure correcte à l'aide des instruments usuels (règle graduée ou non, compas, équerre). Il est très

utile de réaliser cette même figure à main levée sur une feuille de brouillon, ce qui prend peu de temps, et on peut coder cette figure à l'aide des données de l'énoncé puis des résultats successifs des différentes questions, ce qui permet d'avoir un regard global sur le problème et constitue une aide pour la recherche et le raisonnement.

■ Autrement dit

Dans un problème, il y a plusieurs possibilités :

- soit on perçoit directement la connaissance à utiliser ;

EXEMPLE

On peut utiliser le théorème de Pythagore pour calculer la longueur du troisième côté d'un triangle rectangle quand on en connaît la longueur des deux autres.

- soit on fait appel à une technique que l'on a déjà appliquée dans un problème du même type ;
- soit on n'a pas trop d'idées et on cherche des renseignements dans le problème lui-même.

■ Dans tous les cas

■ La connaissance parfaite des résultats du cours est indispensable pour chercher à résoudre des problèmes de mathématiques.

■ De même, il faut faire de nombreux exercices, afin d'acquérir et de retenir des techniques particulières.

■ Le jour du concours, il n'est plus temps de réfléchir à des méthodes ou d'inventer de nouvelles techniques. Il faut être capable de rédiger une partie des questions « au fil de la plume » directement sur la copie, réservant davantage de temps de recherche pour des questions plus délicates ou plus résistantes.

■ Enfin, « chercher » ne signifie pas « trouver immédiatement ». Lors de la recherche d'une question « résistante », on peut utiliser une méthode correcte mais qui n'aboutit pas. Cela ne signifie pas que l'on ne sait pas faire l'exercice, mais qu'il faut utiliser une autre méthode.

EXEMPLE

Considérons l'équation suivante :

$$(x + 7)(4x + 1) = (2x + 7)(x + 7)$$

Pour la résoudre, on peut procéder de la façon suivante.

On développe chacun des membres de l'équation.

$$4x^2 + x + 28x + 7 = 2x^2 + 14x + 7x + 49$$

$$4x^2 + 29x + 7 = 2x^2 + 21x + 49$$

$$4x^2 + 29x + 7 - 2x^2 - 21x - 49 = 0$$

$$2x^2 + 8x - 42 = 0$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

La résolution d'une équation du second degré n'étant pas au programme, cette méthode conduit à une impasse, et cependant, elle ne comporte aucune erreur.

Il faut donc trouver une autre méthode :

$$(x + 7)(4x + 1) = (2x + 7)(x + 7)$$

On transpose le deuxième membre dans le premier membre, puis on factorise l'expression obtenue :

$$(x + 7)(4x + 1) - (2x + 7)(x + 7) = 0$$

$$(x + 7)(4x + 1 - 2x - 7) = 0$$

$$(x + 7)(2x - 6) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un au moins de ses facteurs est nul, d'où :

$$x + 7 = 0 \text{ ou } 2x - 6 = 0$$

$$x = -7 \text{ ou } x = 3$$

Cette seconde méthode a donc permis d'aboutir.

2. Axiomes, conjectures et théorèmes

- Un **axiome** est une propriété que l'on admet, et que l'on ne peut pas démontrer.

EXEMPLE

Par deux points distincts, il passe une droite et une seule.

- Une **conjecture** est une propriété que l'on pense être vraie, dont on pense qu'il existe une démonstration, et qui n'a encore été ni démontrée, ni réfutée.

EXEMPLE

À partir des trois égalités $3 + 7 = 10$; $9 + 13 = 22$ et $1 + 17 = 18$, on peut énoncer que la somme de deux nombres impairs est un nombre pair. Cette assertion est une conjecture, car le fait de l'avoir vérifiée sur trois exemples ne prouve pas qu'elle soit toujours vraie.

- Un **théorème** est une propriété qui a été démontrée.

EXEMPLE

Reprenons l'exemple précédent.

Pour tout entier n et pour tout entier p , on a :

$$(2n + 1) + (2p + 1) = 2n + 2p + 2 = 2(n + p + 1).$$

Cette égalité démontre que la somme de deux nombres impairs est un nombre pair. Cet énoncé est alors un théorème.

3. Propriétés vraies ou fausses

- Quand une propriété est **vraie**, on la **démontre** en raisonnant sur un cas général (voir l'exemple précédent).
- Quand une propriété est **fausse**, on la réfute en donnant un **contre-exemple**, et un seul contre-exemple suffit.

EXEMPLE

« Si un nombre est divisible par 4 et par 6, alors il est divisible par 24. »

Cette propriété est fausse. Ainsi, 12 est divisible par 4, 12 est divisible par 6, mais 12 n'est pas divisible par 24. Ce contre-exemple suffit pour justifier que la propriété est fausse.

4. Implications, propriétés du type « Si ..., alors ... »

- Considérons deux propositions P1 et P2 et l'**implication** I_1 suivante :
Si (P1 est vraie), alors (P2) est vraie.

EXEMPLE

Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

- On appelle **réciproque** de I_1 , l'implication suivante :
Si « P2 est vraie », alors « P1 est vraie ».

EXEMPLE

Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ABC est un triangle rectangle en A.

- Quand une implication est vraie, sa réciproque n'est pas nécessairement vraie. Dans l'exemple précédent, l'implication et sa réciproque sont vraies. Si les deux sont vraies, alors on dit que l'on a une équivalence que l'on peut énoncer sous la forme « (P1 est vraie) si et seulement si (P2 est vraie) ».

EXEMPLES

- ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
- Si $x = 3$, alors $x^2 = 9$. Cette implication est vraie.

Considérons sa réciproque :

Si $x^2 = 9$, alors $x = 3$. Cette implication est fausse, puisque l'on peut aussi avoir $x = -3$.

5. Quelques conseils de rédaction

- La meilleure rédaction consiste souvent à reprendre les termes de l'énoncé.

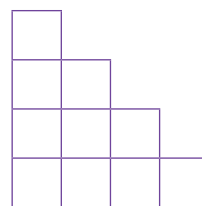
EXEMPLE

En empilant dix cubes identiques comme ci-contre, on construit un escalier de hauteur $h = 4$.

1. Indiquer le nombre de cubes nécessaires pour réaliser respectivement des escaliers de hauteur 5 et de hauteur 9.

2. Y a-t-il proportionnalité entre la hauteur des escaliers et le nombre de cubes nécessaires pour les construire ?

Justifier la réponse.



1. Nombre de cubes pour réaliser :

- un escalier de hauteur 5 : $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$;
- un escalier de hauteur 6 : $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$.

2.

Hauteur	5	6
Nombre de cubes	15	21

$\frac{15}{5} = 3$ et $\frac{21}{6} = 3,5$; $\frac{15}{5} \neq \frac{21}{6}$ donc, il n'y a pas proportionnalité entre la hauteur des escaliers et le nombre de cubes nécessaires pour les construire.

► Attention à bien conclure chacune des questions. Il y a d'une part un traitement mathématique, et d'autre part le résultat attendu.

EXEMPLE

On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 4$ cm et $AC = 5$ cm.
Calculer la longueur du troisième côté de ce triangle. On donnera le résultat au millimètre près par défaut.

Traitement mathématique :

Le triangle est rectangle en A, donc d'après théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2, \text{ soit } BC^2 = 16 + 25, \text{ c'est-à-dire } BC^2 = 41.$$

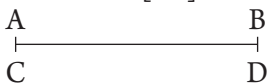
$$\text{Donc } BC = \sqrt{41} ; BC \approx 6,403.$$

Réponse : $BC \approx 6,4$ cm.

► En géométrie, il faut utiliser les notations de l'énoncé.

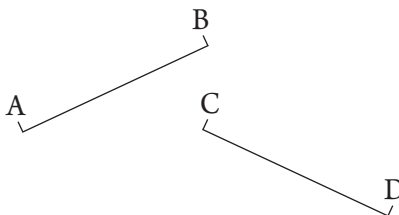
Ainsi, il y a souvent une confusion entre les notations AB et [AB].

[AB] = [CD] correspond à ce dessin :



Car l'écriture $[AB] = [CD]$ se lit « le segment [AB] est égal au segment [CD] ». Or, un segment est un ensemble de points, et donc cela signifie que les deux segments sont confondus.

Alors que l'écriture $AB = CD$ signifie que les deux longueurs AB et CD sont égales. D'où le dessin correspondant :



► Justifiez soigneusement chacune de vos réponses, sauf si l'énoncé vous précise le contraire.

EXEMPLE

Dans le sujet de Nouvelle-Calédonie de novembre 2005, on lit :

« Indiquer (sans justifier) pour chaque cas, la transformation telle que :

a) le triangle AIC a pour image le triangle AIB.

b) le triangle ABI a pour image le triangle EAF. »

Vous répondez donc sans aucune justification ainsi que l'énoncé le précise.

En revanche, dans le sujet suivant :

« On considère une pyramide SEFG.

Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs de [SE], [SG], [GF], [EF] et [EG].

Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ? »

Alors, la nature du quadrilatère doit être justifiée à l'aide de théorèmes du cours.

6. Didactique

Le mot *didactique* a plusieurs sens.

- Comme adjectif, il signifie « qui a pour objet d'instruire ».

EXEMPLE

On parle d'un ouvrage didactique, d'un matériel didactique.

- Comme substantif, il peut signifier tout à la fois « l'art d'enseigner », « la pédagogie » ou « l'ensemble des procédés d'enseignement ».
- Enfin, la didactique d'une discipline étudie les processus de transmission et d'acquisition des différents contenus de cette discipline, particulièrement en milieu scolaire et universitaire et se propose de décrire et d'expliquer les phénomènes relatifs aux rapports entre son enseignement et son apprentissage. Dans cette définition, on dira par exemple la didactique des mathématiques. C'est en ce sens que la didactique diffère de la pédagogie.

■ Conseils pour les sujets de didactique

- Prendre le temps de bien lire le sujet.
 - S'il s'agit d'analyse de travaux d'élèves, résoudre le (ou les) exercice(s) proposé(s), ce qui permet de déceler :
 - les difficultés inhérentes à chacun des exercices ;
 - les connaissances nécessaires pour réaliser ces exercices.
 - S'il s'agit d'analyse de manuels, chercher :
 - l'objectif principal de la séance proposée ;
 - les éventuels objectifs secondaires.
- Et replacer la séance dans un contexte plus général.

Les questions tombées au CRPE, session 2019

Nombres et calcul

- ▮ Caractériser un nombre décimal, connaître la partie décimale d'un nombre
- ▮ Valeur approchée d'un nombre, notion d'arrondi
- ▮ Notion de multiple, de diviseur
- ▮ Division euclidienne
- ▮ Résoudre une équation du 1^{er} degré ou du 2nd degré simple, ou une inéquation
- ▮ Développer le carré d'une somme $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Géométrie

- ▮ Construction de figures géométriques
 - ▮ Caractériser des triangles ou des quadrilatères particuliers
 - ▮ Théorème de Pythagore, réciproque, théorème de Thalès, réciproque
 - ▮ Trigonométrie dans un triangle rectangle
 - ▮ Parallélisme
 - ▮ Montrer que des points sont alignés par le cas particulier de l'inégalité triangulaire : $C \in [AB] \Leftrightarrow AB = AC + CB$
 - ▮ Construire un patron d'un solide
- ▮ Établir ou utiliser une formule utilisant une ou plusieurs variables (feuille de calcul ou tableur)
 - ▮ Utiliser une formule donnée
 - ▮ Lire ou modifier un programme Scratch
 - ▮ Notion de fonction, fonction affine
 - ▮ Construire ou reconnaître la droite correspondant à une fonction affine donnée
 - ▮ Lire un graphique, donner du sens à l'abscisse ou l'ordonnée ou les coordonnées d'un point
 - ▮ Utilisation d'un diagramme
 - ▮ Proportionnalité, tableau de proportionnalité, notion d'échelle, pourcentages
 - ▮ Réaliser un tableau de statistiques à partir d'un graphique
 - ▮ Réaliser un diagramme circulaire
 - ▮ Notion de médiane, de fréquence
 - ▮ Calcul de probabilités (équiprobabilité)

Dans tous les domaines

- ▮ Savoir démontrer ou réfuter une affirmation

Grandeurs et mesures

- ▮ Formules de périmètres, d'aires et de volumes, associer volume et capacité ($1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$)
- ▮ Notion de vitesse, de vitesse moyenne
- ▮ Notion d'angle, somme des angles d'un triangle
- ▮ Calculer avec des durées (soustraire deux données en h, min et s)

Organisation et gestion de données

- ▮ Lire et extraire des données d'une feuille de calcul

Didactique

La troisième partie (didactique) des sujets montre que tous les niveaux de l'école primaire sont abordés (de la maternelle petite section jusqu'au CM2), il s'agit soit d'analyser des activités ou exercices mis en place par des enseignants, soit d'analyser des travaux d'élèves, et de proposer des activités ou des remédiations. Les thèmes usuels abordés concernent les nombres (entiers ou décimaux), le calcul posé ou en ligne (calcul mental), la proportionnalité, la résolution de problèmes.

PARTIE 1

Nombres et calculs

1. Les différents types de nombres	24
2. Numération de position	63
3. Nombres et opérations	101
4. Arithmétique	160

1

Les différents types de nombres

SAVOIRS DISCIPLINAIRES

Autoévaluation

Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses.

❶ $\frac{5}{7}$ est un nombre :

- ☐ a. entier
- ☐ b. décimal
- ☐ c. rationnel non décimal
- ☐ d. irrationnel

❷ 273 est un nombre :

- ☐ a. décimal
- ☐ b. rationnel
- ☐ c. irrationnel
- ☐ d. réel

❸ Parmi les nombres suivants :

$0,33$; $\frac{1}{4}$; 3 ; $3,14$; $\frac{22}{7}$; $\frac{427}{10}$; -4 ; $\frac{40}{10}$; $\frac{3}{5}$; $\sqrt{2}$; $\frac{1}{3}$; π ; $\frac{117}{125}$; $\frac{117}{3}$; $\frac{145}{7}$

Il y a :

- ☐ a. 3 nombres décimaux
- ☐ b. 8 nombres décimaux
- ☐ c. 10 nombres décimaux
- ☐ d. 11 nombres décimaux

❹ Voici 5 égalités : $\frac{1}{20} = 0,50$; $\frac{1}{5} = 0,2$; $\frac{1}{3} = 0,333$; $\sqrt{2} = 1,414$; $\pi = 3,14$.

Parmi ces égalités :

- ☐ a. une seule est vraie
- ☐ b. deux sont vraies
- ☐ c. quatre sont vraies
- ☐ d. cinq sont vraies

❺ Combien y a-t-il de nombres décimaux avec 1 chiffre après la virgule et supérieurs à 2,263 ?

- ☐ a. 9
- ☐ b. 10
- ☐ c. une infinité
- ☐ d. 8

- 6 Combien y a-t-il de nombres décimaux compris entre 1,2 et 1,3 ?
- a. aucun
 - b. 9
 - c. 10
 - d. une infinité
- 7 Je suis un nombre entier. Mon nombre de milliers est 45 et mon chiffre des dizaines est 4. Qui suis-je ?
- a. 4 534
 - b. 45 041
 - c. 4 544
 - d. 454 454
- 8 Quelle est la notation scientifique du nombre 475,02 ?
- a. $0,47502 \times 10^3$
 - b. $47,502 \times 10^{-2}$
 - c. $4,7502 \times 10^2$
 - d. $47\,502 \times 10^{-2}$

CONSEILS

- Certaines questions exigent une bonne connaissance des relations entre les différents ensembles de nombres, ainsi que des propriétés des nombres décimaux. Tous les éléments correspondants figurent dans le cours.
- En vue du concours, les différentes définitions d'un nombre décimal exigent d'être bien connues. Rappelons qu'un nombre décimal n'est pas défini comme un nombre écrit avec une virgule (voir la partie 7 du cours).

CORRIGÉS

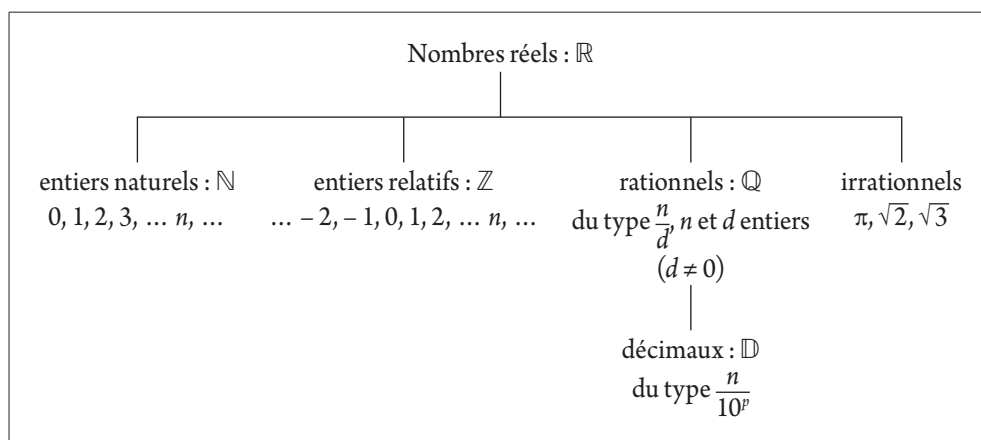
- 1 c. Reportez-vous à la définition dans le cours point 3.
- 2 a., b. et d. Reportez-vous aux propriétés dans le cours, notamment la représentation des nombres sur un diagramme de Venn. Ainsi, tout nombre entier est aussi décimal, rationnel et réel.
- 3 c. $\frac{22}{7}$; $\sqrt{2}$; $\frac{1}{3}$; π et $\frac{145}{7}$ ne sont pas décimaux.
- Le dénominateur des trois fractions n'est pas le produit d'une puissance de 2 par une puissance de 5, donc le nombre est rationnel non décimal. $\sqrt{2}$ et π sont irrationnels, on ne peut pas les écrire sous la forme d'une fraction à termes entiers.
- 4 a. Les trois dernières égalités sont fausses car il s'agit de valeurs approchées des nombres. Et la première est fausse aussi.
- 5 c. Par exemple : 2,3 ; 2,4 ; ... ; 3,2 ; 15,1 ; ...
- 6 d. Entre deux nombres décimaux, on peut toujours placer une infinité de nombres décimaux.
- 7 b.
- 8 c.

Cours et exercices d'application

Parmi les nombres et ensembles de nombres, quatre sont fondamentaux :

- les nombres **entiers naturels**, dont l'ensemble est noté **N** ou $\mathbb{N}$;
- les nombres **entiers relatifs**, dont l'ensemble est noté **Z** ou $\mathbb{Z}$;
- les nombres **rationnels**, dont l'ensemble est noté **Q** ou $\mathbb{Q}$ (et parmi ceux-ci, les nombres **décimaux**, dont l'ensemble est noté **D** ou $\mathbb{D}$, qui sont donc des nombres rationnels particuliers) ;
- les nombres **irrationnels**, dont l'ensemble n'a pas de notation particulière.

Tous ces nombres forment une grande « famille » appelée famille ou ensemble des nombres **réels**, noté **R** ou $\mathbb{R}$.



1. Nombres entiers naturels

A. Définition 1 (de G. Peano, définition ordinale, c'est-à-dire liée à l'ordre)

L'ensemble des nombres entiers naturels se construit par les axiomes de G. Peano :

- 0 est un nombre entier naturel.
- Tout entier naturel a un successeur.
- 0 n'est le successeur d'aucun entier naturel.
- Deux nombres entiers naturels qui ont le même successeur sont égaux.
- Si une partie de $\mathbb{N}$ contient 0 ainsi que le successeur de chacun de ses éléments, alors cette partie est égale à $\mathbb{N}$.

B. Définition 2 (de B. Russell, définition cardinale, c'est-à-dire liée à la quantité)

Un nombre entier est une manière de mettre ensemble certaines collections (en fait, on met ensemble les collections qui ont le même nombre d'objets).

EXEMPLES

- 0, 1, 2, 3, ... 47, ... 158 ... sont des nombres entiers naturels.
- Si l'on considère le nombre entier 3, on dit « le troisième » dans la définition de Peano, et « trois » dans la définition de Russel.
- Pour désigner un nombre entier quelconque, on utilise généralement la lettre n .
- L'entier qui précède n (pour n différent de 0) est $n - 1$, et le successeur du nombre n est le nombre $n + 1$.

2. Nombres entiers relatifs

Il suffit de savoir qu'un nombre entier relatif est un nombre entier dont l'écriture est précédée du signe « - » et le nombre est appelé **nombre négatif** ou du signe « + » et le nombre est appelé **nombre positif**.

EXEMPLES

- 6 ; + 15 ; + 568 ; - 219 sont des nombres entiers relatifs.
- Le signe « - » a un aspect concret : - 5 peut par exemple signifier « 5 degrés au-dessous de 0 » ou « 5 à gauche de 0 sur un axe horizontal ».
- Le signe « - » signifie aussi « opposé de ». Par exemple, - 5 est l'opposé du nombre 5.
- En tenant compte de la remarque précédente, - n signifie « opposé de n », et ainsi - n peut être un nombre positif. Ainsi, si $n = - 5$, alors - $n = 5$ qui est un nombre positif.

Propriété : Tout nombre entier naturel est un nombre entier relatif. Ainsi, si a est un nombre entier naturel, on peut écrire $a = + a$.

EXEMPLE

On peut écrire + 4 ou 4 ; + 68 ou 68...

3. Nombres rationnels

Un nombre rationnel est un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une **fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers** (cet entier étant non nul pour le dénominateur).

EXEMPLES

$\frac{3}{4}$, $\frac{47}{3}$ et $\frac{3\,658}{44\,259}$ sont des nombres rationnels.

Propriété : Tout nombre entier est un nombre rationnel : ainsi, si a est un nombre entier, on peut écrire $a = \frac{a}{1}$.

EXEMPLE

$$5 = \frac{5}{1}$$

Parmi les nombres rationnels, on distingue certains nombres appelés **nombres décimaux**.

4. Nombres décimaux

Définition 1 : Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction à termes entiers dont le dénominateur est une puissance de 10.

Définition 2 : Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible à termes entiers dont le dénominateur est le produit d'une puissance de 2 par une puissance de 5.

Les deux définitions précédentes sont équivalentes, et par conséquent, un nombre est décimal, si et seulement si, il peut s'écrire sous l'une des formes suivantes :

$$\frac{a}{10^n} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{5^p} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{2^k} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{2^k \times 5^p}.$$

EXEMPLES

- $\frac{7}{10}, \frac{2\,847}{100}, \frac{31}{1\,000\,000}$ sont des nombres décimaux, leur dénominateur est une puissance de 10. ($10 = 10^1$, $100 = 10^2$ et $1\,000\,000 = 10^6$). Ces trois fractions sont irréductibles.
- $\frac{21}{75}$ est un nombre décimal. *A priori*, comme $75 = 3 \times 5^2$, on pourrait penser que le nombre est rationnel non décimal par la présence du facteur 3, mais on peut simplifier l'écriture de la fraction, on obtient : $\frac{21}{75} = \frac{7}{25}$, et $25 = 5^2$ est une puissance de 5.

Propriété : Tout nombre entier est un nombre décimal, ainsi si a est un nombre entier, on peut écrire :

$$a = \frac{10a}{10}, \text{ par exemple } 9 = \frac{90}{10}.$$

EXERCICE 1

Démontrer que les nombres suivants sont décimaux.

$$A = \frac{7}{64} \quad B = \frac{21}{625} \quad C = \frac{27}{250} \quad D = \frac{39}{6} \quad E = \frac{35}{7}.$$

EXERCICE 2

Donner deux nombres décimaux pouvant s'intercaler entre 1,102 et 1,103.

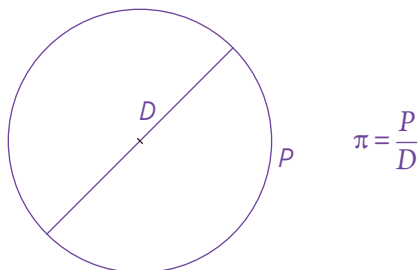
5. Nombres irrationnels

Un nombre irrationnel est un nombre qui n'est pas rationnel, et que l'on ne peut donc pas écrire sous la forme d'une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers.

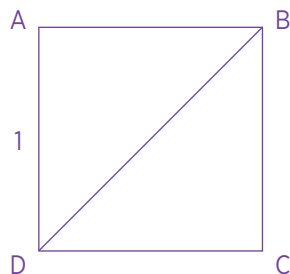
Il n'y a pas de notation pour l'ensemble des nombres irrationnels.

EXEMPLES USUELS

- π est un nombre irrationnel. Sa première définition est d'être le rapport entre le périmètre P d'un cercle et son diamètre : $\pi = \frac{P}{D}$ ou encore $\pi = \frac{P}{2R}$. (Attention, avec cette écriture, $\frac{P}{2R}$ est une fraction mais dont les deux termes ne peuvent être simultanément entiers.)



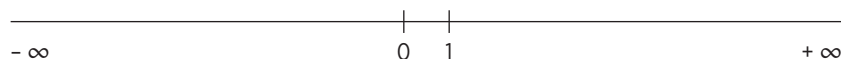
- $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Ce nombre est défini comme la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1.



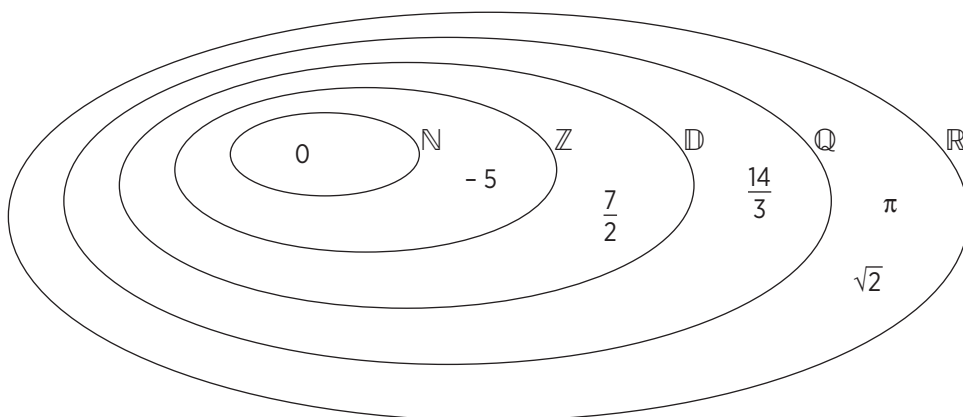
Si $AB = 1$, alors $BD = \sqrt{2}$.

6. Représentations des ensembles de nombres

Représentation 1 : Droite numérique

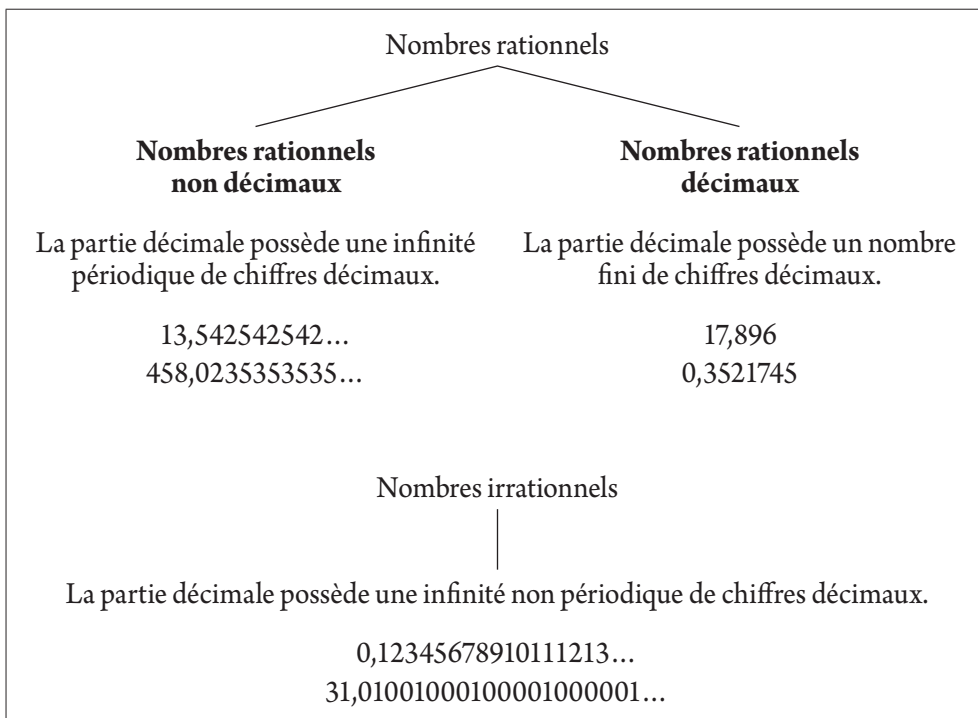


Représentation 2 : Diagramme de Venn



7. Une autre écriture des nombres

Il existe une autre façon d'écrire les différents types de nombres précédents : l'écriture utilisant un nombre écrit à l'aide d'une virgule.



À NOTER

Infinité périodique signifie qu'il y a répétition infinie d'une série de chiffres. Ainsi, dans le nombre 13,542542542... la suite « 542 » se répète indéfiniment, et dans le nombre 458,0235353535..., la suite « 35 » se répète indéfiniment.

EXEMPLES

- $\frac{7}{25}$ est un nombre (rationnel) décimal que l'on peut écrire sous la forme 0,28.
- $\frac{7}{3}$ est un nombre rationnel non décimal que l'on peut écrire sous la forme 2,333333...
- $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, dont une valeur approchée est 1,4142135623. (Il est impossible de connaître la valeur exacte de $\sqrt{2}$, et, plus généralement, il est impossible de connaître la valeur exacte d'un nombre irrationnel. En revanche, il est théoriquement possible de « s'approcher » aussi près que l'on veut d'un nombre irrationnel à l'aide d'un nombre décimal.)

EXERCICE 3

Pourquoi l'écriture à l'aide d'une virgule d'un nombre rationnel non décimal comporte-t-elle une infinité périodique de chiffres ?

À NOTER

Par ce qui précède, on comprend qu'un nombre décimal ne se définit pas simplement comme un « nombre écrit avec une virgule ». Ainsi, 5 n'est pas écrit à l'aide d'une virgule, or 5 est décimal ($5 = 5,0$). De même, $0,538461538461\dots$ est écrit à l'aide d'une virgule et, pourtant, ce n'est pas un nombre décimal.

La virgule dans l'écriture d'un nombre marque la place de l'unité.

Ainsi, dans le nombre 17,965 le chiffre des unités est 7. Ce qui permet alors de donner du sens à chacun des autres chiffres.

À NOTER

Il ne faut surtout pas dire que la virgule sépare la partie entière de la partie décimale : d'une part, parce que cela ne correspond pas du tout à la fonction de cette virgule, et, d'autre part, cela renforce la fausse idée des élèves qu'un nombre décimal consiste en deux nombres entiers séparés par une virgule.

EXERCICE 4

Tout nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'un nombre écrit à l'aide d'une virgule. Le problème qui se pose est de retrouver les deux termes de la fraction définissant ce nombre lorsque l'on connaît uniquement son écriture à l'aide d'une virgule.

Résoudre ce problème pour les nombres suivants.

- ❶ $52,44444444\dots$
- ❷ $2,548548548\dots$
- ❸ $13,5271414141\dots$

Il existe un **cas particulier important**. Les nombres écrits sous la forme $a,99999999\dots$, a nombre entier naturel, sont égaux à $a + 1$.

En effet :

Soit $n = a,99999999\dots$

Donc $n = a + 0,99999999\dots$

Alors $10n = 10a + 9,99999999\dots$

Par conséquent $10n - n = 10a + 9,99999999\dots - a - 0,99999999\dots$

Soit $9n = 9a + 9 = 9(a + 1)$ et donc $n = a + 1$.

EXERCICE 5

- ❶ Démontrer que $3,99999\dots$ est égal à 4.
- ❷ Démontrer que $52,4799999\dots$ est égal à 52,48.

8. Écriture scientifique d'un nombre

L'écriture scientifique (ou notation scientifique) d'un nombre est l'écriture de ce nombre sous la forme $a \times 10^n$, avec $1 \leq a < 10$ et n entier relatif. On rappelle que pour n entier positif, 10^n est un 1 suivi de n zéros et pour n entier négatif, 10^n est un 1 précédé de n zéros.

EXEMPLES DE PUISSANCES DE 10 ET DE NOTATIONS SCIENTIFIQUES

$$10^7 = 10\,000\,000$$

$$10^{-4} = 0,0001$$

$$195\,698 = 1,95698 \times 10^5$$

$$0,000087 = 8,7 \times 10^{-5}$$

EXERCICE 6

❶ Écrire les nombres suivants en notation scientifique :

15 800

333,33

0,000000852

17,98

25 608 970

10,752

0,00025

❷ Donner l'écriture décimale de chacun des nombres suivants :

$$4,2 \times 10^8$$

$$6,58 \times 10^{-5}$$

$$8,956\,847 \times 10^4$$

$$1,002506 \times 10^{-4}$$

EXERCICE 7

Calculer et exprimer le résultat en écriture décimale, puis en notation scientifique :

$$A = 13 \times 10^7 \times 5 \times 10^5$$

$$B = 4,51 \times 10^3 \times 2,4 \times 10^5 \times 1,2 \times 10^{-4}$$

$$C = \frac{4,2 \times 10^5}{12 \times 10^3}$$

$$D = \frac{14,02 \times 10^{-4}}{701 \times 10^{-3}}$$

Corrigés des exercices d'application

EXERCICE 1

$64 = 2^6$ donc A est décimal, d'après la définition 2.

$625 = 5^4$ donc B est décimal, d'après la définition 2.

$250 = 2 \times 5^3$ donc C est décimal, d'après la définition 2.

$\frac{39}{6} = \frac{13}{2}$ donc D est décimal, d'après la définition 2.

$\frac{35}{7} = 5$ donc E est décimal, car tout nombre entier est décimal.

EXERCICE 2

1,1024 et 1,1026 conviennent, par exemple.

EXERCICE 3

Soit un nombre rationnel non décimal $\frac{a}{b}$. Dans la division euclidienne de a par b , le reste r est strictement inférieur au diviseur b . Ce reste ne peut donc prendre qu'un nombre fini de valeurs, à savoir $b - 1$ valeurs (les nombres entiers de 1 à $b - 1$). Ce qui fait que nécessairement, au bout de $b - 1$ calculs au plus, on retrouve un des restes déjà obtenus, ce qui définit la période.

EXEMPLES

En posant les divisions correspondantes, on peut vérifier que l'on a :

$\frac{17}{7} = 2,428571428571... \text{ (période à 6 chiffres)} ; \frac{17}{11} = 1,5454... \text{ (période à 2 chiffres)}$

EXERCICE 4

① Soit $n = 52,44444444... \text{ Alors } 10n = 524,44444444...$

$10n - n = 472$, soit $9n = 472$ et donc $n = \frac{472}{9}$.

② Soit $n = 2,548548548... \text{ Alors } 1\,000n = 2\,548,548548548...$

$1\,000n - n = 2\,546$, soit $999n = 2\,546$ et $n = \frac{2\,546}{999}$.

③ Soit $n = 13,52714141414... \text{ Alors } 100n = 1\,352,714141414...$

$100n - n = 1\,339,187$, soit $99n = 1\,339,187$ et $n = \frac{1\,339,187}{99} = \frac{1\,339\,187}{99\,000}$.

EXERCICE 5

① Soit $n = 3,99999... \text{ Alors } 10n = 39,99999...$

$10n - n = 36$, soit $9n = 36$ et donc $n = 4$.

② Soit $n = 52,4799999... \text{ Alors } 100n = 5\,247,99999...$

$100n - n = 5\,195,52$, soit $99n = 5\,195,52$ et donc $n = \frac{5\,195,52}{99} = 52,48$.

1. Les différents types de nombres

EXERCICE 6

① $15\,800 = 1,58 \times 10^4$
 $0,000000852 = 8,52 \times 10^{-7}$
 $25\,608\,970 = 2,560\,897 \times 10^7$
 $0,00025 = 2,5 \times 10^{-4}$

$333,33 = 3,3333 \times 10^2$
 $17,98 = 1,798 \times 10^1$
 $10,752 = 1,0752 \times 10^1$

② $4,2 \times 10^8 = 420\,000\,000$
 $8,956\,847 \times 10^4 = 89\,568,47$

$6,58 \times 10^{-5} = 0,000\,065\,8$
 $1,002506 \times 10^{-4} = 0,000\,100\,250\,6$

EXERCICE 7

Rappel : Pour tout entier relatif a , pour tout entier relatif b : $10^a \times 10^b = 10^{a+b}$

On obtient :

Nombre	Calcul	Écriture décimale	Notation scientifique
A	65×10^{12}	65 000 000 000 000	$6,5 \times 10^{13}$
B	$12,9888 \times 10^4$	129 888	$1,29888 \times 10^5$
C	$0,35 \times 10^2$	35	$3,5 \times 10^1$
D	$0,02 \times 10^{-1}$	0,002	2×10^{-3}

SAVOIRS ET PRATIQUES DIDACTIQUES

Autoévaluation

- ❶ Quelles compétences l'élève doit-il développer pour construire le nombre :
a. à l'école maternelle ? **b.** en classe de CP-CE1 ?
- ❷ Comment aborder le complément à la dizaine au CP ?

CONSEILS

- ▮ Vous devez bien connaître les textes officiels, les préconisations des programmes et les compétences du socle commun de connaissances, de compétences et de culture ainsi que les repères de progressivité des apprentissages.
- ▮ Il est important qu'un professeur des écoles connaisse la continuité des apprentissages du nombre de la maternelle au CM2. Les compétences travaillées au collège devront également être connues et cela sera d'autant plus vrai pour un enseignant exerçant au cycle 3 (CM1-CM2-6^e ; liaison école-collège).
- ▮ Pour renforcer ces connaissances, vous pouvez aussi vous **référer aux repères annuels de progression**¹. Ceux-ci ont été élaborés pour chaque niveau (cycles 2 et 3) et contribuent à la mise en place d'un enseignement structuré tout au long de chaque année du cycle en donnant, lorsque c'est nécessaire, des indications de période d'enseignement, l'année scolaire étant répartie en cinq périodes de travail séparées par quatre périodes de vacances.
- ▮ Cette note de service est entrée en vigueur à la rentrée de l'année scolaire 2019-2020.

CORRIGÉS

- ❶ **a.** Le nouveau programme d'enseignement 2015 de l'école maternelle nous renseigne sur les objectifs visés et les éléments de progressivité : « La construction du nombre s'appuie sur la notion de quantité, sa codification orale et écrite, l'acquisition de la suite orale des nombres et l'usage du dénombrement. Chez les jeunes enfants, ces apprentissages se développent en parallèle avant de pouvoir se coordonner : l'enfant peut, par exemple, savoir réciter assez loin la comptine numérique sans savoir l'utiliser pour dénombrer une collection. Dans l'apprentissage du nombre à l'école maternelle, il convient de faire construire le nombre pour exprimer les quantités, de stabiliser la connaissance des petits nombres et d'utiliser le nombre comme mémoire de la position. »

Il s'agit d'un apprentissage très progressif qui se construira tout au long des sections de l'école maternelle et se poursuivra à l'école élémentaire. L'enseignant s'attachera à travailler sur des petits nombres pour construire la quantité. L'enfant sera amené à utiliser et à étudier les nombres, notamment leur décomposition.

Les compétences indispensables pour construire le nombre sont donc :

- Utiliser le comptage-dénombrement
- Savoir procéder à la décomposition et la recombinaison d'un nombre
- Maîtriser l'itération de l'unité.

¹ Bulletin officiel n° 22 du 29 mai 2019.

1. Les différents types de nombres

La notion d'« **itération de l'unité** » est une propriété conceptuelle qui structure les connaissances et les compétences. L'itération de l'unité (« trois c'est deux et encore un ») se construit progressivement et pour chaque nombre. En amenant les élèves à comprendre et à maîtriser l'itération de l'unité, on les aidera à constituer un réseau de connaissances et de liens permettant de comprendre le concept du nombre.

Connaître un nombre c'est savoir comment il est fait en nombres plus petits que lui et c'est savoir comment l'utiliser pour en former de plus grands. Connaître un nombre, c'est bien connaître ses différentes décompositions possibles.

ATTENTION

Il faut éviter de s'enfermer dans l'utilisation systématique et constante de matériel, dans la manipulation (même si elle reste primordiale). Il faut aussi savoir passer à l'abstraction (simulation mentale, procédure, estimation).

EXEMPLE :

À l'école maternelle, au moment des rituels, les enfants sont très souvent amenés à **compter** les enfants présents. Il s'agit d'une activité de comptage-numérotage en pointant du doigt chaque enfant : c'est l'aspect ordinal du nombre qui est travaillé. Or, cette activité n'est pas conseillée pour construire le nombre comme l'expression d'une quantité. En effet, souvent l'enfant numérote ses camarades, mais ne comprend pas toujours que le numéro 25 signifie qu'il y a 25 élèves présents dans la classe. Pour construire cette compétence, il est donc plus judicieux de dénombrer les enfants absents, quantité moins importante, en utilisant l'itération de l'unité (ex. : « un absent et encore un absent, ça fait deux absents »). Cela afin de construire l'aspect cardinal du nombre et de comprendre qu'un nombre désigne une quantité.

b. L'élève de CP-CE1 s'appuiera sur les compétences travaillées à l'école maternelle et développera les compétences ci-dessous dans le domaine numérique :

- utiliser diverses représentations des nombres ;
- ranger des nombres entiers ;
- mémoriser des faits numériques.

L'écueil à éviter serait d'étudier les nombres un par un. Il est préférable de favoriser les activités de groupement plutôt que celles favorisant des échanges. De même, la maîtrise des symboles < et > n'est pas un objectif du cycle 2 (une première approche reste possible) (*source Eduscol*).

2 Le but essentiel du travail sur le complément à 10 est un objectif de calcul mental automatisé, ce qui permettra de travailler le complément à la dizaine supérieure, qui permettra de trouver (avant automatisation) des résultats de tables dont le résultat est supérieur à 10 (exemple : $8 + 7$, c'est $8 + 2 + 5$, car 2 est le complément de 8 à 10). Le complément à 10 permettra aussi de repérer les nombres « amis » : dans $17 + 25 + 13...$ je commence par $17 + 13...$

On vise donc une automatisation, permettant de mener des calculs réfléchis, etc.

Comme tout calcul à automatiser, il est nécessaire de le construire (réfléchir) avant et effectivement de créer et de soumettre ensuite aux élèves des situations d'apprentissages variées.

On utilise parfois des jeux de jetons, des situations de correspondances, terme à terme (exemple : j'ai 10 places de parking et il y a 6 voitures. Combien manque-t-il de voiture ?).

Il sera absolument nécessairement de placer les élèves face à de multiples situations de manipulation qui les amène à quantifier, compléter, rajouter, enlever, dénombrer, comparer..., c'est-à-dire à manipuler le plus possible des quantités dans des situations de jeu variées. Le coin cuisine dans la classe ou encore la salle de motricité (constitution des équipes, installation du matériel...) sont des espaces propices pour cela.

Cours et exercices d'application

1. Construction du nombre

Il existe deux définitions du nombre entier : définition ordinale et définition cardinale.

EXEMPLE

Dans la définition cardinale, le nombre 3 signifie les 3 objets d'une collection.

Dans la définition ordinale, le nombre 3 signifie le troisième, on considère le 3^e objet d'une collection.

Ces deux aspects cardinaux et ordinaux des nombres entiers sont très importants, nous en développons ici une courte histoire.

A. La lente naissance du concept de nombre

D'abord, il faut bien faire la distinction entre les deux notions suivantes :

- le « sens du nombre » ;
- la « faculté de compter-dénombrer ».

Le sens du nombre peut être défini comme la faculté qui permet de reconnaître qu'une collection d'objets a subi une modification, sans avoir constaté directement cette modification. La modification dont il s'agit consiste à enlever ou ajouter un ou plusieurs objets à cette collection, ou à placer ces objets différemment.

Chez l'homme, le sens du nombre dépasse rarement 4. Autrement dit, on peut saisir directement les quantités 1, 2, 3 ou 4, et percevoir tout aussi directement si celles-ci ont été modifiées ou non. Dès que les quantités sont plus importantes (à partir de 5 objets ou plus), alors le sens du nombre est remplacé par l'acte qui consiste à « compter-dénombrer ».

On retrouve des traces de cette limitation dans de nombreuses langues. Ainsi, il y a une connexion évidente entre les mots latins *tres* (qui signifie « trois ») et *trans* (qui signifie « au-delà »). De même pour les mots en français avec *trois* et *très*.

Le concept de « nombre » va donc naître de façon lente, d'abord lié à des petites quantités et attaché aux objets concernés.

Certains idiomes primitifs disposent de noms pour les petits nombres, mais n'en ont aucun qui signifie « nombre ». Dans d'autres cas, on trouve des noms de nombres différents selon les objets auxquels ils se rapportent : par exemple il y a un nom de nombre pour les objets plats, un autre pour les objets ronds, un pour les mesures, etc.

C'est l'action de compter qui va permettre de passer de ce concept concret de nombre lié à des objets au concept abstrait de nombre en tant qu'entité mathématique.

Dans un premier temps, on peut arriver à cette idée de nombre sans avoir recours au comptage, mais en utilisant la **correspondance un à un**, technique qui a été longtemps utilisée.

1. Les différents types de nombres

EXEMPLE

Ainsi, le berger qui avait en charge un troupeau enregistrait le nombre de bêtes au moyen de cailloux (*caillou*, *calculus* en latin, et qui a donné le mot *calcul*). Par exemple, le berger a autant de cailloux dans un récipient que de bêtes dans la nature. Lorsqu'il fait rentrer ses bêtes à l'enclos, alors, pour chaque bête qui entre, il retire un caillou du récipient qui les contient. S'il reste quatre cailloux, alors le berger sait que quatre bêtes sont encore dans la nature, sans même connaître ce nombre quatre : il y a autant de bêtes manquantes que de cailloux dans le récipient.

B. Du concret vers l'abstrait

Cette façon de procéder va donner naissance au nombre « cardinal ». Un nombre cardinal est le nombre d'éléments d'une collection donnée. Il est donc lié à la quantité et répond aux questions du type « combien... ? ».

EXEMPLE

Voici un exemple du nombre cardinal 5 :

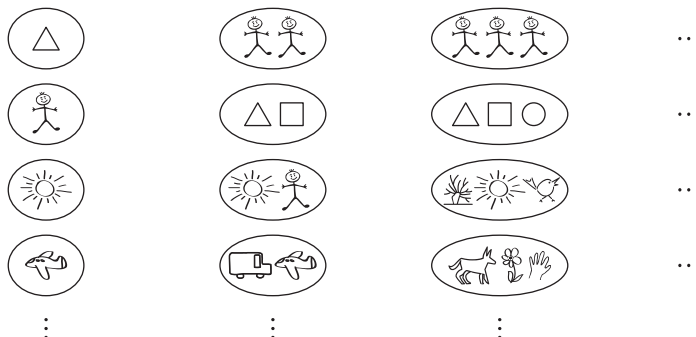


Il y a 5 personnages.

Le problème est le suivant : on veut classer une collection d'ensembles, par exemple :



Le critère retenu est « le nombre d'objets de chaque collection ». Notons qu'il n'est pas nécessaire de connaître ce nombre et qu'une correspondance un à un suffit pour résoudre le problème. On obtient donc le classement suivant :



On va alors nommer et symboliser chaque classe obtenue. Ainsi, je nomme « un » la première classe obtenue et je la symbolise par « 1 ». Puis, je nomme « deux » la deuxième classe obtenue et je la symbolise par « 2 ».

Et ainsi de suite. J'obtiens donc le résultat suivant :

			...
			...
			...
			...
⋮	⋮	⋮	
Un	Deux	Trois	
1	2	3	

Les nombres obtenus 1, 2, 3, 4, 5, etc., sont appelés des nombres cardinaux, qui sont définis par Bertrand Russel, dans *Introduction à la philosophie mathématique*, comme « une manière de mettre ensemble certaines collections ».

Ces nombres étant nommés et symbolisés, il suffit maintenant d'en apprendre la liste ordonnée par cœur – la comptine numérique – pour pouvoir ensuite s'affranchir de cette mise en correspondance un à un et de dire par comptage, c'est-à-dire récitation de la comptine numérique, et dénombrement le nombre d'éléments d'une collection donnée. Cette comptine induit une définition « ordinale » des nombres, c'est-à-dire une définition des nombres liée à l'idée de rangement.

EXEMPLE

Voici un exemple du nombre ordinal 5 :



5, c'est-à-dire le 5^e personnage.

Cette définition ordinale des nombres se retrouve dans les axiomes de construction de $\mathbb{N}$ de G. Peano.

On voit donc que ces deux aspects du nombre entier, aspect cardinal et aspect ordinal, sont intimement mêlés, et il est difficile de dire lequel a précédé l'autre, ou si les deux sont apparus simultanément. On peut penser également que l'action de compter en utilisant les doigts de la main a accompagné les techniques décrites précédemment.

C. Les noms des nombres

Un problème qui se présente est l'invention des noms que l'on va donner aux nombres, ainsi que les symboles correspondants et la façon dont on va les utiliser, ce que l'on appelle un système de numération.

1. Les différents types de nombres

Dans un premier temps, chaque nombre peut posséder un nom différent. Mais alors, on ne pourra pas nommer tous les nombres, puisqu'il faudrait autant de mots que de nombres, soit une infinité. De cette difficulté va naître le **concept de « base »**.

Voici un exemple de système en base 2 (système binaire), employé par une tribu de l'ouest du détroit de Torrès et décrit par Tobias Dantzig dans son livre *Le Nombre, langage de la science* :

1 : Urapun	2 : Okosa	3 : Okosa-Urapun
4 : Okosa-Okosa	5 : Okosa-Okosa-Urapun	6 : Okosa-Okosa-Okosa

Deux mots distincts ont donc suffi pour nommer six nombres, mais ce procédé reste limité. Il existe d'autres systèmes de numération (voir le chapitre sur la numération).

Tous les systèmes qui ont été inventés jusqu'au VI^e siècle de notre ère ont connu ce genre de limitation, c'est-à-dire qu'ils permettaient d'enregistrer des quantités sous forme numérique et symbolique, mais qu'ils étaient peu adaptés aux opérations arithmétiques. Pour ces dernières, il était alors nécessaire d'utiliser des bouliers ou des abaques.

D. Le zéro... pas si nul que ça

Ce qui manquait, c'était un symbole permettant de représenter les ensembles vides, c'est-à-dire les ensembles qui ne contiennent aucun élément. Autrement dit, ce qui manquait, c'était le zéro, symbolisé par « 0 ». Il sera inventé en Inde au VI^e siècle de notre ère et arrivera en France au X^e siècle de notre ère par l'intermédiaire d'un moine, Gerbert d'Aurillac (qui deviendra pape en 999 sous le nom de Sylvestre II). Cette invention du zéro a permis de créer le système décimal que nous avons donc hérité de l'Inde, et qui ne sera vraiment adopté dans notre pays qu'à partir du XVII^e siècle, étant jusqu'à ce moment en concurrence avec le système de numération romain.

Enfin, ce fameux zéro, qui permet de marquer un emplacement vide dans l'écriture d'un nombre, doit être lui-même perçu comme un nombre à part entière. Ainsi, l'axiome 1 de G. Peano de construction de $\mathbb{N}$ s'énonce ainsi : zéro est un nombre entier naturel. Dès lors, le nombre 0 peut être étudié pour lui-même en tant qu'entité mathématique ayant son existence propre. Par exemple, on sait que :

- 0 est un nombre pair ;
- 0 admet une infinité de diviseurs ;
- 0 est neutre pour l'addition, c'est-à-dire que pour tout nombre entier n :
$$n + 0 = 0 + n = n ;$$
- 0 est absorbant pour la multiplication, c'est-à-dire que pour tout nombre entier n :
$$n \times 0 = 0 \times n = 0.$$

Au regard de cette histoire, deux étapes importantes en ce qui concerne la construction du nombre peuvent être distinguées à l'**école maternelle** :

- l'apprentissage de la comptine numérique ;
- l'apprentissage du dénombrement.

2. Manipulations et construction du nombre

A. Le matériel à disposition de l'élève

La manipulation répond à un besoin concret de la part des élèves. Selon Thierry Dias, dans son ouvrage *Manipuler et expérimenter en mathématiques* (Magnard) : « Permettre aux élèves d'agir en mathématiques, c'est aménager par les enseignements un passage progressif de la manipulation à l'expérimentation. [...] Il me semble en effet primordial que les élèves puissent mettre en œuvre leurs connaissances, en utilisant des outils, des instruments, des objets. » L'enseignant mettra dans la classe, à disposition des élèves, un matériel varié, riche et facilement accessible. Le temps consacré à la manipulation doit être suffisant pour que l'élève puisse l'explorer et l'utiliser pour résoudre le problème posé. L'enseignant doit prévoir, préparer, planifier l'utilisation des outils. Il mettra le matériel à disposition de l'élève mais sera vigilant pour qu'il ne soit pas uniquement dans l'imitation. Il doit pouvoir explorer librement, essayer, tâtonner, se tromper, recommencer pour résoudre la situation problème.

B. Pour une meilleure gestion du groupe classe

Par ailleurs, la manipulation permet de **gérer l'hétérogénéité** du groupe classe. Certains élèves ont besoin d'agir sur du matériel, de manipuler des objets concrets, de représenter la situation par un dessin, un schéma pour comprendre. Manipuler, c'est passer de l'abstrait au concret. Le matériel va d'abord être utilisé pour modéliser une situation. L'élève va prendre conscience qu'il existe un lien entre une représentation concrète et une représentation abstraite. À l'école maternelle, il est important de ne pas passer trop vite à la symbolisation. L'enfant a besoin de manipuler des objets réels pour apprendre. Même si la manipulation ne suffit pas à elle seule pour comprendre les mathématiques, elle permet de donner du sens aux apprentissages et demande à être intégrée dans la séquence.

La manipulation permet également la verbalisation de l'action et favorise les **interactions entre élèves**. L'élève va décrire sa procédure, son cheminement et se rendre compte que d'autres élèves ont une démarche différente. L'enseignant peut grâce à ce temps d'échange connaître les stratégies des élèves. Pendant que l'apprenant manipule, l'enseignant le questionnera sur ses choix et sur la façon dont il utilise le matériel.

La manipulation donne également un autre **statut à l'erreur**. Celle-ci fait partie de l'apprentissage. Un élève, capable d'explicitar sa stratégie, d'identifier ses erreurs est plus armé pour faire face aux situations complexes. L'enseignant s'attachera à ce que tous les élèves de la classe aient toujours à leur disposition le matériel nécessaire pour résoudre des problèmes. Dans un premier temps, il les encouragera à l'utiliser pour qu'ils soient ensuite autonomes face aux outils, c'est-à-dire qu'ils pensent à y avoir recours pour résoudre un problème et qu'ils soient capables d'expliquer leur choix de matériel de manipulation.

C. À l'école maternelle

La manipulation étant indispensable pour l'appropriation du savoir, il est important de ne pas introduire trop vite les symboles. Le nouveau programme de l'école maternelle

1. Les différents types de nombres

stipule que « pour provoquer la réflexion des enfants, l'enseignant les met face à des problèmes à leur portée. Quels que soient le domaine d'apprentissage et le moment de vie de classe, il cible des situations, pose des questions ouvertes pour lesquelles les enfants n'ont pas alors de réponse directement disponible. Mentalement, ils recourent des situations, ils font appel à leurs connaissances, ils font l'inventaire de possibles, ils sélectionnent. Ils tâtonnent et font des essais de réponse ».

Voici deux exemples de situations problèmes en grande section de maternelle.

EXEMPLE 1

Dans la ferme, il y a 3 poules et 2 moutons. Avec ses amis, Claire s'amuse à compter les pattes de ses animaux. Claire trouve 12 pattes, Pierre trouve 14 pattes, Jacques trouve 16 pattes. Qui a raison ?

EXEMPLE 2

Pierre élève des cochons, des chèvres et des poules. Il a compté 9 têtes, 6 cornes et 28 pattes. Combien y a-t-il de cochons, de chèvres et de poules ?

Pour résoudre ces situations problèmes, l'élève peut dessiner les animaux, les pattes ou symboliser les animaux avec de la pâte à modeler et des allumettes.

3. Construction du concept de nombre à l'école maternelle

A. De la perception d'une quantité au dénombrement

La construction du concept de nombre est complexe mais elle démarre bien plus précocement que l'on pourrait le penser. En effet, selon le terme utilisé par Michel Fayol, le bébé de quelques mois serait capable de « numérositer », c'est-à-dire qu'il saurait reconnaître de manière immédiate de petites quantités (2 à 3 objets). C'est ce que l'on appelle aussi le *subitizing* : la capacité de percevoir globalement une quantité sans recours au comptage. Les travaux de Jean Piaget montrent quant à eux que, dès un an, l'enfant est capable d'ordination : capacité de ranger du plus petit au plus grand et de distinguer le cardinal d'une collection. Mais la construction du nombre prend réellement forme à partir du moment où l'enfant verbalise et utilise les nombres oralement dans la vie quotidienne, sous forme cardinale ou ordinale. Puis celle-ci se complétera par l'apprentissage du dénombrement, utilisé pour quantifier et faire des calculs.

B. Les cinq principes de Rochel Gelman

Ce long apprentissage n'est maîtrisé que vers 7-8 ans. Rochel Gelman suppose que l'enfant naît avec une connaissance implicite des principes du comptage. Il serait par exemple capable de dénombrer les objets d'une collection en les comptant un à un. Aussi la chercheuse canadienne discerne cinq aptitudes mises en jeu dans cette opération. Cette description semble définitivement admise par tous pour décrire le dénombrement par comptage. Là où il y a débat, c'est pour savoir si ces aptitudes sont innées ou acquises. Le point de vue de Rochel Gelman et de Charles Gallistel (scientifique américain) est qu'elles sont innées.

Voici ces aptitudes que l'usage est d'appeler les cinq principes de Rochel Gelman.

1. L'adéquation unique : c'est la mise en correspondance de chaque objet décompté avec une seule « étiquette verbale » (dès 2 ans et demi). C'est la correspondance terme à terme : à chaque objet pointé on fait correspondre un mot et un seul de la liste.

2. L'ordre stable : la suite des étiquettes verbales (un, deux, trois, etc.) est fixe et immuable (apparaît à 3 ans).

3. Le principe cardinal : la dernière étiquette formulée énonce le cardinal de la collection ; le dernier mot prononcé désigne le cardinal de l'ensemble (vers 4 ans).

4. L'abstraction : l'hétérogénéité ou l'homogénéité des objets composant la collection n'a pas d'incidence sur le dénombrement (dès l'apparition du langage).

5. La non pertinence de l'ordre : l'amorce du décompte à un point ou à un autre de la collection n'a pas d'incidence sur les résultats (vers 4 ans). Le trajet suivi pour parcourir exhaustivement la collection est indifférent (source : R. Gelman et C. R. Gallistel, *The Child's Understanding of Number*, Cambridge, Oxford University Press, 1978.)

La quantification des petites collections est nécessaire au développement de la construction de la chaîne numérique qui conduit aux premiers calculs arithmétiques. Les activités de quantification font du nombre un outil de quantification exacte. Mais la construction du nombre ne s'arrête pas là, elle continue avec l'évolution chez l'enfant des stratégies de calcul, de la résolution de problèmes et enfin de constructions plus complexes (nombres relatifs par exemple). Les constructions cognitives prennent appui sur des connaissances antérieures mais des ruptures s'opèrent tout au long du développement numérique (*Comptes pour petits et grands*, S. Baruk, Magnard, 2003).

4. Comptines numériques

Une comptine (numérique) est une chanson qui permet d'apprendre la liste des nombres entiers rangés par ordre croissant ou par ordre décroissant (aspect ordinal des nombres) ou d'apprendre l'aspect cardinal de ces mêmes nombres.

EXEMPLES DE COMPTINE ILLUSTRANT L'ASPECT ORDINAL DES NOMBRES ENTIERS

1, 2, 3

Nous irons aux bois

4, 5, 6

Cueillir des cerises

7, 8, 9

Dans mon panier neuf

10, 11, 12

Elles seront toutes rouges.

Quand trois poules vont aux champs

La première va devant

La deuxième suit la première

La troisième va derrière

Quand trois poules vont aux champs

La première va devant.

1. Les différents types de nombres

EXEMPLE DE COMPTINE ILLUSTRANT L'ASPECT CARDINAL DES NOMBRES ENTIERS

Voici ma main, elle a 5 doigts (montrer la main, doigts écartés)

En voici 2 (montrer le pouce et l'index, les autres doigts sont repliés à l'intérieur de la main)

En voilà 3 (montrer le majeur, l'annulaire et l'auriculaire)

Voici ma main, elle a 5 doigts (montrer la main, doigts écartés)

En voici 4 (montrer les doigts sauf le pouce replié à l'intérieur de la main)

Et 1 tout droit (montrer le pouce, les autres doigts sont repliés à l'intérieur de la main)

Dans cette comptine, l'enfant apprend également deux décompositions additives du nombre 5.

5. Construction du nombre à l'école maternelle

En maternelle, de nombreux supports et outils sont utilisés pour construire le nombre à différents moments de la journée. La construction du nombre ne se conçoit pas uniquement dans une séance isolée mais s'inscrit dans un apprentissage spiralé prenant appui sur le vécu de l'enfant.

Supports – Outils	Quand ? Où ?	Objectifs d'apprentissage
Supports auditifs : utilisation des comptines et des jeux de doigts	Au moment des rituels, des déplacements, des transitions entre les activités, etc.	• Apprendre la comptine numérique pour mémoriser la suite des nombres • Visualiser la quantité avec les doigts • Les jeux de doigts peuvent apprendre à l'élève la décomposition additive d'un nombre
Support auditif : énonciation des nombres	Dans la salle de motricité : constituer des équipes de 4, de 6 ou de 8 joueurs. Faire une ronde par 2, par 3, par 4. Départ du premier joueur, du deuxième, du troisième, etc. Pour la distribution du matériel : exemple « tu vas chercher 6 gobelets pour 6 enfants »	• Apprendre à dénombrer • Visualiser la quantité • Connaître l'aspect ordinal du nombre • Utiliser la correspondance terme à terme
Support visuel : bande numérique avec l'écriture chiffrée	Pour le comptage des présents	• Réciter la comptine numérique • Visualiser les nombres écrits
Supports visuels : les constellations, le dessin des doigts	Pour le comptage des absents	Apprendre à dénombrer les élèves absents (dénombrer des petites quantités)
Matériel de manipulation (jetons, cartes, cubes, dés, etc.)	Lors d'un atelier dirigé d'apprentissage ou d'un atelier de réinvestissement	Apprendre à dénombrer

6. Entiers et décimaux : contradictions et utilité

A. Les contradictions

Le savoir sur les nombres décimaux n'est pas un prolongement du savoir sur les nombres entiers. En effet, certains résultats sur les nombres entiers ne sont plus vrais avec les nombres décimaux.

- Dans $\mathbb{N}$, plus un nombre a de chiffres et plus il est grand, pas dans $\mathbb{D}$.

EXEMPLES

$4,3 > 4,197$ or le premier nombre a moins de chiffres que le second.

$4,231 > 4,23$ et le premier nombre a plus de chiffres que le second.

- Dans $\mathbb{N}$, tout nombre a un successeur (axiome de G. Peano), pas dans $\mathbb{D}$.

On peut toujours trouver un décimal entre deux décimaux, mais on ne peut pas toujours trouver un entier entre deux entiers.

EXEMPLE

Entre 2,12 et 2,13, on peut placer 2,122, mais entre 2 et 3, il n'y a pas d'entier.

- Dans $\mathbb{N}$, multiplier revient toujours à augmenter le nombre, ce qui n'est pas toujours vrai dans $\mathbb{D}$.

EXEMPLE

$3,5 \times 2 = 7$, mais $0,5 \times 2 = 1$.

- De même, dans $\mathbb{N}$, diviser revient toujours à diminuer le dividende, ce qui n'est pas toujours vrai dans $\mathbb{D}$.

EXEMPLE

$10 \div 2 = 5$, mais $10 \div 0,2 = 50$.

À NOTER

Les élèves traitent souvent séparément la partie entière et la partie décimale d'un nombre décimal. Ce qui donne : $0,3 \times 0,4 = 0,12$ est vrai, mais $0,3 \times 0,3 = 0,9$ est faux.

B. La question de l'utilité des nombres décimaux

Les applications sont nombreuses.

- Les nombres décimaux permettent des **calculs plus simples** que les nombres rationnels non décimaux. Même lorsqu'ils sont écrits sous forme de fractions décimales.

EXEMPLE

$$\frac{7}{10} + \frac{9}{100} + \frac{11}{1\,000} = \frac{700 + 90 + 11}{1\,000} = \frac{801}{1\,000} \text{ est un calcul plus simple que :}$$

$$\frac{8}{11} + \frac{8}{99} + \frac{12}{1\,001}$$

- Les entiers sont insuffisants dans un certain nombre de situations, comme pour :
 - **rendre compte des mesures** ; il faut de nouveaux nombres. Ce qui est naturel est de partager l'unité en 2, 4, 8, 16... parties (d'où les fractions et les nombres rationnels), ce qui a fonctionné pendant des siècles. Puis on est passé au partage en 10, 100, 1 000...

1. Les différents types de nombres

qui est moins naturel et qui a donné naissance aux fractions décimales et ensuite aux nombres décimaux ;

- **effectuer des divisions** lorsque le reste n'est pas nul.

EXEMPLE

$$\begin{array}{r} 5,0 \quad | \quad 2 \\ 10 \quad | \quad 2,5 \\ 0 \end{array} \quad 5 \div 2 = 2,5$$

- Les nombres décimaux permettent des **comparaisons plus faciles** que les comparaisons de nombres rationnels non décimaux.

EXEMPLE

$$\frac{4}{7} < \frac{3}{5} \text{ n'est pas instantané, alors que } 0,57 < 0,6 \text{ est plus facile.}$$
$$\left(\frac{4}{7} \approx 0,57 \text{ et } \frac{3}{5} = 0,6 \right).$$

- Les nombres décimaux permettent un **passage commode d'une unité à une autre** et de ramener un grand nombre à un nombre plus petit, donc plus « parlant ».

EXEMPLES

$$1\,215\,688 \text{ mm} = 1,215688 \text{ km}$$

$$17\,800\,000 \text{ m} = 17\,800 \text{ km}$$

- Les nombres décimaux permettent d'exprimer une **moyenne** si le contexte ne l'autorise pas.

EXEMPLE

Un sondage fait en 1960 auprès des femmes nées en 1900 et ayant eu au moins un enfant donne environ 2,7 enfants par femme, ce qui signifie qu'il y a eu en moyenne 27 enfants pour 10 femmes.

- Les nombres décimaux sont très utiles dans les expressions de **pourcentages**, les coefficients de **proportionnalité** et les **données de nombres** dans la vie courante (par exemple les prix).

- Les nombres décimaux permettent de **s'approcher** aussi près que l'on veut de n'importe quel nombre (rationnel non décimal ou irrationnel).

EXEMPLES

$$0,3 < \frac{1}{3} < 0,4$$

$$0,33 < \frac{1}{3} < 0,34$$

$$0,333 < \frac{1}{3} < 0,334\dots$$

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$$

$$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143\dots$$

7. Introduction des nombres décimaux à l'école primaire

On introduit les nombres décimaux à partir du CM1, jusqu'au centième, puis au CM2, jusqu'au dix-millième. Oui, mais comment s'y prendre ?

A. Le piège à éviter

Le piège serait d'aborder les nombres décimaux par « leurs apparences sociales » : les unités de mesures : mètres/centimètres, euros/centimes, kilogrammes/grammes, etc.

EXEMPLES

1 m 50

1 € 50

1 kg 500

B. Des entiers « insuffisants »

Il s'agit de mettre en évidence l'insuffisance des entiers :

- exercice 1 : mesure de segments divers avec une unité étalon non conventionnelle : une bande de papier sert d'étalon pour la mesure de segments de longueurs non multiples de celle de l'étalon ;
- exercice 2 : mise en évidence des manques de la droite graduée avec des entiers ;
- exercice 3 : absence de résultat pour certaines opérations : 4 crayons coûtent 10 €. Quel est le prix d'un crayon ?

C. Privilégier l'entrée par les fractions

On utilisera des unités de mesure non conventionnelles pour favoriser l'appropriation de l'idée de fractionnement et éviter la confusion avec les entiers : activités de pliage, de mesure à partir d'unités non conventionnelles (bande, ligne, disque, etc.).

Dans les programmes de 2018, on aborde en effet les nombres décimaux à partir du CM1 à savoir « passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement ». Certains pré-requis peuvent être établis au CE2 :

- **renforcer les notions de groupements** : exercer toutes les décompositions et recompositions possibles d'un nombre ;
- **renforcer le travail sur la numération de position** :
 - valeur d'un chiffre selon sa position ;
 - différenciation de « chiffre des » et « nombre de » ;
- **utiliser fréquemment la droite numérique** : placer des nombres, intercaler des nombres en proposant des intervalles différents ;
- **utiliser la droite numérique** pour visualiser qu'un nombre représente un point mais aussi un intervalle : encadrer un entier par 2 dizaines ou 2 centaines ou 2 milliers successifs ;
- **exercer le calcul réfléchi** :
 - $\times 10$, $\times 100$, $\times 1\ 000$ en donnant du sens ;
 - $\div 10$, $\div 100$, $\div 1\ 000$ du type « quel nombre multiplié par 100 donne 4 300 ? » ;
 - double/moitié – tiers/triple – quart/quadruple ;
 - ordre de grandeur d'un résultat ;
- **établir le lien avec les situations de la vie quotidienne** où l'élève peut être confronté aux fractions ou aux nombres décimaux pour créer du sens (heure, recette, partage, etc.).

8. Nombres décimaux et fractions décimales

A. De la fraction aux nombres décimaux

On introduit les nombres décimaux à partir des fractions décimales, les nombres décimaux sont alors présentés comme une nouvelle écriture de ces fractions.

- Les fractions en général doivent être traitées avant les décimaux. Ceux-ci ne sont qu'un cas particulier de fractions, les fractions décimales.
- Il est nécessaire de proposer aux élèves des exercices de représentation des fractions décimales sous forme de partage de bandes de papier et de surfaces :
 1. pour élargir le champ de connaissance des élèves ;
 2. pour leur permettre de généraliser les notions de fraction à différents partages.
- Quelles activités spécifiques mettre en place pour travailler les fractions décimales ?
 1. Proposer différentes activités ludiques.
 2. Partages de bandes de papier et de surfaces.
 3. Placement sur différentes droites graduées.
- Comment permettre aux élèves de comprendre le lien entre fraction décimale et nombre décimal ?
 1. Lien historique ; lien arbitraire.
 2. Comprendre la signification de la notation à virgule.
- Pourquoi est-il nécessaire de proposer des nombres entiers pendant toutes les activités concernant les nombres décimaux ?
 - Présenter les **nombres entiers** comme des **nombres décimaux particuliers**.

B. De la fraction aux nombres décimaux... une progression possible

■ Dès le CM1

On pourra s'employer à respecter les repères de progressivité ci-dessous.

- Notion de partage en parts égales :
 - nommer des fractions simples en utilisant **demi** ; **tiers** ; **quart**, etc.
- Présentation des fractions ; approche des bandelettes :
 - mesurer des bandes à partir d'une **bande unité** ; manipuler les bandes unité ; tracer des segments de longueur donnée en référence à une unité ; comparer des longueurs, etc.
- Présentation des fractions décimales, une approche par les jeux :
 - nommer des fractions simples en utilisant le vocabulaire **dixième**, **centième**.
- Passage de l'écriture fractionnaire à celle du nombre à virgule :
 - connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position ($1/100^e$) ;
 - passer d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale et réciproquement.

Écriture avec une seule fraction	Décomposition	Écriture à virgule
$\frac{256}{100}$	$2 + \frac{5}{10} + \frac{6}{100}$	2,56

- Comparer, ranger, encadrer les nombres décimaux :
 - savoir repérer les nombres décimaux et les placer sur une droite graduée ;
 - les comparer et les ranger ; entraîner les élèves à des comparaisons de fractions par rapport à des entiers ; recours au sens de l'écriture décimale, etc. ;
 - les encadrer par deux entiers consécutifs.

■ À partir du CM2

La progression des apprentissages veillera à mobiliser les étapes et conséquences ci-dessous.

- Composer, décomposer les nombres décimaux :
 - savoir produire des décompositions liées à une écriture à virgule en utilisant 10, 100, 1 000, etc. et 0,1 ; 0,01 ; 0,001, etc.
- Opérations avec les décimaux :
 - effectuer un calcul posé :
 - addition, soustraction, multiplication de deux nombres entiers ou décimaux ;
 - division d'un nombre décimal par un nombre entier.

EXERCICES D'APPLICATION

- 1 a. Est-il nécessaire de savoir compter pour dénombrer ?
b. Est-il suffisant de savoir compter pour dénombrer ?
- 2 Est-il nécessaire de savoir compter pour comparer ?
- 3 Comment donner du sens à un nombre entier à l'école maternelle ?
- 4 a. Qu'est-ce que la bande numérique ?
b. Faut-il commencer la bande numérique par 0 et pourquoi ?
- 5 Un parent dit que son enfant sait compter jusqu'à 100. Qu'en penser ? Que lui répondre ?
- 6 Est-il nécessaire de faire prendre conscience à un élève que les nombres entiers sont également des nombres décimaux ?
- 7 a. Comment peut-on lire le nombre 13,42 ?
b. Donner un avantage et un inconvénient de chacune des lectures possibles d'un nombre décimal écrit avec une virgule.
- 8 Citer quelques difficultés dans l'enseignement des nombres décimaux.
- 9 Quel peut-être le projet d'un enseignant qui écrit $\frac{49}{100} = 0 + \frac{4}{10} + \frac{9}{100}$?
- 10 Les nombres décimaux sont-ils efficaces dans la lecture de l'heure ? Pourquoi ?

■ Corrigés des exercices d'application

1 a. La réponse est **non pour les petites collections**, contenant 1, 2 ou 3 objets, car cela se voit d'un coup d'œil, ou encore pour les collections se présentant sous des formes particulières : constellations d'un dé, doigts de la main, dominos.

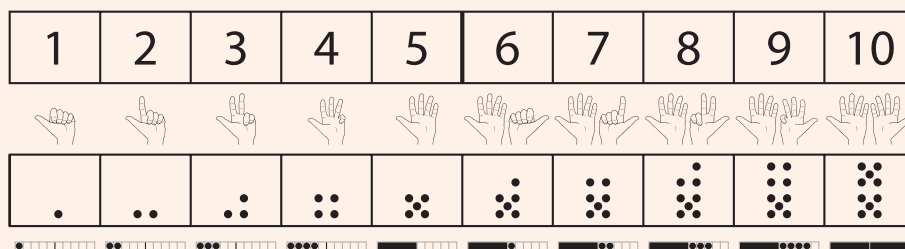
La réponse est oui lorsque les collections n'ont pas l'un des deux aspects précédents.

b. Non, ce n'est pas suffisant. Il faut synchroniser la récitation de la comptine numérique avec chacun des éléments de la collection, ne pas oublier d'élément, ne pas en compter un plusieurs fois, comprendre que le dernier nombre énoncé correspond à la totalité des éléments de la collection. Ainsi, si la collection possède 7 objets, comprendre que le 7 du « 7^e objet » correspond au 7 des « 7 objets ».

2 Non, par exemple, on peut faire une **correspondance 1-1** entre les éléments des deux collections, ou alors, si la différence de cardinal entre les deux collections est grande, cela peut se voir à l'œil.

3 Le nombre entier prend du sens quand il permet de **résoudre des problèmes**.

4 a. La **bande numérique** est une bande partagée en cases numérotées de façon ordonnée en partant de 1. Au départ, cette bande est rectiligne et contient peu de nombres, elle est construite au fur et à mesure avec les enfants comme par exemple ci-dessous :



Par la suite, on peut faire des « bandes » courbes, en deux dimensions, etc.

b. Non, il vaut mieux **la commencer par 1**, ainsi, la première case est numérotée 1, la deuxième case est numérotée 2, etc. Il y a correspondance entre le nombre écrit dans la case et le numéro de cette case, les deux sont les mêmes.

5 Il est tout à fait possible qu'un enfant de maternelle sache compter jusqu'à 100. Cependant, il s'agit dans ce cas d'une **simple récitation des nombres entiers**, ce que Rémi Brissiaud appelle « les mots nombres ».

6 Non, cela n'est pas nécessaire, la connaissance des nombres décimaux est déjà assez difficile, il est inutile de se perdre dans de telles considérations qui ne servent pas à l'élève.

7 a. La lecture usuelle est « treize virgule quarante-deux ». Une autre lecture est « treize unités quarante-deux centièmes » ou « treize unités quatre dixièmes deux centièmes ».

b. Pour la lecture usuelle :

- la lecture est facile et rapide, c'est la lecture « sociale » ;
- mais cette lecture renforce l'idée (fausse) qu'un nombre décimal est constitué de deux nombres entiers séparés par une virgule. Ainsi, il sera difficile d'expliquer que 4,8 est supérieur à 4,35, puisque l'on entend 8 et 35.

Pour l'autre lecture :

- elle donne du sens à ce type de nombre ;
- mais elle est plus « lourde » à mettre en œuvre.

⑧ • On peut fabriquer facilement des collections de 2, 5, 12, etc., objets, mais on ne peut pas fabriquer des collections de 1,6 ou 3,75 objets (aspect cardinal des nombres).

• On peut fabriquer un rectangle dont les dimensions, en cm, sont 13 et 7, mais pas un rectangle dont les dimensions, en cm, sont 13,508 et 7,002.

Autrement dit, les décimaux sont d'abord une construction mentale et non pas physique comme l'ont été les nombres entiers.

• Un décimal peut avoir plusieurs écritures dans son système propre, pas un entier. Ainsi $1,23 = 1,230$

En mathématiques, le « 0 » final n'est pas important en soi, encore qu'il permet de comprendre le fait que $1,23 > 1,229$ car $1,230 > 1,229$.

En physique, ce « 0 » final peut être important. Ainsi, une mesure de 1,23 m n'est pas identique à une mesure de 1,230 m. Dans le premier cas, la précision est de l'ordre du cm, dans le deuxième cas, elle est de l'ordre du mm.

• Il faut bien comprendre que l'écriture avec une virgule est une notation, un système économique d'écriture qui facilite les techniques opératoires mais qui masque la véritable nature des nombres. Avec cette notation, il y a perte de sens.

• Avec ce type d'écriture, les décimaux ressemblent à des entiers, se manipulent comme des entiers, peuvent se nommer comme des entiers, or, fondamentalement, ce ne sont pas des nombres entiers. Les règles de fonctionnement des entiers ne peuvent pas toutes être étendues aux décimaux, certaines oui, certaines non, et elles ne sont donc pas supprimées pour autant, ce qui crée une instabilité pour les élèves.

⑨ Ce peut être en prévision de l'écriture avec une virgule du nombre décimal correspondant, et qui est 0,49.

⑩ **Le système « heures, minutes, secondes » est un système à base 60**, puisqu'il faut 60 s pour faire 1 min, et 60 min pour faire 1 h. Or, **les nombres décimaux sont dans un système à base 10**, ils ne sont donc pas adaptés pour exprimer des heures. Ainsi, quand on dit « il est cinq heures quarante-et-une », cela signifie « il est cinq heures quarante-et-une minutes ». Alors que dans l'expression 5,41 h, 5, chiffre des unités, correspond à l'unité physique et correspond donc à 5 h, 4 signifie 4 dixièmes d'heure, et donc $4 \times 6 \text{ min} = 24 \text{ min}$, et 1 signifie 1 centième d'heure, soit $1 \times 36 \text{ s} = 36 \text{ s}$, finalement, $5,41 \text{ h} = 5 \text{ h } 24 \text{ min } 36 \text{ s}$.

ENTRAÎNEMENT À L'ÉPREUVE

Problèmes et exercices

EXERCICE 1

 Vous avez 10 minutes !

Session 2010, annales zéro

Écrire un entier à la place du carré pour que l'écriture fractionnaire désigne :

Un entier naturel	Un décimal non entier	Un rationnel non décimal
$\frac{\blacksquare}{115}$	$\frac{\blacksquare}{115}$	$\frac{\blacksquare}{115}$
$\frac{115}{\blacksquare}$	$\frac{115}{\blacksquare}$	$\frac{115}{\blacksquare}$

EXERCICE 2

 Vous avez 10 minutes !

Session 2008, académie de Polynésie française

- ① Trouver un nombre décimal compris entre 3,0001 et 3,01.
- ② Trouver un nombre non décimal compris entre 3,0001 et 3,01.
- ③ Trouver une fraction qui s'intercale entre $\frac{18}{31}$ et $\frac{19}{31}$.
- ④ Trouver une fraction qui s'intercale entre $\frac{5}{7}$ et $\frac{17}{11}$.

EXERCICE 3

 Vous avez 25 minutes !

Session 2008, concours blanc, académie de Créteil

- ① Parmi les 4 fractions suivantes, quelles sont celles qui représentent un nombre décimal ?

$$\frac{54}{1\,350} ; \frac{5}{100} ; \frac{17}{1\,024} ; \frac{50}{1\,275}.$$

- ② Quels sont tous les nombres entiers naturels n pour lesquels la fraction $\frac{n}{1\,050}$ représente :

- a. un nombre entier ? Justifier la réponse.
- b. un nombre décimal ? Justifier la réponse.
- c. un nombre rationnel non décimal ? Justifier la réponse.

- ③ Montrer que l'on peut donner, sans calcul, l'écriture à virgule du nombre $\frac{41}{333}$ à partir de l'égalité : $41 = 333 \times 0,123 + 0,041$.

- ④ Les nombres représentés par les fractions $\frac{171}{13\,888\,750}$ et $\frac{41}{3\,330\,000}$ sont-ils égaux ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4

 Vous avez 25 minutes !

Session 2009, groupement académique 2

Simplifier : $\frac{42}{78}$, $\frac{204}{136}$, $\frac{4\,095}{3\,465}$, $\frac{4\,716}{35\,370}$.

EXERCICE 5

 Vous avez 10 minutes !

Session 2009, groupement académique 3

On considère les deux nombres $\frac{29}{55}$ et $\frac{39}{75}$.

- ❶ Sont-ils des nombres décimaux ?

Pour chacune des questions suivantes, on n'utilisera pas l'écriture à l'aide d'une virgule de chacun de ces deux nombres.

- ❷ Comparer ces deux nombres.
- ❸ Trouver un nombre décimal strictement compris entre ces deux nombres.
- ❹ Trouver une fraction qui ne soit pas un nombre décimal, strictement comprise entre ces deux nombres.

Analyse de supports d'enseignement et de productions d'élèves

EXERCICE 1

 Vous avez 45 minutes !

Épreuve 3 inédite

 **Entoure par 10, puis complète.**



 Il y a paquets de 10 pommes
 et pommes isolées.
 Cela fait pommes en tout.
(Extrait de *Outils pour les maths CP*, éditions Magnard.)

- ❶ Quelles sont les stratégies possibles pour répondre correctement à cet exercice (compétences utilisées) ?

1. Les différents types de nombres

A) Travail de Jordan

Entoure par 10, puis complète.



Il y a 2 paquets de 10 pommes
et 4 pommes isolées.
Cela fait 24 pommes en tout.

B) Travail de Léa

Entoure par 10, puis complète.



Il y a 3 paquets de 10 pommes
et 7 pommes isolées.
Cela fait 30 pommes en tout.

- 2 Analyser le travail de ces deux élèves (procédure utilisée).
- 3 Donner une explication sur la source d'erreur possible.
- 4 Quelle(s) remédiation(s) envisager pour chacun d'eux ?

EXERCICE 2

 Vous avez 45 minutes !

Épreuve 3 inédite

Ranger ces exercices¹ dans un ordre de difficulté croissant.

À quel niveau de classe pourrait-on proposer chacun des exercices ?

Justifier sa réponse.

Document A

S Complète.

100	108	110
....	509	
360		
990	994	
....		600

Document B

6 Justine a 42 vignettes de plus que Xavier.
Xavier en possède 260 de moins que Barnabé.
Justine a 148 vignettes.
Combien chaque enfant possède-t-il de vignettes ?



¹ Les exercices sont issus d'ouvrages des collections « La tribu des maths » et « Outils pour les maths », Magnard.

Document C

1 Entoure chaque fois la plus petite collection.

Document D

2 Vrai ou faux ?

- a) $52,2 < 52,02$
- b) $37,50 < 37,05$
- c) $123,57 = 123,570$
- d) $302,203 < 203,204$
- e) $1,899 > 2,102$

Document E

4 Recopie ces nombres dans l'ordre croissant.

18 184 102 300 94 166 120 012 49 588 182 004 102 039

Document F

4 Écris le nombre juste avant et le nombre juste après.

37	50	61	46	59
----	----	----	----	----

Document G

Entraînement

1 Dans une réunion d'athlétisme, pendant l'épreuve du lancer de javelot, six concurrents ont lancé leur engin dans la même zone :

A : 77,06 m B : 77,16 m

C : 77,60 m D : 77,61 m

E : 77,01 m F : 77,10 m

Peux-tu établir le classement ?

1. Les différents types de nombres

Document H

10 $\frac{15\,698}{1\,000}$ est-il plus grand que 15,689 ?

Document I

3 Écris les nombres et range-les du plus petit au plus grand (↗).

$7d\,6u$ $90 + 3$ $10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 7$ $10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 5$

EXERCICE 3

Voici quelques erreurs types qui sont régulièrement repérées chez les élèves dans des situations d'utilisation des nombres décimaux ou des fractions décimales. Proposer une ou plusieurs explications de leur origine.

Erreurs types	Hypothèse possible concernant la source de l'erreur
a. $1,5 + 1,6 = 2,11$	
b. $4,25 < 4,158$	
c. $2,342 < 2,14$	
d. $12,354 > 9,54$ Ou $5,999 > 6$	
e. $16,51 \times 10 = 160,51$	
f. $7,5 < 7,50$	

EXERCICE 4

Pour ces erreurs ou maladresses relevées, que pourrait-on recommander ou proposer comme remédiation ?

Erreurs ou maladresses relevées	Ce que l'on pourrait plutôt recommander
Oralisation de « 1,8 » : un virgule huit $1,81 \rightarrow$ un virgule quatre-vingt-un	
Un nombre décimal, c'est un nombre à virgule.	

Mathématiques

Le manuel complet pour réussir les parties 1, 2 et 3 de l'épreuve !

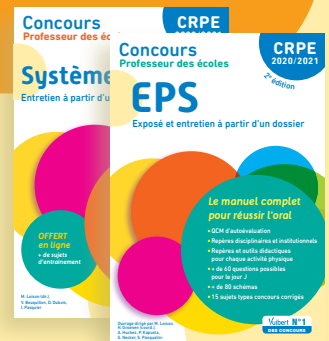
- **Méthodologie** de l'épreuve et analyse des questions déjà tombées au CRPE
- Pour **chaque notion** :
 - les **savoirs disciplinaires**
 - suivis des **savoirs et pratiques didactiques associés**
- **150 QCM d'autoévaluation** suivis de conseils
- **350 exercices d'application corrigés**
- **150 entraînements types concours**
- **Annales 2019 corrigées**

**OFFERT
en ligne**
• Annales 2020

Et aussi

Le manuel complet
pour l'épreuve
de français

Les manuels
complets pour les
épreuves orales



ISBN : 978-2-311-20882-5



9 782311 208825

Vuibert N°1
DES CONCOURS