

Admis
au **CRPE**

**NOUVEAU
CONCOURS**

ADMISSIBILITÉ
**2027
2028**

L3

MATHS

Le manuel pour réussir l'épreuve écrite

Conforme au nouveau programme
du cycle 4

- ✓ Méthodes et conseils du jury
- ✓ Tous les savoirs disciplinaires
- ✓ Des résumés de cours en schémas
- ✓ + de 300 QCM et exercices corrigés
- ✓ 2 sujets intégralement corrigés et commentés

M. Loison (dir.)
J.-R. Delplace

OFFERT



**PARCOURS
NUMÉRIQUES
DE RÉVISIONS
& TUTOS VIDÉO**

Déjouez les pièges
les plus courants
au concours !

N°1 **Vuibert**
DES CONCOURS

Admis
au **CRPE**

**NOUVEAU
CONCOURS**

**ADMISSIBILITÉ
2027
2028**

L3

MATHS

Le manuel pour réussir l'épreuve écrite

Ouvrage dirigé par Marc Loison

Docteur en histoire de l'éducation et sciences de l'éducation,
maître de conférences honoraire en histoire contemporaine de l'université d'Artois,
titulaire d'un DEA en techniques quantitatives et statistiques,
ancien président de jury CRPE

Jean-Robert Delplace

Professeur honoraire en INSPE, agrégé de mathématiques,
titulaire d'un master 2 en didactique des mathématiques

N°1 **Vuibert**
DES CONCOURS

Vuibert s'engage
durablement pour l'environnement



ISBN : 978-2-311-22375-0

Conception de la couverture : Primo & Primo

Réalisation de la couverture : Les PAOistes

Conception de l'intérieur : Primo & Primo

Composition : PCA

Ce livre ne peut être reproduit ni utilisé à des fins d'entraînement de systèmes d'intelligence artificielle. La fouille de textes et de données est interdite conformément à l'article 4(3) de la Directive (UE) 2019/790.

Dans le cas où le livre comporte des ressources numériques en ligne, ces dernières sont des compléments offerts à l'achat du livre. Par respect du droit d'auteurs, ces ressources sont incessibles, interdites de reproduction et réservées à un usage strictement personnel. Elles sont soumises aux conditions d'utilisation en vigueur (CGU) accessibles sur notre site et peuvent, pour des raisons commerciales, légales, d'évolution technique ou de contenu, être supprimées ou interrompues à tout moment, sans garantie de maintien ou de compensation.

Dans le cas où les QR codes et liens hypertextes permettent d'accéder à des sites internet tiers, la responsabilité de Vuibert n'est pas engagée, notamment quant à leur éventuel dysfonctionnement ou à leur indisponibilité d'accès.



La loi du 11 mars 1957 n'autorisant aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Le « photocopillage », c'est l'usage abusif et collectif de la photocopie sans autorisation des auteurs et des éditeurs. Largement répandu dans les établissements d'enseignement, le « photocopillage » menace l'avenir du livre, car il met en danger son équilibre économique. Il prive les auteurs d'une juste rémunération. En dehors de l'usage privé du copiste, toute reproduction totale ou partielle de cet ouvrage est interdite. Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur.

S'adresser au Centre français d'exploitation du droit de copie : 20, rue des Grands-Augustins, F-75006 Paris. Tél. : 01 44 07 47 70

© Vuibert – juin 2026 – 5, allée de la 2^e DB – 75015 Paris

Site Internet : <http://www.vuibert.fr>

.....Sommaire.....

Mode d'emploi	8	QCM d'autoévaluation	12
Avant-propos	10	Table des savoir-faire à maîtriser ...	22
Les épreuves du CRPE destinées aux L3	11		

PARTIE 1 / NOMBRES ET CALCULS

1 LES DIFFÉRENTS TYPES DE NOMBRES

Autoévaluation	24
Cours	26
1. Nombres et ensembles de nombres...	26
2. Nombres entiers naturels	26
3. Nombres entiers relatifs	27
4. Nombres rationnels	28
5. Nombres décimaux	28
6. Nombres irrationnels	29
7. Représentations des ensembles de nombres.	30
8. Une autre écriture des nombres.	31
9. Écriture scientifique d'un nombre	33
Schéma bilan	35
QCM bilan	36
Entraînements	39
Corrigés	41

2 NUMÉRATION DE POSITION

Autoévaluation	45
Cours	48
1. Généralités	48
2. Systèmes de numérations à base	49
Schéma bilan	55
QCM bilan	56
Entraînements	57
Corrigés	60

3 NOMBRES ET OPÉRATIONS

Autoévaluation	66
Cours	68
1. L'addition	68
2. La soustraction	70
3. La multiplication	70
4. La division	74
5. Opérations et calcul littéral	77
Schéma bilan	80
QCM bilan	81
Entraînements	83
Corrigés	87

4 ARITHMÉTIQUE

Autoévaluation	94
Cours	97
1. Multiples et diviseurs	97
2. Nombres premiers	99
3. Division euclidienne	101
Schéma bilan	103
QCM bilan	104
Entraînements	105
Corrigés	110

PARTIE 2 / ESPACE ET GÉOMÉTRIE

5 ÉLÉMENTS DE BASE DE LA GÉOMÉTRIE PLANE EUCLIDIENNE

Autoévaluation	120
Cours	122
1. Plan et droites du plan.	122
2. Positions relatives de deux droites du plan.	124
3. Notion de longueur et de distance	126
4. Repérage d'un point	129
Schéma bilan	132
QCM bilan	133
Entraînements	134
Corrigés	136

6 ANGLES

Autoévaluation	143
Cours	145
1. Définition.	145
2. Classification des angles	145
3. Mesure d'un angle	146
4. Positions possibles de deux angles.	146
5. Droites sécantes, droites parallèles et angles	147
6. Angles et triangles	148
7. Notion de trigonométrie.	149
Schéma bilan	151
QCM bilan	152
Entraînements	154
Corrigés	157

7 POLYGONES

Autoévaluation	162
Cours	165
1. Polygones	165
2. Triangles	166
3. Trapèzes	172
4. Parallélogrammes	173

Schéma bilan	178
QCM bilan	179
Entraînements	181
Corrigés	183

8 GRANDS THÉORÈMES

Autoévaluation	192
Cours	195
1. Théorème de Pythagore	195
2. Théorème de Thalès	196
3. Droite des milieux d'un triangle	197
Schéma bilan	198
QCM bilan	199
Entraînements	200
Corrigés	202

9 TRANSFORMATIONS DU PLAN

Autoévaluation	206
Cours	209
1. Translation	209
2. Symétrie axiale	210
3. Symétrie centrale	210
4. Rotation	211
5. Homothétie	212
Schéma bilan	213
QCM bilan	214
Entraînements	216
Corrigés	218

10 VECTEURS DU PLAN

Autoévaluation	224
Cours	226
1. Définitions.	226
2. Relation de Chasles (somme de deux vecteurs)	227
3. Opposé d'un vecteur	228

4. Double d'un vecteur	228	1. Polyèdres.....	238
5. Caractérisation vectorielle d'un parallélogramme.....	229	2. Polyèdres réguliers.....	239
6. Milieu d'un segment et vecteur	229	3. Différents types de polyèdres	241
Schéma bilan	230	4. Solides non polyèdres.....	242
QCM bilan	231	5. Patron d'un solide.....	243
Entraînements	233	6. Sections planes de solides.....	244
Corrigés	234	7. Droites et plans de l'espace.....	246
11 SOLIDES		8. Repérage sur/dans un solide.....	247
Autoévaluation	236	Schéma bilan	250
Cours	238	QCM bilan	251
		Entraînements	254
		Corrigés	256

PARTIE 3 / GRANDEURS ET MESURES

12 GRANDEURS, GRANDEURS DE LA GÉOMÉTRIE ET FORMULES DE MESURES		3. Préfixes usuels.....	270
Autoévaluation	264	4. Formules usuelles.....	271
Cours	267	Schéma bilan	274
1. Définitions.....	267	QCM bilan	275
2. Grandeurs usuelles.....	268	Entraînements	276
		Corrigés	278

PARTIE 4 / ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS

13 PROPORTIONNALITÉ		14 APPLICATIONS USUELLES DE LA PROPORTIONNALITÉ	
Autoévaluation	284	Autoévaluation	305
Cours	287	Cours	308
1. Définitions.....	287	1. Pourcentages.....	308
2. Propriétés des suites proportionnelles	289	2. Échelles	311
3. Notion de ratio.....	294	3. Vitesse, distance et temps.....	312
Schéma bilan	295	Schéma bilan	314
QCM bilan	296	QCM bilan	315
Entraînements	297	Entraînements	316
Corrigés	300	Corrigés	320

15 FONCTIONS

Autoévaluation	327
Cours	330
1. Définitions et notations	330
2. Fonctions usuelles	330
3. Représentation graphique d'une fonction	331
Schéma bilan	336
QCM bilan	337
Entraînements	340
Corrigés	345

16 STATISTIQUES

Autoévaluation	349
Cours	352
1. Vocabulaire	352

2. Éléments caractéristiques d'une série statistique	355
Schéma bilan	360
QCM bilan	361
Entraînements	362
Corrigés	366

17 PROBABILITÉS

Autoévaluation	373
Cours	376
1. Langage des probabilités	376
2. Calcul des probabilités	380
Schéma bilan	383
QCM bilan	384
Entraînements	386
Corrigés	391

PARTIE 5 / PROBLÈMES

18 PROBLÈMES RÉSOLUS PAR L'ARITHMÉTIQUE OU PAR L'ALGÈBRE

Autoévaluation	398
Cours	400
1. Résolution par la méthode algébrique	400

2. Résolution par une méthode arithmétique	402
Schéma bilan	405
QCM bilan	406
Entraînements	407
Corrigés	411

PARTIE 6 / ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION

19 TABLEUR INFORMATIQUE ET LOGICIEL SCRATCH

Autoévaluation	418
Cours	421
1. Vocabulaire	421

2. Le logiciel Scratch	424
Schéma bilan	433
QCM bilan	434
Entraînements	437
Corrigés	447

PARTIE 7 / SUJET CORRIGÉ

20 SUJET 2026

Corrigé	460
Index	462

SOMMAIRE DES RESSOURCES NUMÉRIQUES

RETROUVEZ TOUTES LES RESSOURCES NUMÉRIQUES POUR ALLER PLUS LOIN :

- | | | | |
|----------------------------|-------------|-------------------|-------------|
| ✓ QCM | | ✓ Entraînements | |
| • 150 QCM interactifs..... | p. 17 | • Parcours 1..... | p. 446 |
| ✓ Flashcards | | • Parcours 2..... | p. 344 |
| • Parcours 1..... | p. 420 | • Parcours 3..... | p. 277 |
| • Parcours 2..... | p. 329 | • Parcours 4..... | p. 201 |
| • Parcours 3..... | p. 286 | • Parcours 5..... | p. 299, 319 |
| • Parcours 4..... | p. 194 | ✓ Sujet corrigé | |
| • Parcours 5..... | p. 307 | • Sujet zéro..... | p. 459 |
| ✓ Applications | | ✓ Tutos vidéos | |
| • Parcours 1..... | p. 431 | • Tuto 1..... | p. 76 |
| • Parcours 2..... | p. 335 | • Tuto 2..... | p. 311 |
| • Parcours 3..... | p. 273 | • Tuto 3..... | p. 293, 335 |
| • Parcours 4..... | p. 196 | | |
| • Parcours 5..... | p. 293, 313 | | |

RETROUVEZ ICI L'ENSEMBLE DES PARCOURS DE RÉVISION :



.....Note des auteurs.....

De nouveaux programmes en mathématiques pour le cycle 4 entreront progressivement en vigueur :

- en 2026 pour la cinquième ;
- en 2027 pour la quatrième et
- en 2028 pour la troisième.

Malgré l'application différée des nouvelles notions dans le temps, nous avons pris le parti de déjà les faire figurer dans les éléments de cours, les évaluations et les exercices du présent manuel. Ces nouvelles notions concernent principalement les triangles (construction, triangle grec, médianes, centre de gravité, droite des milieux, bissectrices) ; contraposées des théorèmes de Pythagore et de Thalès ; section d'une boule par un plan ; vecteurs et relation de Chasles ; théorème de Varignon ; statistiques (évolution moyenne et médiane, quartiles et boîte à moustache) ; probabilité de la réunion de deux événements.

.....Mode d'emploi.....

En début de manuel

QCM d'autoévaluation

Dans ce QCM, chaque question peut n'avoir aucune réponse correcte, ou en avoir une ou plusieurs.

Nombres et calculs

- Combien de zéros y a-t-il dans l'écriture du nombre dix milliards dix millions ?
☐ a. 5 ☐ b. 8 ☐ c. 9 ☐ d. 11
- Le nombre 10 202 333 :
☐ a. n'a pas de diviseur ☐ b. a exactement deux diviseurs
☐ c. n'a un seul diviseur ☐ d. a au moins trois diviseurs
- On considère la fraction $\frac{202}{438}$.
☐ a. 202 est un nombre premier.
☐ b. La fraction est irréductible.
☐ c. La fraction est l'écriture fractionnaire d'un nombre décimal.
☐ d. La fraction est l'écriture d'un nombre rationnel.
- La fraction irréductible égale à $\frac{882}{1134}$ est :
☐ a. $\frac{7}{9}$ ☐ b. $\frac{14}{19}$ ☐ c. $\frac{63}{89}$ ☐ d. $\frac{441}{2027}$
- L'écriture en notation scientifique du nombre 2 350 000 000 est :
☐ a. $2,35 \times 10^7$ ☐ b. $2,31 \times 10^9$ ☐ c. $0,231 \times 10^{10}$ ☐ d. $2,310 \times 10^9$
- Le carré du nombre $15 + \frac{4}{5}$ a pour partie décimale :
☐ a. 10 ☐ b. $\frac{16}{100}$ ☐ c. $\frac{56}{100}$ ☐ d. 175,5
- La somme des carrés de deux entiers consécutifs :
☐ a. est un nombre impair ☐ b. peut se terminer par 4
☐ c. est un nombre pair ☐ d. est divisible par 8
- On donne n, nombre entier, et on considère les propositions suivantes :
P1 : n peut être un nombre premier.
P2 : n+1 est toujours un nombre premier.
P3 : n n'est jamais un nombre premier.
P4 : (n+1)² - (n-1)² n'est jamais un nombre premier.
P5 : (n+1)² peut être un nombre premier.
Combien y a-t-il de propositions vraies ?
☐ a. 0 ☐ b. 2 ☐ c. 3 ☐ d. 4

Un QCM d'autoévaluation pour identifier vos forces et vos faiblesses et vous aider à organiser vos révisions

Des conseils de formateurs pour faire le lien entre les différentes notions

Dans chaque chapitre

7 Polygones

Objectifs concrets

- ✓ Définir et connaître les propriétés des principaux polygones.
- ✓ Maîtriser le vocabulaire associé aux polygones.
- ✓ Connaître les propriétés des triangles particuliers et les théorèmes associés.
- ✓ Savoir définir et construire les droites remarquables d'un triangle (hautes, médianes).
- ✓ Savoir comparer des triangles et démontrer qu'ils sont semblables ou égaux.
- ✓ Savoir démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, un rectangle, un losange ou un carré.
- ✓ Construire des polygones en appliquant certaines contraintes géométriques.

Autoévaluation

Pour chaque question, il peut y avoir plusieurs bonnes réponses.

- Le triangle isocèle :
 - ☐ a. n'est jamais équilatéral
 - ☐ b. n'a jamais d'angle obtus
 - ☐ c. possède un centre de symétrie
 - ☐ d. possède un axe de symétrie
- Les diagonales d'un quadrilatère sont perpendiculaires, alors ce quadrilatère :
 - ☐ a. est un losange
 - ☐ b. n'est jamais un rectangle
 - ☐ c. admet un centre de symétrie
 - ☐ d. n'est pas nécessairement de type particulier
- Si un quadrilatère convexe a deux côtés parallèles et deux côtés de la même longueur, alors ce quadrilatère :
 - ☐ a. est un parallélogramme
 - ☐ b. est un trapèze isocèle
 - ☐ c. est un trapèze
 - ☐ d. a des diagonales de même milieu
- Un parallélogramme :
 - ☐ a. admet deux axes de symétrie
 - ☐ b. admet un centre de symétrie
 - ☐ c. a des angles consécutifs supplémentaires
 - ☐ d. est un rectangle
- Quelles sont ses vraies réponses ?
 - ☐ a. Tout carré est un losange
 - ☐ b. Un rectangle est un parallélogramme
 - ☐ c. Tout parallélogramme est un trapèze
 - ☐ d. Tout carré n'est pas un rectangle.

Une liste des savoir-faire à acquérir pour vous fixer des objectifs d'apprentissage

Un QCM pour faire le point sur vos connaissances

Pour les questions 6 et 7, on considère un trapèze ABCD de bases (AB) et (CD), deux lignes parallèles se coupant en O.

Les triangles AOD et COB sont :
☐ a. égaux ☐ c. homothétiques
☐ b. semblables ☐ d. quelconques (l'un pour l'autre)

Les triangles AOB et COD sont :
☐ a. égaux ☐ c. homothétiques
☐ b. semblables ☐ d. quelconques (l'un pour l'autre)

Conseils

Le cours sur les polygones comporte de nombreuses définitions et propriétés mettant en jeu beaucoup de connaissances, des anciennes, comme les notions de milieu, de diagonales ou les éléments de symétrie.

Une des difficultés majeure se trouve dans la démonstration de la nature d'un quadrilatère pour laquelle il est très facile de donner une liste de propriétés, mais d'utiliser une propriété caractéristique. Par exemple, pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, montrer que les diagonales ont le même milieu est suffisant, invoquer le parallélisme des côtés qui en est une conséquence est inutile.

Corrigés

4. La médiane de la base est, axe de symétrie du triangle. La réponse a est fautive, car tout triangle équilatéral est isocèle en chacun de ses sommets, et donc, certains triangles isocèles sont équilatéraux. La réponse b est fautive, voir un contre-exemple.

5. Voir le dessin, qui indique aussi que les réponses a et c sont fausses. La réponse b est fautive, car ce quadrilatère peut être un carré, qui est un rectangle particulier.

6. Prolonger la diagonale à deux côtés parallèles, c'est un trapèze. Non nécessairement isocèle. ABC // DC et AB = AD.

Des renvois vers le cours pour vous reporter vers les notions non maîtrisées

Un cours illustré d'exemples pour bien assimiler les notions

Des exercices d'application pour mettre en pratique les principales notions

Cours

On appelle **diagonale** tout segment qui joint deux sommets non consécutifs.

A. Polygones réguliers

Un **polygone régulier** est un polygone convexe qui a tous ses côtés de la même longueur et tous ses angles égaux.

Exemple

Un triangle équilatéral et un carré sont des polygones réguliers.

Application 1

Construire un triangle équilatéral en utilisant uniquement la règle non graduée et le compas.

Construire un carré en utilisant uniquement la règle non graduée et le compas.

2. Triangles

A. Généralités

Un triangle est un polygone qui a trois côtés.

Un triangle est encore défini par des propriétés non algébriques.

3 côtés : [AB], [AC] et [BC].
3 angles : $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$.

B. Triangles particuliers

1. ABC est équilatéral.

3 côtés de même longueur : $AB = AC = BC$.
3 angles égaux : $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$.

2. ABC est un triangle rectangle en A.

(AB) et (AC) sont perpendiculaires à (AC).
(BC) est l'hypoténuse du triangle.

Application 7

Vrai ou faux ?
Si deux triangles ont leurs trois angles respectivement égaux, alors, ils sont égaux.

Application 8

Démontrer que dans un triangle ABC isocèle en A, les hauteurs [BH] et [CK] ont la même longueur.

La médiane est-elle vraie, c'est-à-dire si, dans un triangle ABC, deux hauteurs ont la même longueur, ce triangle est-il isocèle ?

E. Triangles semblables

a. Définition

Deux triangles sont semblables quand leurs angles sont égaux deux à deux.

Exemple

Les deux triangles ABC et DEF sont tels que $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$, alors ils sont semblables.

Si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, alors ces deux triangles sont semblables, puisque le somme des angles d'un triangle est 180° , et donc ces deux triangles ont la même troisième angle.

b. Théorèmes

Si deux triangles sont semblables, alors les longueurs de leurs côtés respectifs sont proportionnelles. La réciproque est vraie.

Exemple

Dans l'exemple précédent, on a donc $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$.

Dans un triangle, toute droite parallèle à l'un de ses côtés détermine un triangle semblable à celui-ci.

Exemple

Dans ABC, (DE) // (BC), donc les deux triangles ABC et ADE sont semblables (on retrouve la configuration du théorème de Thalès dans le triangle, voir chapitre 8).

Des renvois vers les corrigés pour vous évaluer

Des renvois vers d'autres exercices pour approfondir votre entraînement

Exercices et problèmes

13

EXERCICE 1

On donne les nombres rationnels suivants : $A = \frac{564}{100}$ et $B = \frac{174}{25}$.

- A et B ont-ils la même dénominateur ?
- Le nombre $A + B$ est-il un nombre décimal ?
- Que peut-on en conclure ?

... corrigé p. 81

14

EXERCICE 2

● Trouver le nombre manquant : $\frac{1}{10} - \frac{1}{20} = \frac{1}{100}$, $\frac{1}{20} - \frac{1}{100} = \frac{1}{100}$, $\frac{1}{100} - \frac{1}{100} = 0$

● Calculer $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, puis $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ puis $\frac{1}{5} - \frac{1}{6}$

Généraliser en établissant la formule correspondante, et en démontrant que la propriété est toujours vraie.

● Vérifier que les nombres suivants sont supérieurs à 2 :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \frac{1}{5}, \frac{1}{5} + \frac{1}{6}, \frac{1}{6} + \frac{1}{7}, \frac{1}{7} + \frac{1}{8}, \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$$

Puis finalement, montrer que si a et b sont deux nombres entiers strictement positifs distincts, alors le nombre $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ est supérieur à 2.

... corrigé p. 81

15

EXERCICE 3

On effectue la calculatrice les opérations ci-dessous :

$$10^2 - 10^2 = 10^2 - 10^2 = 4$$

$$10^2 - 4^2 = 4^2 - 4^2 = 4$$

● Peut-on déduire quelque chose sur une autre série de quatre nombres consécutifs et émettre une conjecture.

● Prouver que la conjecture faite précédemment est vraie.

... corrigé p. 81

[illegible]

Des synthèses et des bilans des acquis

En fin de manuel

[illegible]

Index

Cet index cible les notations figurant dans la terminologie appliquée, au cycle 4 (*bulletin officiel* n° 30, 30 juillet 2020). Ces notations sont régulièrement rencontrées dans les supports de travail comme dans les questionnaires. Les *renseignements figurant dans cet index* ne sont *pas* seulement exhaustifs, ils ne concernent que les éléments essentiels figurant dans le cours et certains annuels.

Ils ne sont *pas* applicables, ni aux applications, ni aux entraînements.

A	D
Abécédaire 124, 121	Déplacement 123, 186
Aggravement 199, 283	Déplacement 123, 186
Alphabète, algorithmique et programmation 15, 19, 383, 385, 386, 387, 390, 391, 398	Différence 67, 73, 124
Altitude 221	Dichotomie 68, 72, 124
Angles rhéomes-infernes 141	Distribuer 71, 72, 73, 92, 94, 96, 97
Angles correspondants 141	Duchénil 97
	Division euclidienne 70, 97, 392
B	E
Boucle 218, 220, 244	Echelle 282
	Efficacité 321, 322
C	Équation 74, 364, 365
Calcul linéaire 73	Euclide 124
Coefficient de proportionnalité 259, 279	
Cône 217, 220, 244	F
Conversion 15, 241	Fonction 302
Courbe 143	Fonction affine 301, 303
Cube 213, 214, 215, 216, 218, 219, 239, 242, 244	Fonction bilinéaire 305, 303
Cylindre 217, 220, 244	Fonction 26, 27, 279
	Fréquence 322



9

.....Avant-propos.....

Le concours de recrutement des professeurs des écoles (CRPE) a été modifié tant dans ses contenus que dans ses objectifs. Il est désormais ouvert dès le niveau bac + 3.

L'arrêté du 17 avril 2025 fixant les modalités d'organisation du concours externe et des concours externes spéciaux de recrutement de professeurs des écoles précise que la première épreuve écrite d'admissibilité vise à évaluer les connaissances disciplinaires en français et en mathématiques du candidat.

Le sujet de mathématiques est constitué de plusieurs exercices ou problèmes. L'épreuve permet d'apprécier la connaissance des notions du programme et l'aptitude à les mobiliser. Elle sollicite également les capacités de raisonnement et d'expression écrite du candidat.

Notons enfin que cette épreuve consacrée aux mathématiques est notée sur 10 et coefficientée 5. Une note égale ou inférieure à 2,5 est éliminatoire.

On aura aisément constaté que cette épreuve disciplinaire porte, à juste titre, sur la nécessaire maîtrise des concepts et notions que le futur professeur des écoles sera amené à enseigner.

Pour répondre à cet objectif le candidat au CRPE trouvera dans ce manuel l'ensemble des notions enseignées au collège, complétées par de nombreux exercices d'application et d'entraînement.

Enfin, afin d'améliorer et de structurer efficacement la préparation à cette épreuve écrite de mathématiques quelques outils supplémentaires sont proposés à savoir :

- Des **tests d'autoévaluation** en début d'ouvrage et de chapitre.
- Un **schéma bilan** des notions fondamentales à maîtriser accompagné d'un **QCM bilan** à la fin de chaque chapitre.
- Une **table des savoir-faire** à maîtriser et des **outils** mis à disposition.
- Des **indications de durée** pour les entraînements.
- Un **index** en fin d'ouvrage pour retrouver facilement dans le manuel de mathématiques toutes les **notions clés à maîtriser**.

Les auteurs de cet ouvrage et moi-même espérons que ce manuel ainsi conçu et doté de ses multiples outils méthodologiques vous permettra de vous préparer efficacement et en toute sérénité à l'épreuve écrite d'admissibilité de mathématiques.

Sa mise en œuvre éditoriale n'aurait pas été possible sans l'aide précieuse de Mathilde Capretti et Kévin Lacroix que je tiens ici personnellement à remercier.

Marc Loison

Directeur de l'ouvrage.

Les épreuves du CRPE

.....destinées aux L3.....

	Durée	Note / Coefficient	Contenu principal	Éliminatoire
Admissibilité				
Épreuve écrite 1 : Français / Mathématiques	4 heures	/20 – Coeff. 5	• Français (10 pts) : support : texte de 500 mots maximum 3 phases : étude de la langue, lexicologie, courte rédaction sur texte • Maths (10 pts) : exercices/problèmes niveau cycle 4	Note $\leq 2,5$ dans l'une des deux parties
Épreuve écrite 2 : 3 disciplines au choix parmi 4	4 heures	/20 – Coeff. 3	• 3 choix entre : Histoire-Géo/EMC, Sciences/Techno, Arts, Langue vivante (niveau B1 CECRL) • Évaluation : connaissances, analyse, expression à partir de documents	Note globale ≤ 5
Admission				
Épreuve orale 1 : Français ou Mathématiques (au choix)	1 heure (préparation : 1 heure)	/20 – Coeff. 5	• Exposé (20 min) : mobilisation d'une notion à partir de documents • Échange (40 min) : approfondissement, élargissement disciplinaire	Note 0
Épreuve orale 2 : EPS et motivation	55 minutes EPS 20 minutes (préparation : 10 minutes)	/20 – Coeff. 3	• EPS (8 pts) : exposé + échange sur une question au choix parmi deux (thèmes : culture sportive, corporelle, citoyenne) • Motivation (12 pts) : parcours, valeurs, mise en situation	Note 0 dans l'une des deux parties

QCM

d'autoévaluation

Dans ce QCM, chaque question peut n'avoir aucune réponse correcte, ou en avoir une ou plusieurs.

Nombres et calculs

- ❶ Combien de zéros y a-t-il dans l'écriture du nombre dix milliards dix millions dix ?
☐ a. 5 ☐ b. 8 ☐ c. 9 ☐ d. 11
- ❷ Le nombre 101 202 033 :
☐ a. ne possède aucun diviseur ☐ c. a exactement deux diviseurs
☐ b. a un seul diviseur ☐ d. a au moins trois diviseurs
- ❸ On considère la fraction $\frac{291}{438}$.
☐ a. 291 est un nombre premier.
☐ b. La fraction est irréductible.
☐ c. La fraction est l'écriture fractionnaire d'un nombre décimal.
☐ d. La fraction est l'écriture d'un nombre irrationnel.
- ❹ La fraction irréductible égale à $\frac{882}{1\,134}$ est :
☐ a. $\frac{7}{9}$ ☐ b. $\frac{14}{9}$ ☐ c. $\frac{63}{81}$ ☐ d. $\frac{441}{567}$
- ❺ L'écriture en notation scientifique du nombre 2 310 000 000 est :
☐ a. 231×10^7 ☐ b. $2,31 \times 10^9$ ☐ c. $0,231 \times 10^{10}$ ☐ d. $2\,310 \times 10^6$
- ❻ Le carré du nombre $13 + \frac{4}{10}$ a pour partie décimale :
☐ a. $\frac{5}{10}$ ☐ b. $\frac{16}{100}$ ☐ c. $\frac{56}{100}$ ☐ d. 179,5
- ❼ La somme des carrés de deux impairs consécutifs :
☐ a. est un nombre impair ☐ c. peut se terminer par 4
☐ b. est un nombre pair ☐ d. est divisible par 8
- ❽ On donne n , nombre entier, et on considère les propositions suivantes :
P1 : $2n$ peut être un nombre premier.
P2 : $n + 1$ est toujours un nombre premier.
P3 : n^2 n'est jamais un nombre premier.
P4 : $(n + 1)^2 - (n - 1)^2$ n'est jamais un nombre premier.
P5 : $(2n + 1)^2$ peut être un nombre premier.
Combien y a-t-il de propositions vraies ?
☐ a. 0 ☐ b. 2 ☐ c. 3 ☐ d. 4

9 On considère les expressions suivantes :

$$A = x^2 - 64; B = 9x^2 + 16; C = 5x^2 - 9; D = -25x^2 + 169; E = 4x^4 - 49; F = 2x^2 - 7$$

Combien d'expressions peut-on factoriser ?

☐ a. 2

☐ b. 3

☐ c. 4

☐ d. 5

Espace et géométrie

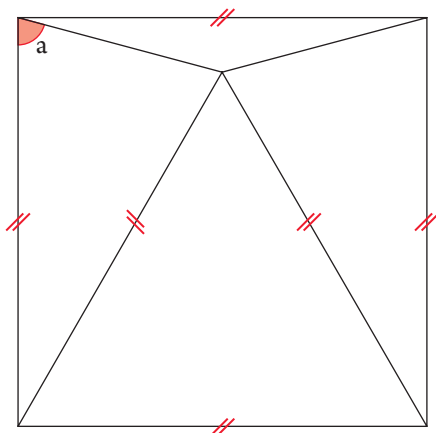
10 Dans ce carré, l'angle $\widehat{a}$ mesure :

☐ a. 72°

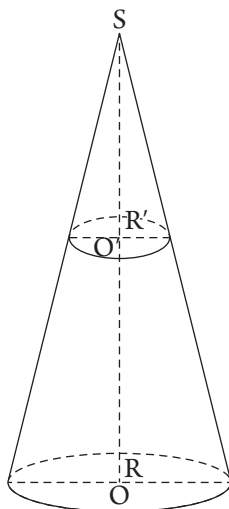
☐ b. 75°

☐ c. 70°

☐ d. 80°



11 Dans le dessin ci-dessous, les bases des deux cônes sont parallèles. On donne : $SO' = 18$ cm, $SO = 27$ cm.



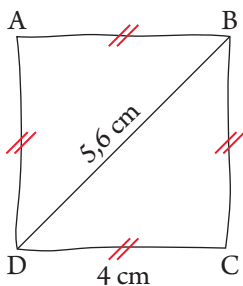
☐ a. Le coefficient d'agrandissement pour passer du petit cône au grand cône est 1,5.

☐ b. Le volume du grand cône vaut 3,375 fois le volume du petit cône.

☐ c. Le volume du grand cône vaut 1,125 fois le volume du petit cône.

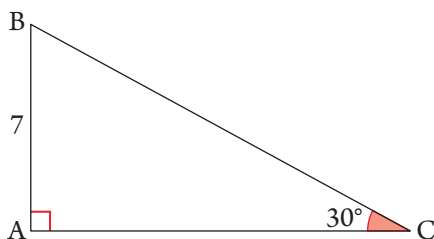
☐ d. $R = R' + 9$

12 On considère le quadrilatère représenté à main levée ci-dessous :



- ☐ a. ABCD est un losange. ☐ c. $(AC) \perp (BD)$
- ☐ b. ABCD est un parallélogramme. ☐ d. ABCD est un carré.

13



- ☐ a. $BC = 7 \sin 30^\circ$ ☐ c. $\frac{7}{\sin 30^\circ}$
- ☐ b. $BC = \frac{\tan 30^\circ}{7}$ ☐ d. $BC = 7 \tan 30^\circ$

14 On veut construire des rectangles dont les diagonales mesurent 4 cm.

- ☐ a. Tous les rectangles obtenus sont homothétiques.
- ☐ b. Un des rectangles obtenu peut être un carré.
- ☐ c. Un des rectangles obtenu peut être un losange.
- ☐ d. Tous les rectangles ont la même aire.

15 La section d'un cylindre de révolution de 4 cm de diamètre et de 10 cm de hauteur par un plan parallèle à son axe peut être :

- ☐ a. un rectangle de 10 cm sur 3 cm.
- ☐ b. un rectangle de 9 cm sur 5 cm.
- ☐ c. un rectangle de 10 cm sur 4 cm.
- ☐ d. un rectangle de 8 cm sur 2 cm.

16 Parmi les propositions suivantes concernant le repérage sur la Terre, combien y en a-t-il de vraies ?

- P1 : Tous les parallèles ont la même longueur.
- P2 : Tous les méridiens ont la même longueur.
- P3 : Un parallèle est un cercle.
- P4 : Un méridien est un cercle.

- ☐ a. 1 ☐ b. 2 ☐ c. 3 ☐ d. 4

Grandeurs et mesures

17 Le rayon du Soleil vaut environ 100 fois le rayon de la Terre. Alors, le volume du Soleil vaut environ :

- ☐ a. 1 000 fois le volume de la Terre. ☐ c. 1 000 000 le volume de la Terre.
☐ b. 300 fois le volume de la Terre. ☐ d. 10^9 fois le volume de la Terre.

18 On quadruple la circonférence d'un disque. L'aire de ce disque est multipliée par :

- ☐ a. 4 ☐ b. 8 ☐ c. 16 ☐ d. 4π

19 Le volume exact d'une balle de tennis de 3,3 cm de rayon est, en cm^3 :

- ☐ a. $47,916\pi$ ☐ b. $13,2\pi$ ☐ c. 47π ☐ d. 150,53255

20 Un rectangle et un carré ont le même périmètre.

- ☐ a. L'aire du carré est inférieure à l'aire du rectangle.
☐ b. L'aire du carré est supérieure à l'aire du rectangle.
☐ c. L'aire du carré est égale à l'aire du rectangle.
☐ d. L'aire du carré est parfois inférieure à l'aire du rectangle, et parfois supérieure à l'aire du rectangle.

Organisation et gestion de données, fonctions

21 Léa et Lou sont deux commerçantes. Sur un certain article, Léa applique une hausse de 10 % du prix, puis une baisse de 10 % sur le prix obtenu. Sur le même article vendu le même prix de départ, Lou applique une baisse de 10 % du prix, puis une hausse de 10 % sur le prix obtenu.

- ☐ a. L'article coûte moins cher chez Léa.
☐ b. L'article coûte moins cher chez Lou.
☐ c. L'article est au même prix chez les deux commerçantes.
☐ d. Au final, l'article n'a pas changé de prix.

22 Une hausse de 25 % revient à appliquer :

- ☐ a. la fonction $x \mapsto 0,25x$
☐ b. la fonction $x \mapsto 1,25x$
☐ c. la fonction $x \mapsto 1 + 0,25x$
☐ d. la fonction $x \mapsto \frac{125}{100}x$

23 La fonction f est définie par $x \mapsto -\frac{1}{3}x + 5$.

- ☐ a. f est une fonction affine. ☐ c. f est une droite.
☐ b. f est une fonction linéaire. ☐ d. $\sqrt{2}$ n'a pas d'antécédent par f .

24 Lors du tirage au sort de 3 cartes, on sait que la carte A a 2 fois plus de chances d'être tirée que la carte B, et que la carte B a 3 fois plus de chances d'être tirée que la carte C. Quelle est la probabilité pour chacune des cartes d'être tirée ?

- ☐ a. 0,6 ; 0,3 ; 0,1 ☐ b. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}$
☐ c. On ne pourra jamais tirer C.
☐ d. Il manque une donnée pour résoudre le problème.

- 25 En mathématiques, Louis a 12 pour note médiane. Cela signifie que :
- ☐ a. au moins la moitié de ses notes sont inférieures ou égales à 12.
 - ☐ b. il a autant de notes inférieures ou égales à 12 que de notes supérieures ou égales à 12.
 - ☐ c. une note sur deux est égale à 12.
 - ☐ d. s'il avait toujours eu les mêmes notes, celles-ci auraient toutes été égales à 12.

Problèmes

- 26 Dans une boisson A, il y a quatre parts de chocolat pour sept parts de lait. Dans une boisson B, il y a six parts de chocolat pour neuf parts de lait.
- ☐ a. A est plus chocolatée que B.
 - ☐ b. B est plus chocolatée que A.
 - ☐ c. A et B sont autant chocolatées.
 - ☐ d. Il faut rajouter une part et demie de lait à la boisson B pour qu'elle soit aussi chocolatée que la boisson A.
- 27 Charlie a obtenu 15 à son dernier devoir, sa moyenne passe alors de 11 à 12. Quelle note doit-il obtenir à son prochain devoir pour que sa moyenne passe de 12 à 13 ?
- ☐ a. 20
 - ☐ b. 19
 - ☐ c. 17
 - ☐ d. Ce problème n'a pas de solution, car on ne connaît pas le nombre de notes de Charlie.
- 28 Pour aller de la ville A à la ville B, un automobiliste roule à une vitesse moyenne de 80 km/h, et au retour, par la même route, il roule à une vitesse moyenne de 120 km/h. Quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours ?
- ☐ a. 96 km/h
 - ☐ b. 100 km/h
 - ☐ c. Environ 97,9 km/h
 - ☐ d. Il faut connaître la distance entre les deux villes pour calculer cette vitesse moyenne.
- 29 Aux États-Unis, la température se mesure en degrés Fahrenheit (en °F). En France, elle se mesure en degrés Celsius (en °C). Pour faire les conversions d'une unité à l'autre, on a utilisé un tableau. Voici une copie de l'écran obtenu ci-dessous :

	A	B
1	Conversions	
	Températures	Températures
2	en °C	en °F
3	- 5	23
4	0	32
5	5	41
6	10	50
7	15	59
8	20	68
9	25	77

Pour convertir la température de °C en °F, il faut multiplier la température en °C par 1,8 puis ajouter 32. On a écrit une formule en B3 puis on l'a recopiée vers le bas.

Quelle formule a-t-on pu saisir dans la cellule B3 ?

- ☐ a. $1,8 \cdot A3 + 32$
- ☐ b. $=1,8 \cdot 5 + 32$
- ☐ c. $=1,8 \cdot B3 + 32$
- ☐ d. $=1,8 \cdot A3 + 32$

Algorithmique et programmation

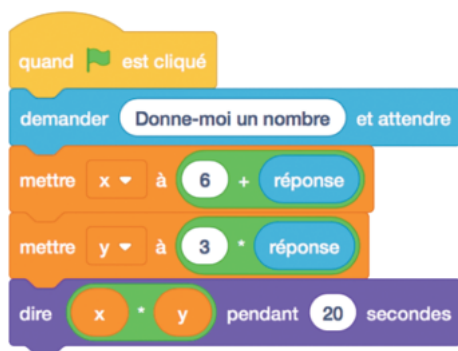
30 Le programme ci-dessous a été écrit avec le logiciel Scratch :

☐ a. Si on rentre le nombre 5, le lutin va dire 175 pendant 20 s.

☐ b. Si on rentre le nombre $2 + \frac{7}{10}$, le lutin va dire $70 + \frac{47}{100}$ pendant 20 s.

☐ c. Si le lutin dit 28, c'est que l'on a rentré le nombre 1.

☐ d. Il existe trois nombres distincts que l'on peut rentrer pour lesquels le lutin va dire 0 pendant 20 s.



Pour aller plus loin, accédez également à plus de QCM en mode interactif par le biais de ce flashcode :



Corrigés

1 b. Le nombre s'écrit 10 010 000 010.

→ Chap. 2 p. 49-51

2 d. La somme des chiffres du nombre est 12, donc ce nombre est divisible par 3. Comme tout nombre différent de 0 est divisible par 1 et par lui-même, ce nombre a au moins 3 diviseurs.

→ Chap. 4 p. 98

3 **Aucune bonne réponse.** 291 est divisible par 3, donc il n'est pas premier. La fraction se réduit à $\frac{97}{146}$. 146 n'est pas le produit d'une puissance de 2 par une puissance 5, donc la fraction n'est pas l'écriture fractionnaire d'un nombre décimal. De plus, par définition, toute fraction est l'écriture d'un nombre rationnel.

→ Chap. 1 p. 28 et 4 p. 97

4 a. $\frac{882}{1134} = \frac{2 \times 3^2 \times 7^2}{2 \times 3^4 \times 7} = \frac{7}{9}$

→ Chap. 4 p. 99

5 b. Par définition.

→ Chap. 1 p. 33

6 c. $13 + \frac{4}{10} = 13,4$; $13,4^2 = 179,56 = 179 + \frac{56}{100}$

→ Chap. 1 p. 31

7 b. et c. Cette somme s'écrit $(2n - 1)^2 + (2n + 1)^2 = 8n^2 + 2$, donc ce nombre est pair. Il peut se terminer par 4, par exemple $3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$.

→ Chap. 4 p. 98

8 c. Pour $n = 1$, $2n = 2$ qui est un nombre premier. Pour $n = 3$, $n + 1 = 4$, qui n'est pas un nombre premier. Pour $n \neq 1$, $n^2 = n \times n$ ne peut pas être premier. $(n + 1)^2 - (n - 1)^2 = 4n$ qui ne peut pas être un nombre premier. $(2n + 1)^2 = (2n + 1)(2n + 1)$ qui ne peut pas être un nombre premier.

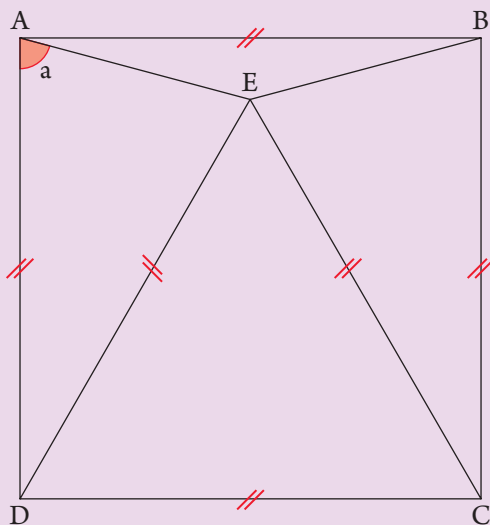
→ Chap. 4 p. 99

9 d. Seule, l'expression B est non factorisable. Pour les autres expressions, par exemple, on a :

$D = (13 - 5x)(13 + 5x)$; $F = (x\sqrt{2} - \sqrt{7})(x\sqrt{2} + \sqrt{7})$

→ Chap. 3 p. 72 et p. 77

10 b. On a :



DEC est un triangle équilatéral, donc $\widehat{EDC} = 60^\circ$.

Par conséquent, $\widehat{ADE} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Le triangle ADE est isocèle en A, donc $\widehat{a} = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$.

→ Chap. 6 p. 147-148

11 a. et b. Le coefficient d'agrandissement est $\frac{27}{18} = \frac{3}{2} = 1,5$.

Donc $V(\text{grand cône}) = 1,5^3 \times V(\text{petit cône}) = 3,375 V(\text{petit cône})$

$\frac{R}{R'} = \frac{SO}{SO'} = 1,5$, donc $R = 1,5 R'$.

Si on avait $R = R' + 9$, alors on aurait $R' + 9 = 1,5 R'$, soit $8,5 R' = -9$, ce qui est impossible.

→ Chap. 8 p. 196 et 11 p. 272

12 a., b. et c. $AB = BC = CD = AB$, donc ABCD est un losange. Tout losange est un parallélogramme. Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires, donc $(AC) \perp (BD)$. $4^2 + 4^2 = 32$ et $5,6^2 = 31,36$, donc on ne peut pas appliquer le théorème de Pythagore, $\widehat{DCB}$ n'est pas un angle droit, et ABCD n'est pas un carré.

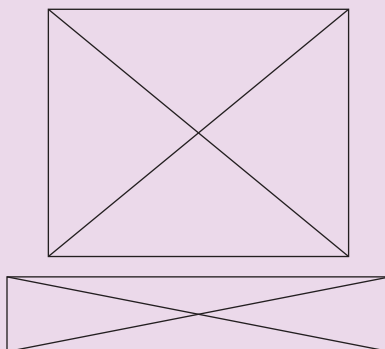
→ Chap. 7 p. 173 et s.

13 c. $\sin 30^\circ = \frac{7}{BC}$, donc $BC = \frac{7}{\sin 30^\circ}$.

$\tan 30^\circ = \frac{7}{AC}$ donc c. est fausse.

→ Chap. 6 p. 148-149

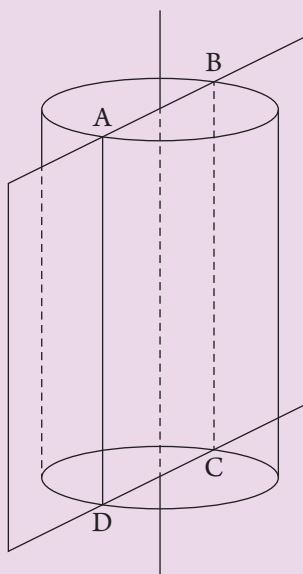
14 b. et c. Par exemple, ces deux rectangles ont des diagonales de 4 cm et ne sont pas homothétiques :



De plus, ces deux rectangles n'ont pas la même aire.

→ Chap. 7 p. 174

15 a. et c. La hauteur du rectangle est 10 cm, sa plus grande largeur est 4 cm :



→ Chap. 10 p. 241-242

16 b. Les propositions P2 et P3 sont vraies par définition.

→ Chap. 10 p. 247

17 c. $R(\text{Soleil}) = 100 R(\text{Terre})$, donc $V(\text{Soleil}) = \frac{4}{3}\pi (100R)^3 = \frac{4}{3}\pi \times 1\,000\,000 R^3$.

→ Chap. 12 p. 288

18 c. La circonférence d'un disque de rayon R est $C_1 = 2\pi R$. La nouvelle circonférence est $C_2 = 4 \times 2\pi R = 2 \times \pi \times 4R$, c'est-à-dire que le rayon a été multiplié par 4. L'aire initiale, égale à $A_1 = \pi R^2$ devient : $A_2 = \pi \times (4R)^2 = 16 \times \pi R^2 = 16 A_1$.

→ Chap. 12 p. 288

19 a. $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 3,3^3 = 4 \times \pi \times 1,1 \times 3,3^2 = 47,916 \pi \text{ cm}^3$

→ Chap. 11 p. 272

20 b. Une recherche sur un cas particulier, par exemple un périmètre de 32, donne la réponse :

L	8	9	10	11	12	13
I	8	7	6	5	4	3
Aire	64	63	60	55	48	39

→ Chap. 11 p. 271

21 c. Dans les deux cas, le prix final vaut $1,1 \times 0,9 = 0,99$ fois le prix initial.

→ Chap. 13 p. 309

22 b. et d. Augmenter une quantité de 25 % revient à la multiplier par $1 + 25\% = 1,25 = \frac{125}{100}$.

→ Chap. 13 p. 309

23 a. f est affine par définition d'une fonction affine qui est du type : $f \rightarrow ax + b$.

Les autres réponses sont fausses. Pour b , f n'est pas linéaire car une fonction linéaire est du type $x \rightarrow ax$. On peut remarquer que toute fonction linéaire est affine (avec $b = 0$), mais la réciproque est fausse. Pour c , c'est la représentation graphique de f qui est une droite, et non pas f qui, elle, est une fonction. Enfin pour d , chercher l'antécédent de $\sqrt{2}$ par f , c'est résoudre l'équation $-\frac{1}{3}x + 5 = \sqrt{2}$, soit : $\frac{1}{3}x = 5 - \sqrt{2}$, c'est-à-dire $x = 15 - 3\sqrt{2}$.

→ Chap. 14 p. 330

24 a. D'après l'énoncé, $p(A) = 2 p(B)$ et $p(B) = 3 p(C)$. Donc $p(A) = 6 p(C)$. On sait que $p(A) + p(B) + p(C) = 1$, soit $10 p(C) = 1$, d'où $p(C) = \frac{1}{10}$, $p(B) = \frac{3}{10}$ et $p(A) = \frac{6}{10}$.

→ Chap. 16 p. 381

25 a. et b. Par définition.

→ Chap. 15 p. 355-357

26 b. et d. La proportion de chocolat dans la boisson A est $\frac{4}{7}$ (environ 0,57), et elle est de $\frac{6}{9}$ (environ 0,66) dans la boisson B. Soit x la quantité de lait que l'on ajoute à la boisson B pour qu'elle soit aussi chocolatée que la boisson A. Alors :

$$\frac{4}{7} = \frac{6}{9+x} \text{ soit } 36 + 4x = 42, \text{ d'où } 4x = 6 \text{ et } x = 1,5.$$

→ Chap. 12 p. 287

27 c. Au départ, la moyenne de Charlie est 11. On appelle S la somme des notes de Charlie et N le nombre de ces notes. Alors $\frac{S}{N} = 11$, soit $S = 11 N$. En obtenant 15, la moyenne devient $\frac{S+15}{N+1} = 12$, soit $S + 15 = 12 N + 12$, c'est-à-dire : $11 N + 15 = 12 N + 12$. Finalement, $N = 3$ et $N + 1 = 4$ et $S + 15 = 48$. Soit n la note que Charlie doit obtenir pour que sa moyenne devienne 13, alors $\frac{48+n}{5} = 13$, soit $48 + n = 65$ et $n = 17$.

→ Chap. 15 p. 357

28 a. $\frac{AB}{t_1} = 80$ et $\frac{AB}{t_2} = 120$, soit $t_1 = \frac{AB}{80}$ et $t_2 = \frac{AB}{120}$

La vitesse moyenne V sur l'ensemble du parcours est $V = \frac{2AB}{t_1 + t_2} = \frac{2AB}{\frac{AB}{80} + \frac{AB}{120}}$
 $V = \frac{2AB}{\frac{5AB}{240}}$. Finalement, $V = \frac{2AB \times 240}{5AB} = 96$.

→ Chap. 13 p. 312

29 d. La formule d est correcte.

→ Chap. 18 p. 421

30 b. Pour 5, le programme calcule $(6 + 5) \times 3 \times 5 = 11 \times 15$, le lutin dit 165.

Pour le nombre $2 + \frac{7}{10} = 2,7$ le programme calcule $(6 + 2,7) \times 3 \times 2,7 = 8,7 \times 8,1$, le lutin dit $70 + \frac{47}{100}$.

Si l'on entre le nombre 1, le programme calcule : $7 \times 3 = 21$

La formule du calcul du programme est : $(6 + n) \times 3n$. L'équation $(6 + n) \times 3n = 0$ n'admet que 2 solutions, qui sont -6 et 0 .

→ Chap. 18 p. 424 et s.

Calculez votre score et suivez nos conseils :

Nombres et calculs	... / 9
Espace et géométrie	... / 7
Grandeurs et mesures	... / 4
Organisation et gestion de données, fonctions	... / 5
Problèmes	... / 4
Algorithmique et programmation	... / 1

À partir de ce score, déterminez un ordre de lecture des chapitres : vous pouvez commencer par les domaines dans lesquels vous vous sentez le plus à l'aise, ou au contraire travailler en priorité vos difficultés.

Au début de chaque chapitre, commencez par effectuer l'autoévaluation, puis prenez connaissance des conseils. Ces derniers pointent la plupart des difficultés rencontrées par les candidats et les notions à bien maîtriser pour le concours. Au regard de celles-ci, par le biais des renvois proposés dans le corrigé, consultez les éléments de cours correspondants puis faites les exercices suggérés.

Remarque : de manière récurrente, les rapports de jurys des sessions précédentes du concours destiné aux M2 attirent l'attention des candidats sur la nécessité de réviser et de consolider prioritairement les éléments de programme suivants : algorithme et programmation (le logiciel Scratch) ; les fonctions ; grandeurs, mesures, organisation et gestion de données ; les théorèmes et leurs propriétés ; la proportionnalité. Cela reste valable pour le concours en L3. En conséquence, en complément de cet ouvrage, cinq parcours e-learning mis en ligne sur le site Vuibert et accessibles par flashcode à la fin du sommaire vous permettront d'approfondir ces points.

Table des savoir-faire à maîtriser

De nombreux savoir-faire nécessitent l'utilisation directe d'une définition (par exemple démontrer le fait qu'un nombre est décimal) ou d'une propriété (par exemple démontrer qu'un triangle est isocèle ou qu'un triangle est rectangle). Ces savoir-faire ne figurent pas dans le tableau suivant qui ne recense que les cas les plus difficiles, c'est-à-dire qui nécessitent un choix de méthode ou qui sont de faux-amis, comme les calculs de vitesse moyenne ou les calculs sur les pourcentages successifs.

Savoir-faire	Outils présents dans l'ouvrage
Calculer avec des exposants	Utilisation de la définition $a^n = a \times a \times \dots \times a$ (n facteurs égaux à a) plutôt que des formules de sommes ou de produits, p. 72
Calculer la longueur d'un segment	Axiome 3 des distances, p. 126 Théorème de Pythagore, p. 195 Théorème de Thalès, p. 196 Cosinus, sinus, tangente, p. 149 Donnée d'une aire et d'une dimension, p. 271
Montrer que deux droites sont parallèles	Angles correspondants, p. 146 Angles alternes-internes, p. 146 Côtés opposés d'un parallélogramme (ou rectangle, losange, carré), p. 173 Réciproque du théorème de Thalès, p. 196
Montrer que deux droites sont perpendiculaires	Médiatrice, p. 127 Réciproque du théorème de Pythagore, p. 195 Côtés consécutifs d'un rectangle ou d'un carré, p. 175
Montrer que trois points sont alignés	Axiome 3 des distances, p. 126 Notion de milieu, p. 127 Droites parallèles confondues, p. 124 $\widehat{ABC} = 180^\circ$, p. 146
Démontrer la nature d'un quadrilatère	Propriété caractéristique des côtés, p. 166-174 Propriété caractéristique des diagonales, p. 175 Autre propriété, p. 175-175
Calculer un angle	Lignes trigonométriques dans le triangle rectangle, p. 148 Somme des angles d'un triangle, p. 148 Angles opposés par le sommet, p. 148 Angles correspondants ou alternes-internes déterminés par deux droites parallèles, p. 148
Lire des données sur un graphique	Distinction abscisse-ordonnée, p. 130 Associer données mathématiques et données concrètes du problème, p. 332
Calculer avec des pourcentages	Définition, p. 308 Représentation par schéma, p. 308-310 Utilisation du coefficient multiplicateur, p. 309
Calculer une vitesse moyenne	Utilisation de la définition $v = \frac{d}{t}$ et calculs séparés de d et t , p. 312



PARTIE 1

Nombres et calculs

1	Les différents types de nombres	24
2	Numération de position	45
3	Nombres et opérations	66
4	Arithmétique	94

1

Les différents types de nombres

Objectifs concours

- ✓ Connaître les différents ensembles des nombres réels (entiers naturels ; entiers relatifs ; nombres rationnels dont les nombres décimaux ; nombres irrationnels).
- ✓ Définir et identifier un nombre décimal ; démontrer si un nombre est décimal ou pas.
- ✓ Utiliser les différentes formes d'écriture des nombres, en particulier donner l'écriture scientifique d'un nombre.
- ✓ Simplifier des fractions en décomposant leurs termes en produits de facteurs premiers ou non et en trouvant des facteurs communs à ces deux termes, premiers ou non.

Autoévaluation

Pour chaque question, il peut y avoir plusieurs bonnes réponses.

① $\frac{5}{7}$ est un nombre :

- ☐ a. entier
 ☐ c. rationnel non décimal
☐ b. décimal
 ☐ d. irrationnel

② 273 est un nombre :

- ☐ a. décimal
 ☐ c. irrationnel
☐ b. rationnel
 ☐ d. réel

③ Parmi les nombres suivants :

$0,33$; $\frac{1}{4}$; 3 ; $3,14$; $\frac{22}{7}$; $\frac{427}{10}$; -4 ; $\frac{40}{10}$; $\frac{3}{5}$; $\sqrt{2}$; $\frac{1}{3}$; π ; $\frac{117}{125}$; $\frac{117}{3}$; $\frac{145}{7}$

Il y a :

- ☐ a. 3 nombres décimaux
☐ b. 8 nombres décimaux
☐ c. 10 nombres décimaux
☐ d. 11 nombres décimaux

④ Voici 5 égalités : $\frac{1}{20} = 0,50$; $\frac{1}{5} = 0,2$; $\frac{1}{3} = 0,333$; $\sqrt{2} = 1,414$; $\pi = 3,14$.

Parmi ces égalités :

- ☐ a. une seule est vraie
 ☐ c. quatre sont vraies
☐ b. deux sont vraies
 ☐ d. cinq sont vraies

5 Combien y a-t-il de nombres décimaux avec 1 chiffre après la virgule et supérieurs à 2,263 ?

- ☐ a. 9 ☐ b. 10 ☐ c. une infinité ☐ d. 8

6 Combien y a-t-il de nombres décimaux compris entre 1,2 et 1,3 ?

- ☐ a. aucun ☐ b. 9 ☐ c. 10 ☐ d. une infinité

7 Je suis un nombre entier. Mon nombre de milliers est 45 et mon chiffre des dizaines est 4. Qui suis-je ?

- ☐ a. 4 534 ☐ b. 45 041 ☐ c. 4 544 ☐ d. 454 454

8 Quelle est la notation scientifique du nombre 475,02 ?

- ☐ a. $0,47502 \times 10^3$
☐ b. $47,502 \times 10^{-2}$
☐ c. $4,7502 \times 10^2$
☐ d. $47\,502 \times 10^{-2}$



Conseils

Certaines questions exigent une bonne connaissance des relations entre les différents ensembles de nombres, ainsi que des propriétés des nombres décimaux.

Tous les éléments correspondants figurent dans le cours.

En vue du concours, les différentes définitions d'un nombre décimal exigent d'être bien connues. Rappelons qu'un nombre décimal n'est pas défini comme un nombre écrit avec une virgule (voir le point 7 du cours).

Corrigés

1 c. Reportez-vous à la définition dans le cours point 3.

→ Cours p. 28

2 a., b. et d. Reportez-vous aux propriétés dans le cours, notamment la représentation des nombres sur un diagramme de Venn. Ainsi, tout nombre entier est aussi décimal, rationnel et réel.

→ Cours p. 28-31

3 c. $\frac{22}{7}$; $\sqrt{2}$; $\frac{1}{3}$; π et $\frac{145}{7}$ ne sont pas décimaux.

Le dénominateur des trois fractions n'est pas le produit d'une puissance de 2 par une puissance de 5, donc le nombre est rationnel non décimal. $\sqrt{2}$ et π sont irrationnels, on ne peut pas les écrire sous la forme d'une fraction à termes entiers.

→ Cours p. 28

4 a. Les trois dernières égalités sont fausses car il s'agit de valeurs approchées des nombres. Et la première est fausse aussi.

→ Cours p. 31

5 c. Par exemple : 2,3; 2,4; ...; 3,2; 15,1; ...

→ Cours p. 31

6 d. Entre deux nombres décimaux, on peut toujours placer une infinité de nombres décimaux.

→ Cours p. 28

7 b.

→ Cours p. 27

8 c.

→ Cours p. 33

SOMMAIRE

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Nombres et ensembles de nombres 2. Nombres entiers naturels 3. Nombres entiers relatifs 4. Nombres rationnels 5. Nombres décimaux | <ol style="list-style-type: none"> 6. Nombres irrationnels 7. Représentations des ensembles de nombres 8. Une autre écriture des nombres 9. Écriture scientifique d'un nombre |
|--|---|

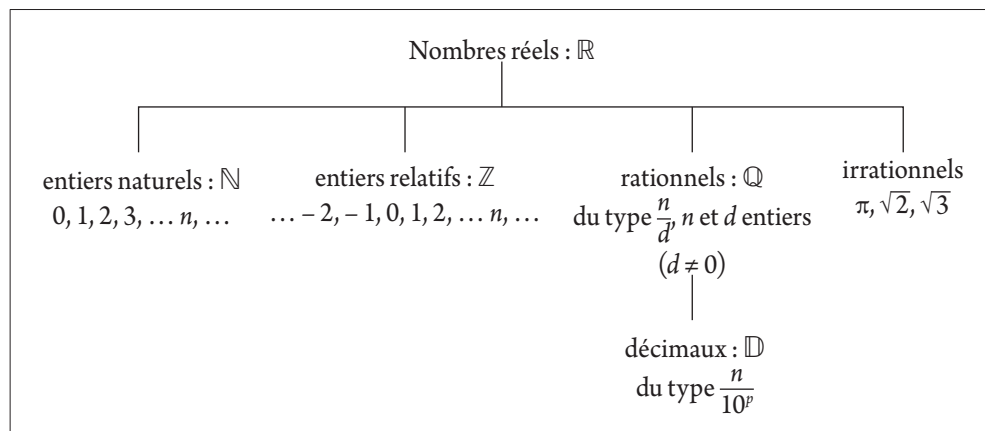
1 Nombres et ensembles de nombres

Parmi les nombres et ensembles de nombres, quatre sont fondamentaux :

- les nombres **entiers naturels**, dont l'ensemble est noté **N** ou $\mathbb{N}$;
- les nombres **entiers relatifs**, dont l'ensemble est noté **Z** ou $\mathbb{Z}$;
- les nombres **rationnels**, dont l'ensemble est noté **Q** ou $\mathbb{Q}$ (et parmi ceux-ci, les nombres **décimaux**, dont l'ensemble est noté **D** ou $\mathbb{D}$, qui sont donc des nombres rationnels particuliers) ;
- les nombres **irrationnels**, dont l'ensemble n'a pas de notation particulière.

Tous ces nombres forment une grande « famille » appelée famille ou ensemble des nombres **réels**, noté **R** ou $\mathbb{R}$.

Famille des nombres réels



2 Nombres entiers naturels

A. Définition ordinale (liée à l'ordre)

L'ensemble des nombres entiers naturels se construit par les axiomes de G. Peano :

- 0 est un nombre entier naturel.
- Tout entier naturel a un successeur.

- 0 n'est le successeur d'aucun entier naturel.
- Deux nombres entiers naturels qui ont le même successeur sont égaux.
- Si une partie de $\mathbb{N}$ contient 0 ainsi que le successeur de chacun de ses éléments, alors cette partie est égale à $\mathbb{N}$.

B. Définition cardinale (liée à la quantité)

Pour B. Russell, un nombre entier est le nombre d'éléments d'une collection d'objets non fractionnables.

EXEMPLES

- 0, 1, 2, 3, ... 47, ... 158 ... sont des nombres entiers naturels.
- Si l'on considère le nombre entier 3, on dit « le troisième » dans la définition de Peano, et « trois » dans la définition de Russel.

Remarque

Pour désigner un nombre entier quelconque, on utilise généralement la lettre n . L'entier qui précède n (pour n différent de 0) est $n - 1$, et le successeur du nombre n est le nombre $n + 1$.

3 Nombres entiers relatifs

Il suffit de savoir qu'un nombre entier relatif est un nombre entier dont l'écriture est précédée du signe « - » et le nombre est appelé **nombre négatif** ou du signe « + » et le nombre est appelé **nombre positif**.

EXEMPLES

- 6 ; + 15 ; + 568 ; - 219 sont des nombres entiers relatifs.
- Le signe « - » a un aspect concret : - 5 peut par exemple signifier « 5 degrés au-dessous de 0 » ou « 5 à gauche de 0 sur un axe horizontal ».
- Le signe « - » signifie aussi « opposé de ». Par exemple, - 5 est l'opposé du nombre 5.
- En tenant compte de la remarque précédente, - n signifie « opposé de n », et ainsi - n peut être un nombre positif. Ainsi, si $n = - 5$, alors - $n = 5$ qui est un nombre positif.

► **Propriété :** Tout nombre entier naturel est un nombre entier relatif. Ainsi, si a est un nombre entier naturel, on peut écrire $a = + a$.

EXEMPLE

On peut écrire + 4 ou 4 ; + 68 ou 68...

4 Nombres rationnels

Un nombre rationnel est un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une **fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers** (cet entier étant non nul pour le dénominateur).

EXEMPLES

$\frac{3}{4}$, $\frac{47}{3}$ et $\frac{3\,658}{44\,259}$ sont des nombres rationnels.

► **Propriété :** Tout nombre entier est un nombre rationnel : ainsi, si a est un nombre entier, on peut écrire $a = \frac{a}{1}$.

EXEMPLE

$$5 = \frac{5}{1}$$

Parmi les nombres rationnels, on distingue certains nombres appelés **nombres décimaux**.

5 Nombres décimaux

A. Définition

► Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une **fraction à termes entiers dont le dénominateur est une puissance de 10**.

► Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une **fraction irréductible à termes entiers dont le dénominateur est le produit d'une puissance de 2 par une puissance de 5**.

→ Exercice 5 p. 40

Les deux définitions précédentes sont équivalentes, et par conséquent, un nombre est décimal, si et seulement si, il peut s'écrire sous l'une des formes suivantes :

$$\frac{a}{10^n} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{5^p} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{2^k} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{2^k \times 5^p}.$$

EXEMPLES

• $\frac{7}{10}$, $\frac{2\,847}{100}$, $\frac{31}{1\,000\,000}$ sont des nombres décimaux, leur dénominateur est une puissance de 10. ($10 = 10^1$, $100 = 10^2$ et $1\,000\,000 = 10^6$). Ces trois fractions sont irréductibles.

- $\frac{21}{75}$ est un nombre décimal. *A priori*, comme $75 = 3 \times 5^2$, on pourrait penser que le nombre est rationnel non décimal par la présence du facteur 3, mais on peut simplifier l'écriture de la fraction, on obtient : $\frac{21}{75} = \frac{7}{25}$, et $25 = 5^2$ est une puissance de 5.

B. Propriété

Tout nombre entier est un nombre décimal, ainsi si a est un nombre entier, on peut écrire : $a = \frac{10a}{10}$, par exemple $9 = \frac{90}{10}$.

Application 1

Démontrer que les nombres suivants sont décimaux.

$$A = \frac{7}{64} \quad B = \frac{21}{625} \quad C = \frac{27}{250} \quad D = \frac{39}{6} \quad E = \frac{35}{7}.$$

→ Corrigé p. 41

Application 2

Donner deux nombres décimaux pouvant s'intercaler entre 1,102 et 1,103.

→ Corrigé p. 41

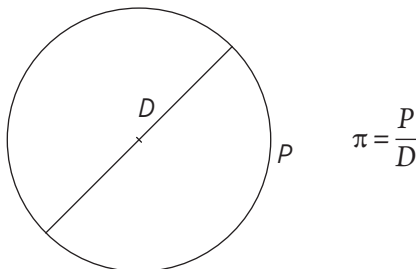
6 Nombres irrationnels

Un nombre irrationnel est un nombre qui n'est pas rationnel, et que l'on ne peut donc pas écrire sous la forme d'une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers.

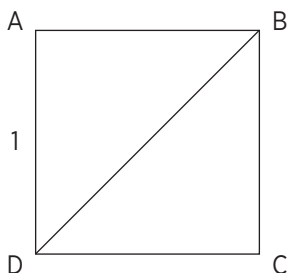
Il n'y a pas de notation pour l'ensemble des nombres irrationnels.

EXEMPLES

- π est un nombre irrationnel. Sa première définition est d'être le rapport entre le périmètre P d'un cercle et son diamètre : $\pi = \frac{P}{D}$ ou encore $\pi = \frac{P}{2R}$. (Attention, avec cette écriture, $\frac{P}{2R}$ est une fraction mais dont les deux termes ne peuvent être simultanément entiers.)



- $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Ce nombre est défini comme la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1.



Si $AB = 1$, alors $BD = \sqrt{2}$.

Démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

Démonstration par l'absurde

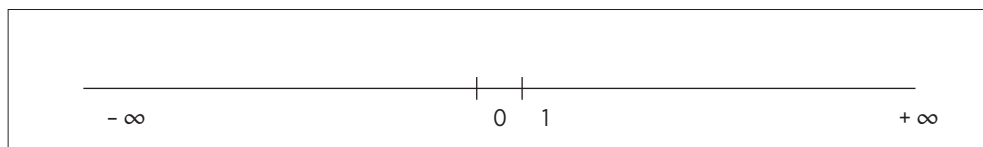
On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, alors il existe deux nombres entiers a et b tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec $\frac{a}{b}$ irréductible (car on écrit toujours les fractions sous la forme la plus simple possible, sauf parfois en probabilités).

Soit : $(\sqrt{2})^2 = \frac{a^2}{b^2}$ c'est-à-dire : $2 = \frac{a^2}{b^2}$ et donc : $a^2 = 2b^2$ (E1)

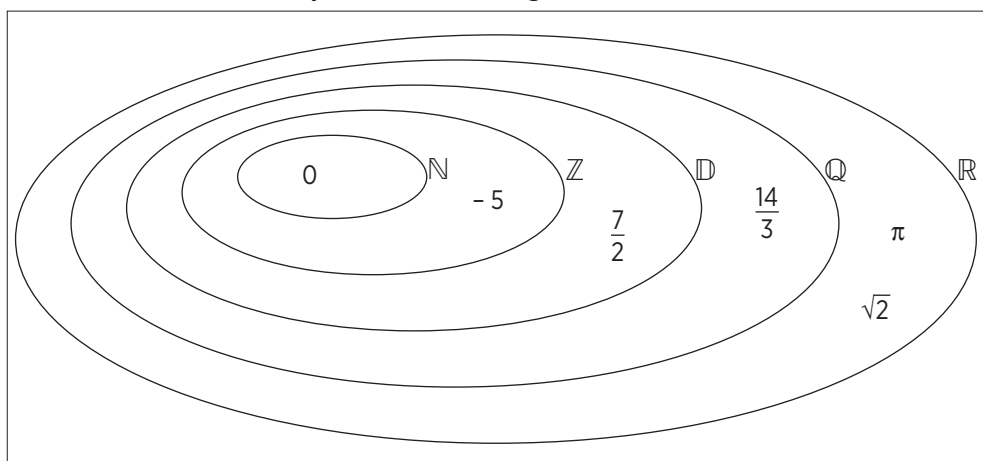
a^2 est donc un nombre pair (voir page 97) et par conséquent, a est un nombre pair, c'est-à-dire qu'il existe un nombre entier n tel que $a = 2n$. En remplaçant dans (E1), on obtient : $(2n)^2 = 2b^2$ soit : $4n^2 = 2b^2$ et finalement $b^2 = 2n^2$. b^2 est un nombre pair, c'est-à-dire que b est un nombre pair. Or si a et b sont pairs, on peut simplifier la fraction $\frac{a}{b}$ ce qui est impossible puisque l'on a supposé que cette fraction était irréductible. La supposition de départ est donc fausse et donc $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

7 Représentations des ensembles de nombres

Représentation 1 : Droite numérique



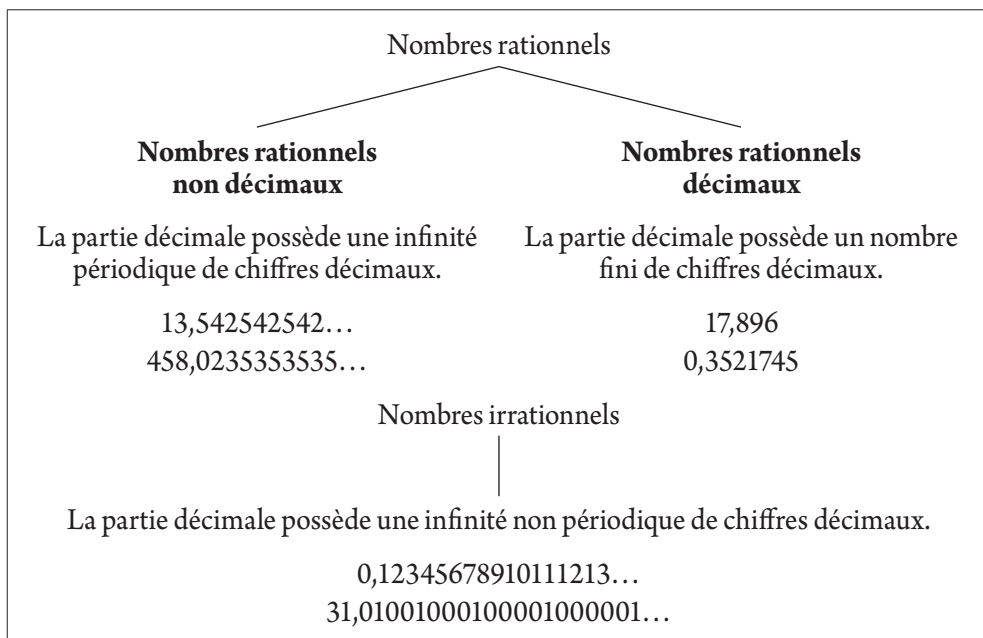
Représentation 2 : Diagramme de Venn



8 Une autre écriture des nombres

Il existe une autre façon d'écrire les différents types de nombres précédents : l'écriture utilisant un nombre écrit à l'aide d'une virgule.

Écriture des différentes familles de nombres





ZOOM

Infinité périodique signifie qu'il y a répétition infinie d'une série de chiffres. Ainsi, dans le nombre 13,542542542... la suite « 542 » se répète indéfiniment, et dans le nombre 458,0235353535..., la suite « 35 » se répète indéfiniment.

EXEMPLES

- $\frac{7}{25}$ est un nombre (rationnel) décimal que l'on peut écrire sous la forme 0,28.
- $\frac{7}{3}$ est un nombre rationnel non décimal que l'on peut écrire sous la forme 2,333333...
- $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, dont une valeur approchée est 1,4142135623. (Il est impossible de connaître la valeur exacte de $\sqrt{2}$, et, plus généralement, il est impossible de connaître la valeur exacte d'un nombre irrationnel. En revanche, il est théoriquement possible de « s'approcher » aussi près que l'on veut d'un nombre irrationnel à l'aide d'un nombre décimal.)

Application 3

À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de $\sqrt{5}$:

- | | |
|--------------------|---------------------|
| ① à l'unité près. | ③ au centième près. |
| ② au dixième près. | ④ à 10^{-6} près. |

→ Corrigé p. 41

Application 4

Pourquoi l'écriture à l'aide d'une virgule d'un nombre rationnel non décimal comporte-t-elle une infinité périodique de chiffres ?

→ Corrigé p. 41



ZOOM

Par ce qui précède, on comprend qu'un nombre décimal ne se définit pas simplement comme un « nombre écrit avec une virgule ». Ainsi, 5 n'est pas écrit à l'aide d'une virgule, or 5 est décimal ($5 = 5,0$). De même, 0,538461538461... est écrit à l'aide d'une virgule et, pourtant, ce n'est pas un nombre décimal.

La virgule dans l'écriture d'un nombre marque la place de l'unité.

Ainsi, dans le nombre 17,965 le chiffre des unités est 7. Ce qui permet alors de donner du sens à chacun des autres chiffres.



ZOOM

Il ne faut surtout pas dire que la virgule sépare la partie entière de la partie décimale : d'une part, parce que cela ne correspond pas du tout à la fonction de cette virgule, et, d'autre part, cela renforce la fausse idée des élèves qu'un nombre décimal consiste en deux nombres entiers séparés par une virgule.

Application 5

Tout nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'un nombre écrit à l'aide d'une virgule. Le problème qui se pose est de retrouver les deux termes de la fraction définissant ce nombre lorsque l'on connaît uniquement son écriture à l'aide d'une virgule.

Résoudre ce problème pour les nombres suivants.

- ❶ 52,44444444...
- ❷ 2,548548548...
- ❸ 13,527141414...

→ Corrigé p. 41

Il existe un **cas particulier important**. Les nombres écrits sous la forme $a,99999999\dots$, a nombre entier naturel, sont égaux à $a + 1$.

En effet :

Soit $n = a,99999999\dots$

Donc $n = a + 0,99999999\dots$

Alors $10n = 10a + 9,99999999\dots$

Par conséquent $10n - n = 10a + 9,99999999\dots - a - 0,99999999\dots$

Soit $9n = 9a + 9 = 9(a + 1)$ et donc $n = a + 1$.

Application 6

Tout nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'un nombre écrit à l'aide d'une virgule. Le problème qui se pose est de retrouver les deux termes de la fraction définissant ce nombre lorsque l'on connaît uniquement son écriture à l'aide d'une virgule.

Résoudre ce problème pour les nombres suivants.

- ❶ Démontrer que $3,99999\dots$ est égal à 4.
- ❷ Démontrer que $52,4799999\dots$ est égal à 52,48.

→ Corrigé p. 41

9 Écriture scientifique d'un nombre

L'écriture scientifique (ou notation scientifique) d'un nombre est l'écriture de ce nombre sous la forme $a \times 10^n$, avec $1 \leq a < 10$ et n entier relatif. On rappelle que pour n entier positif, 10^n est un 1 suivi de n zéros et pour n entier négatif, 10^n est un 1 précédé de n zéros.

EXEMPLES

$$10^7 = 10\,000\,000$$

$$195\,698 = 1,95698 \times 10^5$$

$$10^{-4} = 0,0001$$

$$0,000087 = 8,7 \times 10^{-5}$$

Application 7

❶ Écrire les nombres suivants en notation scientifique :

15 800

333,33

0,000000852

17,98

25 608 970

10,752

0,00025

② Donner l'écriture décimale de chacun des nombres suivants :

$$4,2 \times 10^8$$

$$6,58 \times 10^{-5}$$

$$8,956\,847 \times 10^4$$

$$1,002506 \times 10^{-4}$$

→ Corrigé p. 42

Application 8

Calculer et exprimer le résultat en écriture décimale, puis en notation scientifique :

$$A = 13 \times 10^7 \times 5 \times 10^5$$

$$C = \frac{4,2 \times 10^5}{12 \times 10^3}$$

$$B = 4,51 \times 10^3 \times 2,4 \times 10^5 \times 1,2 \times 10^{-4}$$

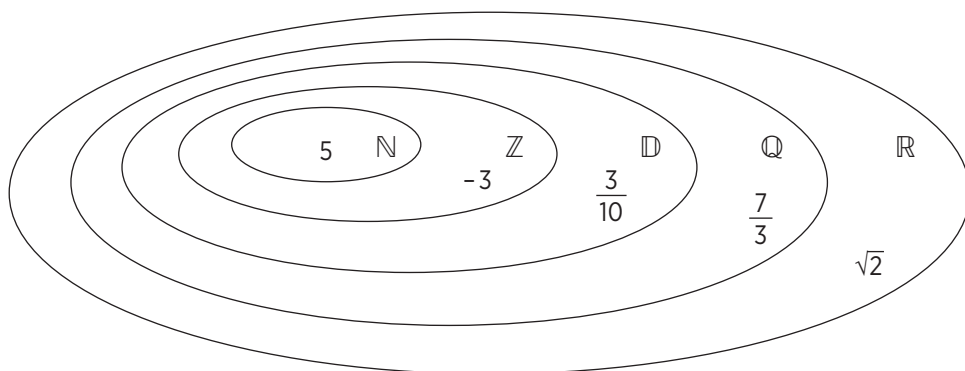
$$D = \frac{14,02 \times 10^{-4}}{701 \times 10^{-3}}$$

→ Corrigé p. 42

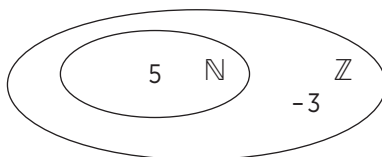


Schéma bilan

Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$



- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- Tout nombre entier naturel est un nombre entier relatif



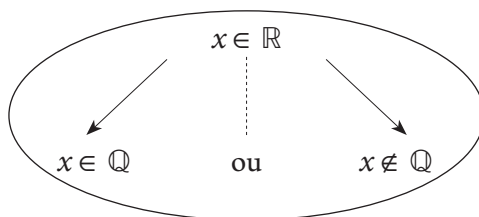
- Exemple : $5 = +5$ $5 \in \mathbb{N}$ et $5 \in \mathbb{Z}$
- Il existe des nombres entiers relatifs qui ne sont pas entiers naturels.
- Exemple : $-3 \in \mathbb{Z}$ et $-3 \notin \mathbb{N}$

La lecture se poursuit de la même manière avec $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Il n'y a pas de symbole pour représenter l'ensemble des nombres irrationnels. Cet ensemble est représenté par la dernière zone du diagramme de Venn.

En conséquence, quand on considère un nombre réel, il n'y a que deux possibilités :

- soit ce nombre est rationnel ;
- soit ce nombre est irrationnel.





QCM bilan

- ❶ Quel est le plus petit ensemble auquel x appartient si $x = 24$?
☐ a. $\mathbb{N}$ ☐ b. $\mathbb{Z}$ ☐ c. $\mathbb{Q}$ ☐ d. $\mathbb{R}$
- ❷ Quel est le plus petit ensemble auquel x appartient si $x = 3,12$?
☐ a. $\mathbb{N}$ ☐ b. $\mathbb{Z}$ ☐ c. $\mathbb{Q}$ ☐ d. $\mathbb{R}$
- ❸ Quel est le plus grand ensemble auquel le nombre 78,054 appartient ?
☐ a. $\mathbb{N}$ ☐ b. $\mathbb{Z}$ ☐ c. $\mathbb{Q}$ ☐ d. $\mathbb{R}$
- ❹ Quel est le plus petit ensemble auquel le nombre $\pi\sqrt{2}$ appartient ?
☐ a. $\mathbb{N}$ ☐ b. $\mathbb{Z}$ ☐ c. $\mathbb{Q}$ ☐ d. $\mathbb{R}$
- ❺ Quel est l'ensemble qui comprend tous les nombres pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ (a entier et b entier non nul) ?
☐ a. L'ensemble des réels. ☐ c. L'ensemble des rationnels.
☐ b. L'ensemble des décimaux. ☐ d. L'ensemble des entiers naturels.
- ❻ Quel ensemble est représenté par le symbole $\mathbb{Z}$?
☐ a. L'ensemble des entiers naturels.
☐ b. L'ensemble des entiers.
☐ c. L'ensemble des décimaux.
☐ d. L'ensemble des réels.
- ❼ Par quel symbole est représenté l'ensemble des rationnels ?
☐ a. $\mathbb{R}$ ☐ b. $\mathbb{Q}$ ☐ c. $\mathbb{Z}$ ☐ d. $\mathbb{N}$
- ❽ On considère les nombres $a = 13,21$ et $b = 13,22$. Donc, on peut :
☐ a. dire que a et b sont deux nombres rationnels.
☐ b. dire que a et b sont deux décimaux consécutifs.
☐ c. écrire $a = 1,321 \times 10^{-1}$.
☐ d. écrire $a = 13,2100$.
- ❾ On considère le nombre 7,0673615041041041... (avec répétition infinie des trois chiffres 041 dans cet ordre).
☐ a. Ce nombre est rationnel.
☐ b. Ce nombre est irrationnel.
☐ c. Il existe deux entiers dont le quotient est égal à ce nombre.
☐ d. Ce nombre est décimal.
- ❿ On considère le nombre 317.
☐ a. C'est un nombre entier. ☐ c. C'est un nombre rationnel.
☐ b. C'est un nombre décimal. ☐ d. On peut écrire : $317 = 0,317$.
- ⓫ Le nombre $\frac{4}{25}$ est :
☐ a. un nombre réel, mais n'est pas un nombre rationnel.
☐ b. un nombre rationnel, mais n'est pas un nombre décimal.
☐ c. un nombre décimal, mais n'est pas un nombre entier.
☐ d. un nombre entier.

- 12 Quelle est la notation scientifique du nombre 3 451,78 ?
☐ a. $0,345178 \times 10^4$ ☐ b. $3,45178 \times 10^3$ ☐ c. 345178×10^{-2} ☐ d. $34\,517,8 \times 10^{-1}$
- 13 Quelle est l'écriture scientifique du nombre $2,031 \times 10^5$?
☐ a. $20,31 \times 10^4$ ☐ b. $0,2031 \times 10^6$ ☐ c. $2,031 \times 10^5$ ☐ d. $2\,031 \times 10^{-3}$
- 14 Parmi les affirmations suivantes, combien y en a-t-il de correcte(s) ?
Tout nombre entier est décimal. • Tout nombre réel est irrationnel. • Le quotient de deux nombres entiers peut être irrationnel. • Tout nombre entier naturel est un nombre entier relatif.
☐ a. 1 ☐ b. 2 ☐ c. 3 ☐ d. 4
- 15 Que peut-on dire de l'affirmation suivante ?
Si le dénominateur d'une fraction à termes entiers est 47, alors cette fraction n'est pas l'écriture d'un nombre décimal.
☐ a. Cette affirmation est toujours vraie.
☐ b. Cette affirmation est toujours fausse.
☐ c. Cette affirmation est parfois vraie et parfois fausse.
☐ d. On ne peut rien dire sur la nature d'un tel nombre.
- 16 Combien y a-t-il des nombres décimaux compris entre 99,8 et 99,9 ?
☐ a. Aucun ☐ b. Une infinité ☐ c. 10 ☐ d. 9
- 17 Parmi les nombres suivants, combien y a-t-il de nombres décimaux ?
 $0,333 \cdot \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 51,00 \cdot 5 \cdot \frac{47}{50} \cdot 0,333333$
☐ a. 4 ☐ b. 6 ☐ c. 7 ☐ d. 8
- 18 Si le numérateur d'une fraction est π , alors :
☐ a. cette fraction est l'écriture d'un nombre irrationnel.
☐ b. cette fraction peut être l'écriture d'un nombre rationnel.
☐ c. cette fraction peut être l'écriture d'un nombre entier.
☐ d. on ne peut rien dire sur la nature d'un tel nombre.
- 19 L'écriture scientifique du nombre $253,7 \times 10^{15}$ est :
☐ a. $2,537 \times 10^{13}$ ☐ b. $2,537 \times 10^{17}$ ☐ c. $253,7 \times 10^{13}$ ☐ d. $0,2537 \times 10^{18}$
- 20 L'écriture scientifique du nombre 0,000102002 est :
☐ a. $102\,002 \times 10^{-9}$ ☐ c. $1,020\,02 \times 10^{-3}$
☐ b. $102\,002 \times 10^{-10}$ ☐ d. $1,020\,02 \times 10^{-4}$
- 21 Parmi les affirmations suivantes, cochez chaque affirmation exacte.
☐ a. Tout nombre entier est un nombre décimal.
☐ b. Tout nombre irrationnel est un nombre réel.
☐ c. Tout nombre réel est un nombre irrationnel.
☐ d. Tout nombre décimal est un nombre rationnel.
- 22 Parmi les affirmations suivantes, cochez chaque affirmation exacte.
☐ a. Tout nombre écrit avec une virgule est un nombre décimal.
☐ b. Tout nombre décimal est écrit avec une virgule.
☐ c. Tout nombre décimal peut s'écrire avec une virgule.
☐ d. Toute fraction à termes entiers dans le dénominateur est une puissance de 2 est un nombre décimal.

23 Parmi les affirmations suivantes, cochez chaque affirmation exacte.

- ☐ a. $\sqrt{5}$ est un nombre rationnel.
- ☐ b. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est un nombre décimal.
- ☐ c. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ est un nombre entier.
- ☐ d. La longueur d'un cercle peut-être un nombre entier.

24 Parmi les affirmations suivantes, cochez chaque affirmation exacte.

- ☐ a. 3,0713 peut s'écrire comme une fraction dont les termes sont entiers.
- ☐ b. La longueur L d'un cercle de rayon R est égale à $L = 2 \pi R$, donc $\pi = \frac{L}{2R}$. Ce qui prouve que π est un nombre rationnel.
- ☐ c. Si x est un nombre quelconque, alors $x\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel.
- ☐ d. Tout nombre irrationnel peut être approché par un nombre décimal.

25 Parmi les affirmations suivantes, cochez chaque affirmation exacte.

- ☐ a. Certains nombres décimaux sont des nombres irrationnels.
- ☐ b. Certains nombres irrationnels sont des nombres décimaux.
- ☐ c. Tout nombre pair est un nombre décimal.
- ☐ d. Toute fraction à termes entiers dont le dénominateur est une puissance de 5 est un nombre décimal.

26 Parmi les affirmations suivantes, cochez chaque affirmation exacte.

- ☐ a. La somme de 2 nombres décimaux peut être un nombre entier.
- ☐ b. Le quotient de 2 nombres irrationnels peut être un nombre entier.
- ☐ c. Le quotient de 2 nombres irrationnels peut être un nombre décimal.
- ☐ d. Le produit de 2 nombres décimaux est toujours un nombre décimal.

27 Parmi les affirmations suivantes, cochez chaque affirmation exacte.

- ☐ a. Le quotient de 2 nombres décimaux peut être un nombre entier non décimal.
- ☐ b. Le quotient de 2 nombres entiers est toujours un nombre décimal.
- ☐ c. Le produit de 2 nombres décimaux peut être un nombre non décimal.
- ☐ d. Tout nombre entier peut s'écrire comme la différence de 2 nombres rationnels.

28 On considère le nombre écrit avec la suite des nombres entiers : 0,123456...

- ☐ a. Ce nombre est décimal.
- ☐ b. Ce nombre est rationnel.
- ☐ c. Ce nombre est irrationnel.
- ☐ d. Ce nombre est réel.

29 Que peut-on dire de l'affirmation suivante ?

Le produit de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.

- ☐ a. Cette affirmation est fausse.
- ☐ b. Cette affirmation est vraie
- ☐ c. Cette affirmation est parfois vraie et parfois fausse.
- ☐ d. On ne peut pas multiplier deux nombres irrationnels.

30 Le quotient de deux nombres irrationnels peut être :

- ☐ a. un nombre entier.
- ☐ b. un nombre décimal.
- ☐ c. un nombre rationnel.
- ☐ d. un nombre irrationnel.

Entraînements

EXERCICE 1

25
mins

Écrire un entier à la place du carré pour que l'écriture fractionnaire désigne :

Un entier naturel	Un décimal non entier	Un rationnel non décimal
$\frac{\blacksquare}{115}$	$\frac{\blacksquare}{115}$	$\frac{\blacksquare}{115}$
$\frac{115}{\blacksquare}$	$\frac{115}{\blacksquare}$	$\frac{115}{\blacksquare}$

→ Corrigé p. 42

EXERCICE 2

10
mins

- 1 Trouver un nombre décimal compris entre 3,0001 et 3,01.
- 2 Trouver un nombre non décimal compris entre 3,0001 et 3,01.
- 3 Trouver une fraction qui s'intercale entre $\frac{18}{31}$ et $\frac{19}{31}$.
- 4 Trouver une fraction qui s'intercale entre $\frac{5}{7}$ et $\frac{17}{11}$.

Penser que $a/b = (a \times n)/(b \times n)$
(n entier non nul)

→ Corrigé p. 42

EXERCICE 3

25
mins

- 1 Parmi les 4 fractions suivantes, quelles sont celles qui représentent un nombre décimal ?

$$\frac{54}{1350}; \frac{5}{100}; \frac{17}{1024}; \frac{50}{1275}$$

→ Voir définition 5.A., p. 28

- 2 Quels sont tous les nombres entiers naturels n pour lesquels la fraction $\frac{n}{1050}$ représente :

- a. un nombre entier ? Justifier la réponse.
- b. un nombre décimal ? Justifier la réponse.
- c. un nombre rationnel non décimal ? Justifier la réponse.

- 3 Montrer que l'on peut donner, sans calcul, l'écriture à virgule du nombre $\frac{41}{333}$ à partir de l'égalité : $41 = 333 \times 0,123 + 0,041$.

- 4 Les nombres représentés par les fractions $\frac{171}{13\,888\,750}$ et $\frac{41}{3\,330\,000}$ sont-ils égaux ? Justifier la réponse.

→ Corrigé p. 43

EXERCICE 4

25
mins

Simplifier : $\frac{42}{78}, \frac{204}{136}, \frac{4\,095}{3\,465}, \frac{4\,716}{35\,370}$.

→ Corrigé p. 44

EXERCICE 5



On considère les deux nombres $\frac{29}{55}$ et $\frac{39}{75}$.

❶ Sont-ils des nombres décimaux ?

Pour chacune des questions suivantes, on n'utilisera pas l'écriture à l'aide d'une virgule de chacun de ces deux nombres.

❷ Comparer ces deux nombres.

❸ Trouver un nombre décimal strictement compris entre ces deux nombres.

❹ Trouver une fraction qui ne soit pas un nombre décimal, strictement comprise entre ces deux nombres.

→ Corrigé p. 44

APPLICATIONS

Application 1

$64 = 2^6$ donc A est décimal, d'après la définition cardinale.

$625 = 5^4$ donc B est décimal, d'après la définition cardinale.

$250 = 2 \times 5^3$ donc C est décimal, d'après la définition cardinale.

$\frac{39}{6} = \frac{13}{2}$ donc D est décimal, d'après la définition cardinale.

$\frac{35}{7} = 5$ donc E est décimal, car tout nombre entier est décimal.

Application 2

1,1024 et 1,1026 conviennent, par exemple.

Application 3

① $2 < \sqrt{5} < 3$

② $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$

③ $2,23 < \sqrt{5} < 2,24$

④ $2,236\ 067 < \sqrt{5} < 2,236\ 068$

Application 4

Soit un nombre rationnel non décimal $\frac{a}{b}$. Dans la division euclidienne de a par b , le reste r est strictement inférieur au diviseur b . Ce reste ne peut donc prendre qu'un nombre fini de valeurs, à savoir $b - 1$ valeurs (les nombres entiers de 1 à $b - 1$). Ce qui fait que nécessairement, au bout de $b - 1$ calculs au plus, on retrouve un des restes déjà obtenus, ce qui définit la période.

Exemples :

En posant les divisions correspondantes, on peut vérifier que l'on a :

$$\frac{17}{7} = 2,428571428571... \text{ (période à 6 chiffres)}; \frac{17}{11} = 1,5454... \text{ (période à 2 chiffres)}$$

Application 5

① Soit $n = 52,44444444... \text{ Alors } 10n = 524,44444444...$

$$10n - n = 472, \text{ soit } 9n = 472 \text{ et donc } n = \frac{472}{9}.$$

② Soit $n = 2,548548548... \text{ Alors } 1\ 000n = 2\ 548,548548548...$

$$1\ 000n - n = 2\ 546, \text{ soit } 999n = 2\ 546 \text{ et } n = \frac{2\ 546}{999}.$$

③ Soit $n = 13,52714141414... \text{ Alors } 100n = 1\ 352,714141414...$

$$100n - n = 1\ 339,187, \text{ soit } 99n = 1\ 339,187 \text{ et } n = \frac{1\ 339,187}{99} = \frac{1\ 339\ 187}{99\ 000}.$$

Application 6

① Soit $n = 3,99999... \text{ Alors } 10n = 39,99999...$

$$10n - n = 36, \text{ soit } 9n = 36 \text{ et donc } n = 4.$$

② Soit $n = 52,4799999...$ Alors $100n = 5\,247,99999...$
 $100n - n = 5\,195,52$, soit $99n = 5\,195,52$ et donc $n = \frac{5\,195,52}{99} = 52,48$.

Application 7

① $15\,800 = 1,58 \times 10^4$
 $0,000000852 = 8,52 \times 10^{-7}$
 $25\,608\,970 = 2,560\,897 \times 10^7$
 $0,00025 = 2,5 \times 10^{-4}$

$333,33 = 3,3333 \times 10^2$
 $17,98 = 1,798 \times 10^1$
 $10,752 = 1,0752 \times 10^1$

② $4,2 \times 10^8 = 420\,000\,000$
 $8,956\,847 \times 10^4 = 89\,568,47$

$6,58 \times 10^{-5} = 0,000\,065\,8$
 $1,002506 \times 10^{-4} = 0,000\,100\,250\,6$

Application 8

Rappel : Pour tout entier relatif a , pour tout entier relatif b : $10^a \times 10^b = 10^{a+b}$

On obtient :

Nombre	Calcul	Écriture décimale	Notation scientifique
A	65×10^{12}	65 000 000 000 000	$6,5 \times 10^{13}$
B	$12,9888 \times 10^4$	129 888	$1,29888 \times 10^5$
C	$0,35 \times 10^2$	35	$3,5 \times 10^1$
D	$0,02 \times 10^{-1}$	0,002	2×10^{-3}

QCM BILAN

① a. - ② c. - ③ d. - ④ d. - ⑤ c. - ⑥ b. - ⑦ b. - ⑧ a. et d. - ⑨ a. et c. - ⑩ a.; b.; c.; d. - ⑪ c.
 - ⑫ b. - ⑬ c. - ⑭ b. - ⑮ c. - ⑯ b. - ⑰ c. - ⑱ b. et c. - ⑲ b. - ⑳ d. - ㉑ a.; b. et d. - ㉒ c. et d. - ㉓ c. - ㉔ a. et d. - ㉕ c. et d. - ㉖ a.; b.; c. et d. - ㉗ d. - ㉘ c. et d. - ㉙ c. - ㉚ a.; b.; c. et d.

ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1

Il faut penser à décomposer 115 en produits de facteurs premiers : $115 = 5 \times 23$.
 Une solution possible est :

Un entier naturel	Un décimal non entier	Un rationnel non décimal
$\frac{115}{115}$	$\frac{23}{115}$	$\frac{5}{115}$
$\frac{115}{23}$	$\frac{115}{10}$	$\frac{115}{7}$

Exercice 2

① La question peut s'écrire : « Trouver un nombre décimal compris entre 3,0001 et 3,0100. »
 Ainsi, 3,0025 est une solution au problème.

② D'après ce qui précède, 3,00258888... convient.

③ $\frac{18}{31} = \frac{180}{310}$ et $\frac{19}{31} = \frac{190}{310}$, donc une fraction qui s'intercale entre $\frac{18}{31}$ et $\frac{19}{31}$ peut être $\frac{181}{310}$.

④ $\frac{5}{7} = \frac{55}{77}$ et $\frac{17}{11} = \frac{119}{77}$, donc une fraction qui s'intercale entre $\frac{5}{7}$ et $\frac{17}{11}$ peut être $\frac{59}{77}$.

Exercice 3

① $\frac{54}{1350} = \frac{1}{25} = \frac{1}{5^2}$, donc ce nombre est décimal.

$\frac{5}{100} = \frac{5}{10^2}$ est décimal.

$\frac{17}{1024} = \frac{17}{2^{10}}$, donc ce nombre est décimal.

$\frac{50}{1275} = \frac{2}{3 \times 17}$, donc ce nombre n'est pas décimal.

② a. $\frac{n}{1050}$ est un nombre entier si et seulement si n est multiple de 1 050, c'est-à-dire si et seulement si l'on peut écrire $n = 1\,050k$, avec $k \in \mathbb{N}$.

En effet, on a alors $\frac{n}{1050} = \frac{1\,050k}{1\,050} = k$.

b. $1\,050 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7$

Donc, $\frac{n}{1\,050}$ est décimal si et seulement si on peut simplifier cette fraction par 3 et 7, c'est-à-dire si et seulement si n est multiple de 21.

c. D'après ce qui précède, $\frac{n}{1\,050}$ est rationnel non décimal si et seulement si on ne peut pas simplifier cette fraction par 3 ou 7, donc si et seulement si n n'est pas multiple de 3 ou de 7.

③ $41 = 333 \times 0,123 + 0,041$, donc $\frac{41}{333} = \frac{333 \times 0,123}{333} + \frac{0,041}{333}$, donc $\frac{41}{333} = 0,123 + \frac{0,041}{333}$.

On a alors $0,041 = 333 \times 0,000123 + 0,000\,041$, et on continue en substituant cette écriture de 0,041 dans $\frac{41}{333} = 0,123 + \frac{0,041}{333}$, ce qui donne $\frac{41}{333} = 0,123\,123 + \frac{0,000041}{333}$ et ainsi de suite.

On a alors $\frac{41}{333} = 0,123123123\dots$

④ Si $\frac{171}{13\,888\,750} = \frac{41}{3\,330\,000}$ alors leurs produits en croix sont égaux.

Or $41 \times 13\,888\,750 = 569\,438\,750$ et $171 \times 3\,330\,000 = 569\,430\,000$
et donc les deux nombres proposés sont différents.

Exercice 4

Pour simplifier les fractions proposées, il n'est pas nécessaire de décomposer chacun de leurs termes en produit de facteurs premiers. Il suffit de trouver des facteurs communs, premiers ou non.

$$\frac{42}{78} = \frac{6 \times 7}{6 \times 13} = \frac{7}{13}$$

$$\frac{204}{136} = \frac{3 \times 4 \times 17}{2 \times 4 \times 17} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{4\,095}{3\,465} = \frac{5 \times 7 \times 9 \times 13}{5 \times 7 \times 9 \times 11} = \frac{13}{11}$$

$$\frac{4\,716}{35\,370} = \frac{2 \times 2 \times 9 \times 131}{2 \times 3 \times 5 \times 9 \times 131} = \frac{2}{15}$$

Exercice 5

① $\frac{29}{55} = \frac{29}{5 \times 11}$ n'est pas un nombre décimal, puisque écrit sous la forme d'une fraction irréductible dont le dénominateur contient le facteur 11.

$\frac{39}{75} = \frac{13}{25} = \frac{13}{5^2}$ est un nombre décimal, puisque s'écrit sous la forme d'une fraction irréductible dont le dénominateur est une puissance de 5.

② $55 = 5 \times 11$ et $25 = 5^2$, donc le dénominateur commun aux deux fractions est $5^2 \times 11 = 275$

$$\frac{29}{55} = \frac{29 \times 5}{55 \times 5} = \frac{145}{275} \text{ et } \frac{39}{75} = \frac{13}{25} = \frac{13 \times 11}{25 \times 11} = \frac{143}{275}$$

On en conclut que $\frac{29}{55} > \frac{39}{75}$.

③ $\frac{29}{55} = \frac{1\,450}{2\,750}$ et $\frac{39}{75} = \frac{143}{275} = \frac{1\,430}{2\,750}$

Puisque $2\,750 = 11 \times 250$, et que $1\,430 = 11 \times 130$, il faut faire apparaître un multiple de 11 au dénominateur qui ne soit pas égal à 1 430, on choisit $1\,430 + 11 = 1\,441$.

Un nombre décimal compris entre les deux nombres est donc par exemple $\frac{1\,441}{2\,750}$.

④ Un nombre rationnel non décimal compris entre les deux fractions est, par exemple, $\frac{144}{275}$.

ADMISSIBILITÉ
**2027
2028**

**NOUVEAU
CONCOURS**

L3

**Admis
au
CRPE**

MATHS

Le manuel pour **réussir** l'épreuve écrite

Conforme au nouveau programme
du cycle 4

- ✓ **Méthodes et conseils** du jury
- ✓ **Tous les savoirs disciplinaires** en fiches pour maîtriser le programme
- ✓ **Des résumés de cours en schémas** pour mémoriser facilement et de manière visuelle
- ✓ **+ de 300 QCM et exercices corrigés** pour mettre les notions en application
- ✓ **2 sujets corrigés et commentés**, dont 1 en ligne, pour être prêt le jour J

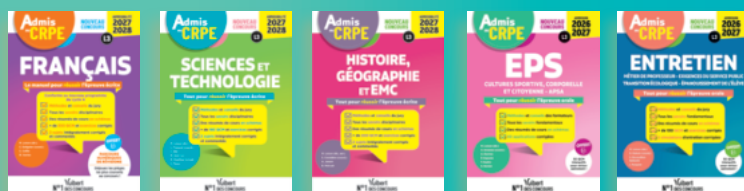
OFFERT



**PARCOURS
NUMÉRIQUES
DE RÉVISIONS
& TUTOS VIDÉO**

Déjouez les pièges
les plus courants
au concours !

Dans la même collection



N°1 Vuibert
DES CONCOURS

ISBN : 978-2-311-22375-0



20,90 €