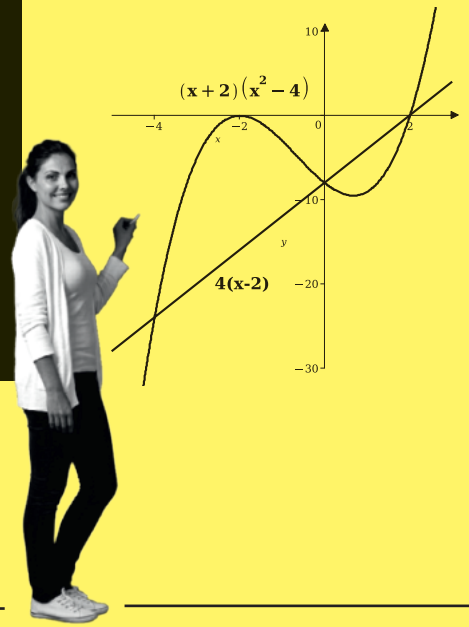
Claudine Chaffy

# Les Maths

## ✓ c'est plus simple avec un schéma

L1
Prépas




43 fiches à compléter
160 schémas
100 exercices corrigés

Les bases pour assurer dans le supérieur

deboeck SUPÉRIEUR

Claudine Chaffy

# Les Maths

## ✔ c'est plus simple avec un schéma

Les bases pour assurer dans le supérieur

deboeck SUPÉRIEUR

**Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : www.deboecksuperieur.com**

Couverture : Primo & Primo

Mise en page : Philippe Maziers

© De Boeck Supérieur s.a., 2026
Rue du Bosquet, 7 - B-1348 Louvain-la-Neuve

Il est interdit, sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, de reproduire (notamment par photocopie) partiellement ou totalement le présent ouvrage, de le stocker dans une banque de données ou de le communiquer au public, sous quelque forme et de quelque manière que ce soit.
Ce livre ne peut être reproduit ni utilisé à des fins d'entraînement de systèmes d'intelligence artificielle. La fouille de textes et de données est interdite conformément à l'article 4(3) de la Directive (UE) 2019/790.
Dans le cas où le livre comporte des ressources numériques en ligne, ces dernières sont des compléments offerts à l'achat du livre. Par respect du droit d'auteurs, ces ressources sont incessibles, interdites de reproduction et réservées à un usage strictement personnel. Elles sont soumises aux conditions d'utilisation en vigueur (CGU) accessibles sur notre site et peuvent, pour des raisons commerciales, légales, d'évolution technique ou de contenu, être supprimées ou interrompues à tout moment, sans garantie de maintien ou de compensation.
Dans le cas où les QR codes et liens hypertextes permettent d'accéder à des sites internet tiers, la responsabilité de De Boeck Supérieur n'est pas engagée, notamment quant à leur éventuel dysfonctionnement ou à leur indisponibilité d'accès.

Dépôt légal :
Bibliothèque Nationale, Paris : octobre 2026
Bibliothèque royale de Belgique, Bruxelles : 2026/13647/158 ISBN : 978-2-8073-7455-3

*À mes parents, à mes filles*


## Remerciements

En tout premier lieu, je tiens à remercier ici Jean-Guillaume Dumas, Directeur du Laboratoire Jean Kuntzmann à l'Université Grenoble-Alpes, qui m'a soutenue dans la réalisation de cet ouvrage de fin de carrière ; les moyens informatiques du Laboratoire m'ont permis de produire les nombreux schémas qui y figurent.

Mes remerciements s'adressent également aux Editions De Boeck Supérieur et plus particulièrement à Fabrice Chrétien qui m'a fait confiance et dont les conseils ont été précieux. Ils vont aussi à Florence Lemoine, pour son expertise technique.

Je tiens aussi à souligner l'implication de mon jeune collègue Clément Jourdana, qui a accepté la tâche ingrate de relecture et dont les remarques ont toujours été constructives. Je remercie tout autant ma sœur Nicole Camus, pour avoir testé consciencieusement tous les exercices, en jouant le rôle de l'autodidacte. Et s'il reste quelques "coquilles", elles sont de mon unique responsabilité !

Enfin, je remercie mon entourage proche, pour son soutien indéfectible.

# Avant-propos

**"Les maths, c'est plus simple avec un schéma"**

le livre qui rassure !

Les maths, ce n'est pas votre tasse de thé ? Pire, elles vous effraient ! Une seule page remplie de ces drôles de hiéroglyphes et vous prenez la fuite. A moi de vous faire changer de camp : vous allez rejoindre celui des amoureux des maths. Je vais vous convaincre qu'elles vous sont **accessibles**, à vous aussi.

Jetez-vous dans l'**action** : le meilleur remède à l'angoisse ! Reprenez les **bases du calcul** : calculer **rassure** et permet d'**assurer**. Les exercices que je vous propose sont directement issus des lacunes constatées chez mes propres étudiants, parfois même chez les meilleurs …

Une fois ces quelques règles **concrètes** bien **assimilées**, découvrez les maths sous un autre jour, celui du **jeu** et non celui de la sanction. Vous voilà prêts pour le deuxième niveau de lecture, qui vous emmène vers d'autres pans des mathématiques, plus **abstraits**.

Ce livre-compagnon vous donne un aperçu de la belle harmonie qui règne en mathématiques à travers **quelques** morceaux choisis au hasard de l'algèbre, de la géométrie, de l'analyse, eh oui, tous **ensemble** et non dans des cases séparées, c'est ce qui fait leur **beauté**.

➢ `La méthode` : des **exemples** simples et des **modèles** à reproduire finissent par vous convaincre que vous êtes capables de répondre, vous aussi. Ce n'était pas si sorcier, somme toute ! A raison d'un quart d'heure par page, où et quand vous voulez, au rythme qui vous convient, vous avancez à petits pas, vous prenez **confiance** en vous, mieux : vous en redemandez.

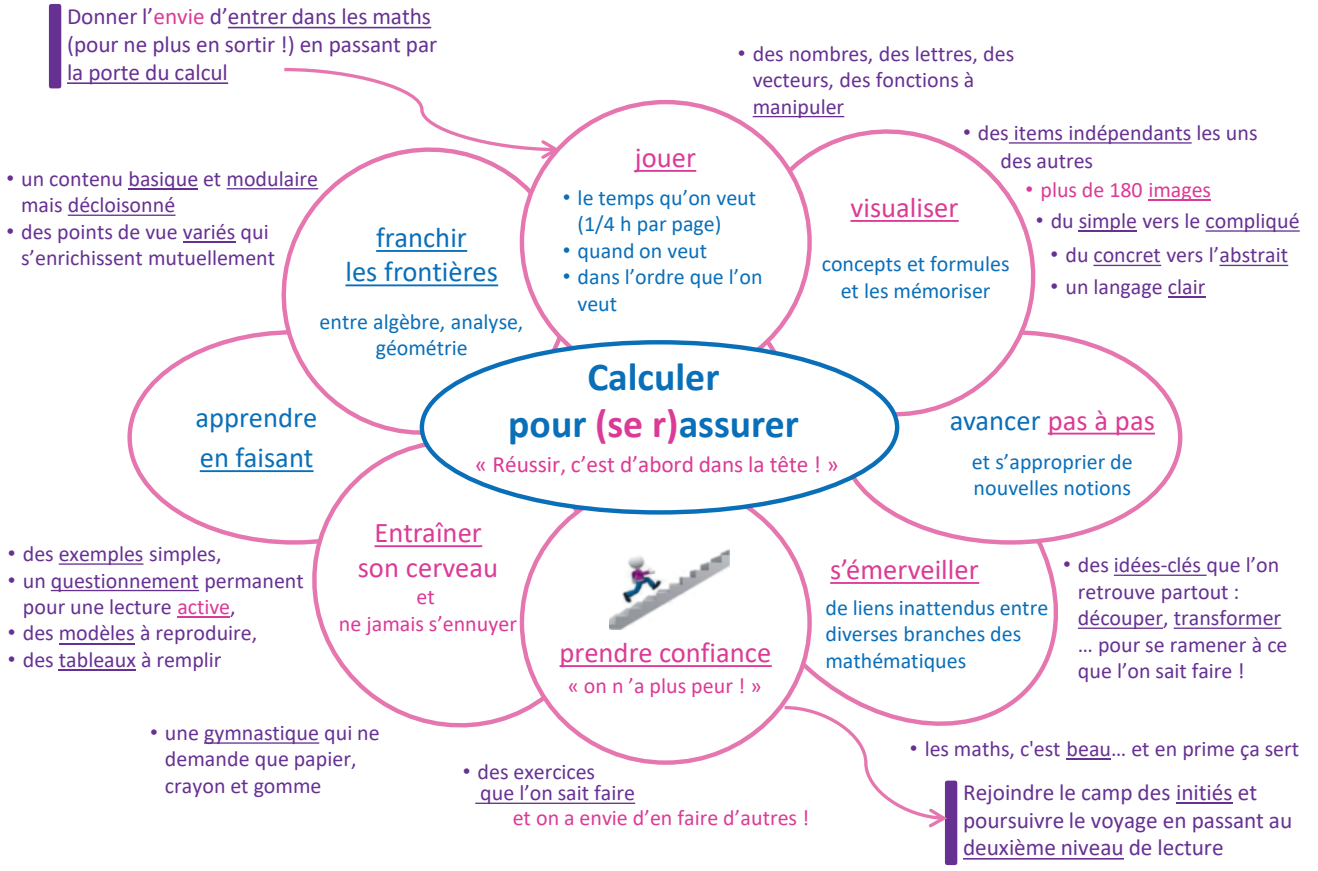
En prime, votre cerveau vous remerciera de cette **gymnastique** !

Vous prenez du recul et réalisez qu'un **petit nombre d'idées** régente tout : découper, transformer, écrire un objet sous une forme qui convienne au traitement qu'on veut lui faire subir et le tour est joué. ☺

➢ `La forme` : l'opération séduction, je la mène avec des **images en couleur** qui rendent le tout moins aride. Elles vous permettent surtout de **visualiser** concepts et formules car un petit dessin vaut toujours mieux qu'un long discours, n'est-ce pas ?

Désormais, vous n'avez plus peur …
et ressentez même l'**envie** d'en savoir plus.

Bienvenue dans le monde des mathématiques et n'oubliez pas :
**réussir**, c'est d'abord dans la tête !


Donner l'envie d'entrer dans les maths (pour ne plus en sortir !) en passant par la porte du calcul
Calculer pour (se r)assurer
« Réussir, c'est d'abord dans la tête ! »
jouer
• le temps qu'on veut (1/4 h par page)
• quand on veut
• dans l'ordre que l'on veut
• des nombres, des lettres, des vecteurs, des fonctions à manipuler
visualiser
concepts et formules et les mémoriser
• des items indépendants les uns des autres
• plus de 180 images
• du simple vers le compliqué
• du concret vers l'abstrait
• un langage clair
avancer pas à pas
et s'approprier de nouvelles notions
s'émerveiller
de liens inattendus entre diverses branches des mathématiques
• des idées-clés que l'on retrouve partout : découper, transformer … pour se ramener à ce que l'on sait faire !
prendre confiance
« on n 'a plus peur ! »
• les maths, c'est beau… et en prime ça sert
Rejoindre le camp des initiés et poursuivre le voyage en passant au deuxième niveau de lecture
• des exercices que l'on sait faire et on a envie d'en faire d'autres !
Entraîner son cerveau et ne jamais s'ennuyer
• une gymnastique qui ne demande que papier, crayon et gomme
apprendre en faisant
• des exemples simples,
• un questionnement permanent pour une lecture active,
• des modèles à reproduire,
• des tableaux à remplir
franchir les frontières
entre algèbre, analyse, géométrie
• un contenu basique et modulaire mais décloisonné
• des points de vue variés qui s'enrichissent mutuellement

# Les maths, c'est plus simple avec un schéma

## Les bases pour assurer dans le supérieur

Parce que **réussir**,
c'est d'abord dans la tête !

### Les pictogrammes

- Le premier niveau de lecture

pour apprendre ou réviser en s'exerçant

pour se tester en temps réel (avec des indications pour démarrer)

Ces rubriques sont accessibles à tout un chacun.

- Le deuxième niveau de lecture

propose une escapade pour découvrir des nouveautés

signale des notions postérieures à celles d'une seconde générale.

Le lecteur curieux trouvera là de quoi aiguiser son appétit.

### Le code couleurs

◇ Du jaune pour surligner les **sous-titres**

◇ Du bleu marine pour le **cours** et du bleu pour surligner ce qui est **indispensable** pour la suite

◇ Du vert pour les **exemples**

◇ Du violet pour les **objectifs**, les **indications** et les **commentaires**

◇ Du vert émeraude pour ce qui est à lire en **seconde lecture**

Nul besoin d'un bagage conséquent ; à partir d'**exemples** simples et de nombreuses **figures**, tout s'éclaire. En allant toujours du concret vers l'abstrait, du simple vers le compliqué, le lecteur **manipule** immédiatement des notions de base, parfois oubliées.

Cet apprentissage **actif**, couronné de succès, encourage le lecteur récalcitrant à en faire plus, il se prend au jeu. Celui qui pensait détester les maths se surprend à y éprouver du **plaisir**. Quelques idées naturelles l'emmènent ensuite vers de nouveaux paysages et les **liens** entre algèbre, géométrie et analyse enchantent l'amoureux des maths.

Avec ce livre compagnon, à raison d'**un quart d'heure par page** et **dans l'ordre que l'on veut**, on joue, on découvre, on s'étonne de tout ce que l'on sait faire pour finalement se dire que "les maths, c'est facile".

## Le b.a.-ba de l'algèbre


1. Les quatre opérations : de quoi vous souvenez-vous ? ..... 9
2. La routine algébrique : les règles du jeu ..... 12
3. Les dessous du calcul mental : deux exemples simples ..... 18
4. Combiner les termes d'une somme pour qu'elle s'arrange ! ..... 19
5. Des rectangles pour approcher une intégrale : du discret vers le continu ..... 24


## Des calculs en pratique


6. Jongler avec des lettres ..... 27
7. Jongler avec des nombres rationnels ..... 36
8. Jongler avec des exposants entiers ..... 44


## Des identités illustrées et appliquées


9. Des identités en images ..... 53
10. Des identités remarquables pour développer (facile) ou factoriser (habile) ..... 55
11. Diviser pour factoriser sans identifier ..... 66
12. Une identité à découvrir : à vous de jouer ..... 76

13. Des calculs que vous savez faire ? ..... 78
14. Développer plus vite que son ombre ..... 81

## Une immersion dans le plan euclidien

15. Une boîte à triplets pythagoriciens pour épater la galerie ..... 83
16. Une identité trigonométrique se cache sous la formule ! ..... 88
17. Produit scalaire et déterminant de deux vecteurs du plan : qui sert à quoi ? ..... 95

## Les racines carrées revisitées

18. Des racines carrées en images ..... 96
19. Manipuler des racines carrées : les premiers pas ..... 100
20. Les racines carrées dans différents contextes ..... 104
21. Formules et racines carrées mélangées ..... 112
22. Conjuguer pour simplifier ..... 114
23. Des racines carrées imbriquées pour $\cos \pi/8$ et $\sin \pi/8$ ..... 118
24. Trigonométrie et radicaux : deux manières de calculer $\cos \pi/12$ 120
25. Des fonctions coiffées de racines carrées ..... 123
26. Développer $\sqrt{2}$ en fraction continue ..... 126
27. Des rationnels qui s'approchent de $\sqrt{2}$ : trois idées pour une même suite, fabuleusement efficace ! ..... en ligne

## À petits pas vers l'analyse

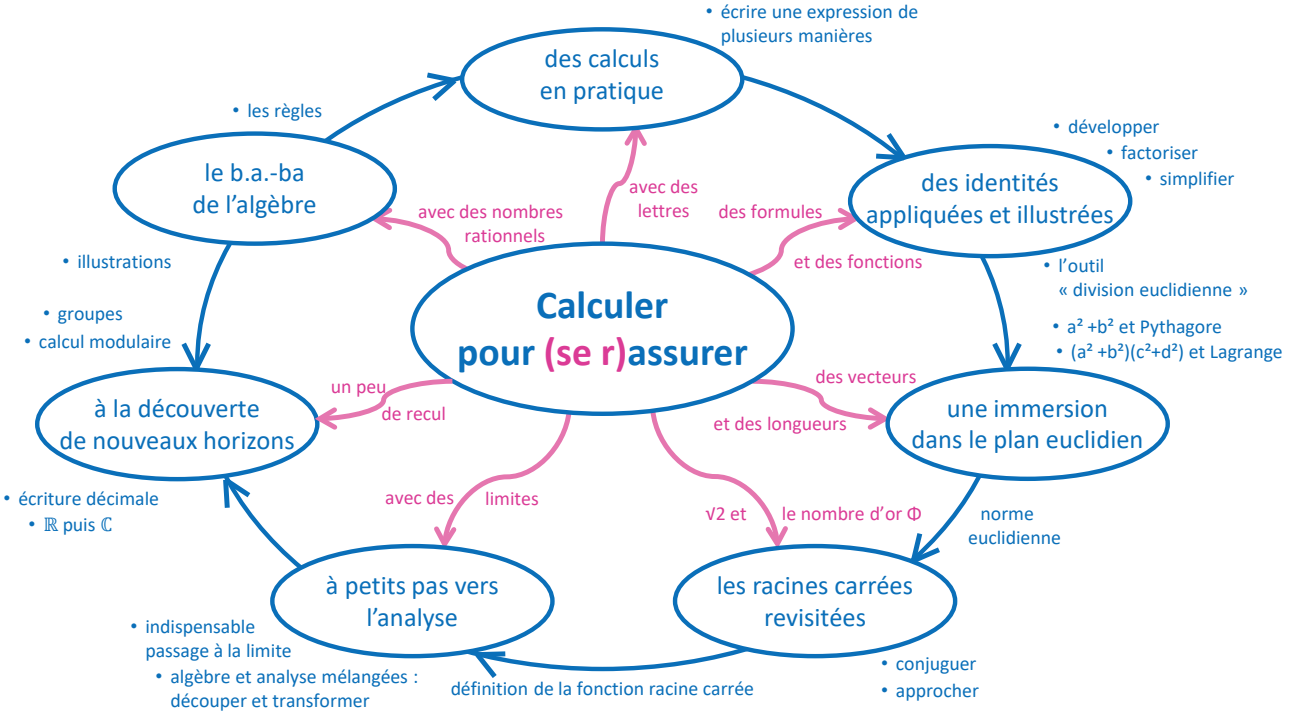
28. Factoriser pour résoudre une inéquation ..... 130
29. Identités remarquables et formules trigonométriques ..... 131
30. Une identité remarquable pour trouver un nombre dérivé ... 132
31. Diviser et trouver la tangente sans dériver ..... en ligne
32. Isoler la partie entière d'une fonction rationnelle ..... 134
33. Conjuguer pour lever une indétermination ..... 141
34. Changer d'écriture pour calculer somme et intégrale ..... 143
35. Comment "casser" la fraction $\frac{1}{t(t+1)}$ ..... 147
36. Simplifier pour "boucher des trous" ..... 154
37. Définir la fonction racine carrée : l'analyse à la rescousse ! ..... 163
38. Les variants du carré ..... 169

## À la découverte de nouveaux horizons

39. Autour de l'écriture décimale des entiers naturels ..... 170
40. Les congruences, c'est magique pour les critères de divisibilité ! ..... en ligne
41. Agrandir les ensembles de nombres : pour faire quoi ? ..... 177
42. Une escapade dans un monde imaginaire ..... 179
43. Les groupes sont partout ! ..... en ligne

Pour les matheux qui veulent aller plus loin, retrouvez des sujets plus pointus en ligne :
http://www.deboecksuperieur.com/site/374553

**De branche en branche**




**« L'infini, c'est long, surtout vers la fin. » A. Allais**

## 1. Les quatre opérations : de quoi vous souvenez-vous ?

**Exercices** **20 minutes**

**Testez-vous** en 20 questions, sans calculatrice évidemment !
En cas de nécessité, jetez un œil aux **indications**.

### A. Attention au signe "–" et à la place des parenthèses lorsqu'on développe

**1** $7A-(5A-2B)=$ .....

$\begin{cases}(3+\sqrt{3})+(3-\sqrt{3})=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (3+\sqrt{3})-(3-\sqrt{3})=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$

**2** Comparez $(3+7)\times 5$ et $3+7\times 5$ : .....

**3** $x^2+x-16-(x-3)(x+4)=$ .....

**4** $10+x\Big(-5+x(2-x)\Big)=$ .....

### B. Factoriser du mieux possible

**5** $a^2+a=$ .....

L'équation $a^2+a=0$ a-t-elle toutes ses solutions $a$ dans $\mathbb{N}$ ? .....

**6** $21b^2-7b=$ .....

L'équation $21b^2-7b=0$ a-t-elle toutes ses solutions $b$ dans l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux ?

.....

**7** $2x(x+3)-(x+3)(x-1)=$ .....

L'équation $2x(x+3)-(x+3)(x-1)=0$ a-t-elle toutes ses solutions $x$ dans $\mathbb{Z}$ ?

.....

**8** $3+\sqrt{3}=\sqrt{3}\Big(\ldots\ldots\ldots\ldots\Big)$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{75}-\sqrt{48}=$ .....

### Indications

**1** Rappelez-vous : "moins fois moins" fait plus.
Repérez quels termes "**se tuent**" !

**2** Les parenthèses de $(a+b)\times c$ ont leur importance : on ne peut pas les enlever n'importe comment …
En fait, $(a+b)\times c=$ ..... et non $a+b\times c$.

**3** On trouve la valeur en 3 (qui est aussi la valeur en $-4$) du trinôme $x^2+x-16$ : pourquoi ?

.....

**4** Toujours développer à partir de ce qui est le plus **à l'intérieur**.

Pensez-y : dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$a=1\times a=a\times 1$
$ab=0\iff a=0$ ou $b=0$.

On écrit les éléments d'un ensemble entre deux accolades.

**5** $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$ est l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ est l'ensemble des entiers relatifs.

**6** Les nombres décimaux sont les nombres à virgule : ils sont de la forme $\dfrac{a}{10^n}$ où $a\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$.
On écrit : $\mathbb{D}=\left\{a/10^n \,/\, a\in\mathbb{Z} \text{ et } n\in\mathbb{N}\right\}$
où le symbole "/" signifie "tel que".

**8** Pour $a>0$ et $b>0$, pensez à ce que valent $\sqrt{a^2}$ et $\sqrt{ab}$.

## C. Additionner des fractions sans dire de bêtises et en simplifiant à tout instant

**9** $\frac{4}{11}+\frac{13}{11}=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad 3-\frac{2}{5}=\ldots\ldots\ldots\ldots$

**10** $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{5+7}$ sont-ils égaux ou non ? $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

**11** Calculez $\frac{7}{6}+\frac{3}{4}$ en prenant comme dénominateur commun $6\times 4$ : $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Cependant, lorsqu'au dénominateur on a des entiers ou des polynômes, il est **plus efficace** de prendre comme dénominateur commun le **p.p.c.m.** (plus petit commun multiple) des deux dénominateurs.

Les calculs intermédiaires grossissent moins, ce qui évite des erreurs

Voyez plutôt : $\frac{7}{6}+\frac{3}{4}=\frac{7}{2\times 3}+\frac{3}{2\times 2}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

**12** Cela s'applique aussi aux **fractions rationnelles** :

$\frac{1}{x(x-1)}-\frac{1}{x(x+1)}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

## D. Multiplier des fractions sans faire mousser les calculs intermédiaires

**13** $\frac{9}{4}\times\frac{5}{11}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad$ **14** $\frac{56}{9}\times\frac{15}{14}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

**15** $\frac{5}{7}\times\frac{18}{15}\times\frac{14}{3}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

## E. Diviser des fractions en prenant garde à la place des barres de fractions

**16** $\dfrac{5}{\frac{10}{3}}=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad$ **17** $\dfrac{\frac{5}{10}}{3}=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad$ **18** $\dfrac{\frac{5}{7}}{\frac{3}{7}}=\ldots\ldots\ldots\ldots$

**19** $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{3}}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad$ **20** $\dfrac{\frac{15}{26}}{\frac{6}{13}}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

## Indications

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

**9** Utilisez un **dénominateur commun**.

**10** Pour $a, b, a+b$ non nuls, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\neq\frac{1}{a+b}$.

Pour tester l'égalité de deux fractions, pensez au produit en croix.

**11** $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$

Vous obtenez $\frac{46}{24}$ qui se réduit à $\frac{23}{12}$.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

⚠ Comme pour les sommes de nombres rationnels, **simplifiez** le plus possible par les facteurs communs au numérateur et au dénominateur **avant** de calculer les produits.

Diviser par $\frac{c}{d}$,
c'est multiplier par son inverse $\frac{d}{c}$.

**Simplifiez** le plus possible !

## Les réponses

**"Qui va piano va sano"**

• Pour ne pas vous tromper et faciliter la relecture, la vôtre et celle du correcteur , **détaillez** les calculs.

• Ne vous précipitez surtout pas et **faites une chose à la fois** : c'est par exemple une mauvaise idée de distribuer un signe − en même temps que de développer ce qui est à l'intérieur de la parenthèse. À vouloir faire trop de choses en même temps, on finit par se tromper

• Pour minimiser le risque d'erreur, prenez aussi soin de travailler avec des nombres les plus petits possibles dès que l'occasion s'en présente, en **simplifiant** en permanence.

**A.** **1** $2(A+B)$ ; $6$ et $2\sqrt{3}$ **2** $50>38$ ; $(a+b)c=ab+ac$ **3** $x^2+x-16-(x-3)(x+4)=-4$

Cette égalité s'écrit aussi $x^2+x-16=-4+(x-3)(x+4)$.
Comme $x-3$ s'annule en $3$, $-4$ est bien la valeur en $3$ du polynôme $x^2+x-16$ (et aussi sa valeur en $-4$).

Cela illustre la **division euclidienne** d'un polynôme $P$ par le polynôme $(x-x_0)$ qui s'écrit $P(x)=P(x_0)+(x-x_0)Q(x)$, où $Q$ est aussi un polynôme.

**4** $-5+x(2-x)=-5+2x-x^2$ puis $10+x(-5+x(2-x))=10-5x+2x^2-x^3$ avec deux multiplications seulement !

Cette manière d'écrire un polynôme est celle de **Hörner**. Elle minimise le nombre de multiplications à effectuer pour l'évaluer en $x$.

**B.** **5** $a(a+1)$ ; une seule solution $0$ dans $\mathbb{N}$ car l'autre solution $-1\notin\mathbb{N}$ **6** $7b(3b-1)$ ; une seule solution $0$ dans $\mathbb{D}$ car $1/3\notin\mathbb{D}$

**7** $(x+3)(x+1)$ ; les deux solutions $-1$ et $-3$ sont dans $\mathbb{Z}$ **8** $\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$ ; $\sqrt{3}(5-4)=\sqrt{3}$

**C.** **9** $\frac{17}{11}$ ; $\frac{13}{5}$ **10** $\frac{12}{35}\neq\frac{1}{12}$ car $12\times12\neq35\times1$ **11** $\frac{46}{24}=\frac{\cancel{2}\times23}{\cancel{2}\times12}=\frac{23}{12}$ ; $\frac{7}{2\times3}+\frac{3}{2\times2}=\frac{7\times2+3\times3}{2\times3\times2}=\frac{14+9}{2\times2\times3}=\frac{23}{12}$

De cette manière, les nombres sont moins gros ! **12** $\frac{2}{x(x-1)(x+1)}$ Cela servira dans le cadre des **sommes télescopiques**.

**D.** **13** $\frac{45}{44}$ **14** $\frac{8\times\cancel{7}}{3\times\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}\times5}{2\times\cancel{7}}=\frac{\cancel{2}\times4\times5}{3\times\cancel{2}}=\frac{20}{3}$ **15** $\frac{\cancel{5}}{\cancel{7}}\times\frac{\cancel{3}\times\cancel{3}\times2}{\cancel{3}\times\cancel{3}}\times\frac{2\times\cancel{7}}{\cancel{3}}=4$

**E.** **16** $\frac{3}{2}$ **17** $\frac{1}{6}$ plutôt que $\frac{5}{30}$ **18** $\frac{5}{3}$ plutôt que $\frac{35}{21}=\frac{5\times\cancel{7}}{3\times\cancel{7}}$ **19** $\frac{9}{28}$ **20** $\frac{5}{4}$ bien mieux que $\frac{195}{156}$ …

## 2. La routine algébrique : les règles du jeu

### Additionner, soustraire, multiplier, diviser : les quatre opérations $+$, $-$, $\times$, $\div$

Il est long, le chemin parcouru par l'humanité, depuis les premiers cailloux ("**calculus**") qui permettaient au berger de vérifier qu'il avait bien le même compte de moutons entre le matin et le soir. Il est long aussi, le chemin que vous avez parcouru depuis l'école élémentaire et il n'est donc pas question de le refaire tout entier ici !

Cependant, force est de constater que nombre d'entre vous, pourtant pétris de bonne volonté, ont parfois "tout faux" à cause d'une erreur de calcul au début d'un exercice : la faute à un usage abusif de la calculatrice ?

Remettons donc l'essentiel en place : les **égalités** qui suivent seront énoncées avec des lettres $a, b, c, d$ … pouvant prendre une infinité de valeurs (pour l'instant dans des ensembles de nombres comme $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais en fait aussi ailleurs). Cela en fait des **identités**.

**Objectifs**

- pointer du doigt quelques lacunes héritées du collège : avouez que c'est plutôt vexant d'hésiter sur la valeur de $(5/6)/(10/3)$ … (voir la note [a] ci-dessous)
- mais aussi examiner de l'oeil de l'algébriste les règles de calcul sur les quatre opérations : si on a le droit de calculer comme on en a envie, c'est que la structure de groupe commutatif puis celle de corps commutatif se cachent là-dessous !

[a] Vous avez répondu $1/4$ ? C'est cela ! Mais êtes-vous passés par $15/60$ ou avez-vous **simplifié** en cours de route $\dfrac{5\times 3}{6\times 10}$ qui vaut $\dfrac{\cancel{5}\times\cancel{3}}{\cancel{2}\times\cancel{3}\times 2\times\cancel{5}} = \dfrac{1}{4}$ ?

**Les mots justes :** le résultat

- $a+b$ d'une **addition** est une **somme**,
- $a-b$ d'une **soustraction** est une **différence**,
- $a\times b$ d'une **multiplication** est un **produit**,
- $a\div b$ d'une **division** est un **quotient**,
- $-a$ désigne l'**opposé** de $a$,
- $1/a = a^{-1}$ désigne l'**inverse** de $a$ non nul.

Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, on écrit aussi $ab$ au lieu de $a\times b$)

**Cela semble idiot, mais pensez-y !**

Une égalité s'applique de gauche à droite **ET** de droite à gauche : l'égalité est une relation **symétrique**.

Ce sens inhabituel est souvent utilisé en **calcul mental** où l'on remplace une opération compliquée par plusieurs opérations plus simples.

- Par **exemple**, 2 fois 3 font 6 s'écrit : $2\times 3 = 6$.

De droite à gauche, cette égalité dit que 6 "se **décompose**" en 2 fois 3.
D'où, pour $a$ entier, $6a = 2\times(3a)$.

- Ainsi, pour **multiplier de tête par** 6,
  - on multiplie d'abord par 3
  - et ensuite par 2.

Pourquoi terminer par 2 ? Parce qu'il est plus facile de multiplier un grand nombre par 2 que par 3 …

composition des applications

On a là un premier exemple de **composition des applications** : la multiplication par 6 est la composée (ici commutative) de la multiplication par 3 suivie de la multiplication par 2.

## 1 Faire avec + et × et défaire avec − et ÷

Remarquez que − et ÷ défont ce que + et × ont fait : elles permettent de revenir au point de départ.

**Des billets aller-retour :**

**• Addition (aller) et soustraction (retour)**

$a \xrightarrow{+b\,:\ \text{ajouter } b \text{ à } a} a+b=c$

$c-b=a \xleftarrow{-b\,:\ \text{soustraire } b \text{ à } c} c=a+b$

**• Multiplication (aller) et division (retour)**

$a \xrightarrow{\times b\,:\ \text{multiplier } a \text{ par } b\neq 0} a\times b=c$

$c\div b=a \xleftarrow{\div b\,:\ \text{diviser } c \text{ par } b\neq 0} c=a\times b$

Ces flèches qui vont dans les deux sens doivent vous faire penser à des **applications réciproques l'une de l'autre** : c'est effectivement le cas !

**"Soustraire b"** est la **réciproque** d'**"ajouter b"**.
**"Diviser par b"** (non nul) est la **réciproque** de **"multiplier par b"**.

Ainsi, pour **diviser mentalement par** 6, on divise d'abord par 2 et ensuite par 3 (dans cet ordre) : cela illustre la formule sur la **réciproque d'une composée**.
En effet, lorsqu'on multiplie, on termine par 2, donc lorsqu'on divise, on commence par 2 : lorsque vous vous déshabillez, vous enlevez en premier ce que vous avez mis en dernier !

En général, on "fait" avec une bijection et on "défait" avec sa bijection réciproque.

## Ce qu'apporte **la notion de groupe** (les curieux iront voir le thème correspondant)

L'idée de génie avec la notion de **groupe**, c'est de pouvoir écrire − avec + et ÷ × : ainsi, − et ÷ ne sont pas des opérations nouvelles !

On considère que

- **soustraire** 2, c'est comme **ajouter** $-2$, encore faut-il disposer de $-2$ …et c'est ainsi que l'on agrandit $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$,
- **diviser par** 3, c'est comme **multiplier par** $1/3$, encore faut-il disposer de $1/3$ …et c'est ainsi que l'on agrandit $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$.

Plus généralement,

**Soustraire b**, c'est **ajouter** $-b$.
**Diviser par b** (non nul), c'est **multiplier** par $1/b$.

$(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{Q}^*,\times)$, $(\mathbb{R}^*,\times)$, $(\mathbb{C}^*,\times)$ sont des **groupes commutatifs** comme on va le voir à la page suivante
(l'exposant $*$ indique qu'on a enlevé 0 de l'ensemble considéré).

Des commentaires (à lire en seconde lecture)

Prenons l'exemple de la **loi de composition** +.

- **Composer** 6 et 4 avec +, c'est écrire $6+4=10$ ; inversement, on peut **décomposer** 10 en $6+4$ (les compléments à dix sont utiles en calcul mental).
- Si on peut écrire les termes d'une somme dans l'ordre qui nous arrange, c'est parce que + est **commutative**.
- Si on peut défaire des paquets pour en refaire d'autres, c'est parce que + est **associative** : par exemple, $7+(3+48)=(7+3)+48=10+48$.
- Si l'égalité $x+3=y+3$ se transforme en $x=y$, c'est parce qu'on peut **simplifier** par 3, en ajoutant $-3$ à chaque membre.
- Si l'équation $x+2=6$ se transforme en $x=4$, c'est parce qu'on peut **faire passer** 2 **dans le second membre**, ce qui revient à ajouter $-2$ à chaque membre.

## 2 Les propriétés de + et de × qui se ressemblent

Explicitons les propriétés qui ont fait germer la notion de **groupe** : celles de base sont en **gras**, les autres en résultent.
Complétez le tableau suivant où les lettres $a, b, c, d, x$ désignent des **nombres rationnels, réels** (ou même **complexes**).

| | | | |
|---|---|---|---|
| **commutativité** de + <br> $\mathbf{b+a=}\ldots\ldots\ldots$ <br> peu importe l'ordre des éléments qu'on ajoute | **associativité** de + <br> $\mathbf{(a+b)+c=}\ldots\ldots\ldots\ldots$ <br> la valeur commune est $\mathbf{a+b+c}$, les parenthèses sont inutiles | **élément neutre** pour + <br> $\mathbf{a+0=0+a=}\ldots\ldots$ <br> $\mathbf{0}$ ne change rien à une somme | **élément symétrique** $\mathbf{-a}$ de $\mathbf{a}$ pour + <br> $\mathbf{a+b=0\iff b=}\ldots\ldots$ <br> on note $\mathbf{-a}$ l'**opposé** de $\mathbf{a}$ |
| **commutativité** de × <br> $\mathbf{b\times a=}\ldots\ldots\ldots$ <br> peu importe l'ordre des éléments qu'on multiplie | **associativité de** × <br> $\mathbf{(a\times b)\times c=}\ldots\ldots\ldots$ <br> la valeur commune est $\mathbf{a\times b\times c}$, les parenthèses sont inutiles | **élément neutre** pour × <br> $\mathbf{a\times 1=1\times a=}\ldots\ldots\ldots\ldots$ <br> $\mathbf{1}$ ne change rien à un produit | **élément symétrique** $\mathbf{1/a}$ de $\mathbf{a}$ non nul pour × <br> $\mathbf{a\times b=1\iff b=}\ldots\ldots\ldots$ <br> on note $\mathbf{1/a}$ ou $\mathbf{a^{-1}}$ l'**inverse** de $\mathbf{a}$ lorsque $\mathbf{a\neq 0}$ |
| définir la **soustraction** <br> $\mathbf{a-b=a+(-b)}$ <br> $\mathbf{-b}$ est l'**opposé** de $\mathbf{b}$ | l'opposé de l'opposé <br> $-(-a)=\ldots\ldots\ldots$ <br> ça se démontre ! | simplifier une égalité <br> $\not{a}+b=\not{a}+c\Longrightarrow\ldots\ldots\ldots$ <br> ajouter $-a$ à chaque membre, la réciproque est vraie | résoudre une équation <br> $a+x=b\Longrightarrow x=\ldots\ldots\ldots$ <br> ajouter $-a$ à chaque membre, la réciproque est vraie |
| définir la **division** pour $\mathbf{b\neq 0}$ <br> $\mathbf{a\div b=\dfrac{a}{b}=a\times\dfrac{1}{b}}$ <br> $\dfrac{1}{\mathbf{b}}$ est l'**inverse** de $\mathbf{b}$ | l'inverse de l'inverse pour $a\neq 0$ <br> $\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}}=\ldots\ldots\ldots$ | simplifier une égalité pour $a\neq 0$ <br> $\not{a}b=\not{a}c\Longrightarrow\ldots\ldots\ldots$ <br> multiplier chaque membre par $1/a$ ; la réciproque est vraie | résoudre une équation pour $a\neq 0$ <br> $ax=b\Longrightarrow x=\ldots\ldots\ldots$ <br> multiplier chaque membre par $1/a$, la réciproque est vraie |

✅ **Les réponses** : $\mathbf{b+a=a+b}$ ; $\mathbf{(a+b)+c=a+(b+c)}$ ; $\mathbf{a+0=0+a=a}$ ; $\mathbf{a+b=0\iff b=-a}$ ; $\mathbf{b\times a=a\times b}$ ; $\mathbf{(a\times b)\times c=a\times(b\times c)}$ ; $\mathbf{a\times 1=1\times a=a}$ ; $\mathbf{a\times b=1\iff b=1/a}$ ; $\mathbf{-(-a)=a}$ ; $\not{a}+b=\not{a}+c\iff b=c$ ; $a+x=b\iff x=b-a$ ; $1/(1/a)=a$ ; $\not{a}b=\not{a}c\iff b=c$ ; $ax=b\iff x=b/a$.

**Remarque**

quel est l'avantage de la soustraction ?

$$a+x=b \Longleftrightarrow x=b-a :$$

c'est le début des manipulations algébriques !

Mais en pratique, on n'a pas forcément besoin d'effectuer cette soustraction (voir ci-contre).

**Exemple** pour **rendre la monnaie** $x$ de $37,60€$ sur un billet de $50€$, avec une calculette, vous tapez $50-37,60$, ce qui vous donne $x$.

Mais est-ce bien nécessaire ? Non, mieux vaut incrémenter $37,60$ jusqu'à $38$ puis jusqu'à $40$ puis jusqu'à $50$.

A aucun moment, on n'a besoin de connaître $x$ !

✅ **Réponse** : de $37,60€$ à $38€$, il manque $0,40€$, de $38€$ à $40€$, il manque $2€$ et enfin de $40€$ à $50€$, il manque $10€$
(et en fait $x=12,40$).

## 3 Poursuivons maintenant avec quelques règles qui mélangent des produits et des quotients.

| multiplier des quotients | simplifier un quotient | diviser un quotient | inverser un quotient | diviser par un quotient | diviser des quotients |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\ldots\ldots\ldots$ Pensez à simplifier ! | $\frac{a\not{b}}{b\not{b}}=\ldots\ldots\ldots\ldots$ | $\frac{\frac{a}{b}}{d}=\ldots\ldots\ldots$ | $\frac{1}{\frac{c}{d}}=\ldots\ldots\ldots$ | $\frac{a}{\frac{c}{d}}=\ldots\ldots\ldots$ | $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\ldots\ldots\ldots$ |

✅ **Les réponses dans le désordre** : $\frac{ad}{bc}$ ; $\frac{ac}{bd}$ ; $\frac{d}{c}$ ; $\frac{a}{b}$ ; $\frac{a}{bd}$ ; $\frac{ad}{c}$.

➢ Des applications au **calcul mental** (avec des nombres décimaux écrits en base dix)

**Exemple 1** $\frac{2}{10}=\frac{\not{2}}{\not{2}\times 5}=\frac{1}{5}$. D'où $\frac{234}{5}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Par conséquent, comment fait-on pour **diviser** de tête un nombre décimal **par 5** ?

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

✅ **Réponse** : $234\div 5=468\div 10=46,8$. Pour diviser x par 5, on le multiplie par 2 puis on décale la virgule d'un cran à gauche puisque $\frac{x}{5}=\frac{2x}{10}$.

**Exemple 2** pour **multiplier** de tête un nombre **par 25**, on lui ajoute deux "0" puis on divise deux fois de suite par 2.

Par exemple, $37\times 25=3700\div 4=(3700\div 2)\div 2=1850\div 2=925$.

Pourquoi ? $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

✅ **Réponse** : $25=\frac{100}{4}=\frac{\frac{100}{2}}{2}$ et ainsi $25x=\frac{\frac{100x}{2}}{2}$.

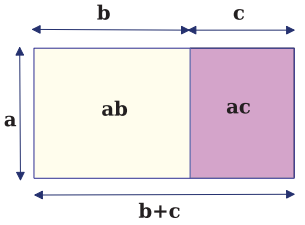
En fait, tout se passe bien pour des **sommes entre elles** ou des **produits entre eux**. Mais lorsque + et × se mélangent, il faut être prudent !

## 4 La distributivité de × par rapport à +

Dans $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a : $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$

De gauche à droite, on transforme ainsi un **produit** en **somme** en le **développant**.
De droite à gauche, on transforme une **somme** en **produit** en la **factorisant**.

Comme × est commutative, on a aussi : $(\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}$.




Connaissez-vous une fonction qui **transforme un produit** de réels strictement positifs **en somme** et une autre qui **transforme une somme** de réels **en produit** ?

.....

**Réponse :** la fonction **logarithme népérien** qui vérifie $\forall a\in]0,+\infty[\quad\forall b\in]0,+\infty[\quad \ln(ab)=\ln a+\ln b$
et son application réciproque, la fonction **exponentielle** qui vérifie : $\forall x\in\mathbb{R}\quad\forall y\in\mathbb{R}\quad \mathrm{e}^{x+y}=\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{y}$.

➢ Des applications au **calcul mental** (avec des nombres écrits en base dix)

**Exemple 1** comme $11=10+1$, comment **multiplier** de tête le nombre $x$ par 11 ?

.....

Par exemple, $39\times11=$ .....

**Réponse** : $11x=(10+1)x=10x+x$ donc on ajoute un "0" à sa droite de $x$, nombre auquel on ajoute $x$.
Ici, $39\times11=390+39=390+40-1=429$.

**Exemple 2** pour **multiplier** de tête le nombre $x$ **par 15**, on ajoute un "0" à sa droite, nombre auquel on ajoute ensuite sa moitié.

Par exemple, $72\times15=720+360=1080$.

Pourquoi ? .....

**Réponse** :

$15x=(10+5)x=10x+5x=10x+\dfrac{10x}{2}$.

**Exemple 3** préférez-vous toucher d'abord une prime de 50 € et qu'ensuite votre salaire mensuel $S$ soit augmenté de 10% ou l'inverse ?

.....

**Réponse** : dans le premier cas, vous toucherez $1,1(S+50)$€ soit $1,1S+55$€ alors que dans le second cas, vous toucherez $1,1S+50$ €. Comme $55>50$, il vaut mieux toucher la prime d'abord !

➢ Et maintenant **quelques conséquences de cette distributivité**.

| 0 est absorbant | retrouver l'opposé de $a$ |
|---|---|
| $0\times a=$ ..... | $(-1)\times a=$ ..... |
| heureux ! (ça se démontre ...) | plutôt rassurant ! (ça se démontre ...) |

Des élucubrations de matheux

La preuve de $0\times a=0$

$0\times a+0\times a=(0+0)\times a=0\times a=0\times a+0$
Donc $\cancel{0\times a}+0=\cancel{0\times a}+0\times a$.
En simplifiant chaque membre par $0\times a$, on obtient bien $0\times a=0$.

La preuve de $(-1)\times a=-a$

$1\times a+(-1)\times a=(1-1)\times a=0\times a=0$
Donc $(-1)\times a$ est bien l'opposé $-a$ de $a$.

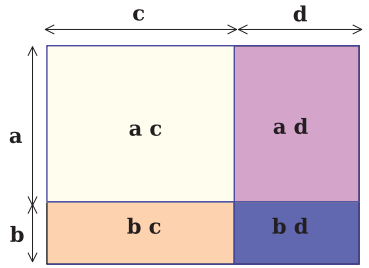
Vous trouvez cela mystérieux ? C'est normal !

| résoudre une équation | transformer une équation | faire un produit en croix | résoudre une équation affine |
|---|---|---|---|
| $ab=0$ $\iff$ ..... d'où l'intérêt de **factoriser** une équation. Idée : multiplier par $1/a$ si $a\neq 0$ | $a=b$ $\iff a-b=\ldots$ objectif : **factoriser** ensuite $a-b$ pour se ramener au cas précédent | pour $b$ et $d$ non nuls, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $\iff$ ..... → la proportionnalité → la règle de trois $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad-bc$ est un **déterminant** d'ordre 2 ; il s'interprète géométriquement | pour $a$ non nul, $ax+b=y$ $\iff x=$ ..... ce qui donne $x$ en fonction de $y$ ; il y a une **application réciproque** là-dessous ! |

✅ **Les réponses** : $ab=0 \iff a=0$ ou $b=0$ ; $a=b \iff a-b=0$ ;
pour $bd\neq 0$, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \iff \frac{ad-bc}{bd}=0 \iff ad-bc=0$ ; pour $a\neq 0$, $ax+b=y \iff x=\frac{y-b}{a}$.

➢ De la simple distributivité, on déduit la **double distributivité :**

$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$.




**(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd**

**Exemple 1**

$99\times 101=(100-1)(100+1)=100^2-1=9999$.

**Exemple 2** un rendement de 40% compense-t-il une baisse de 40% ? .....

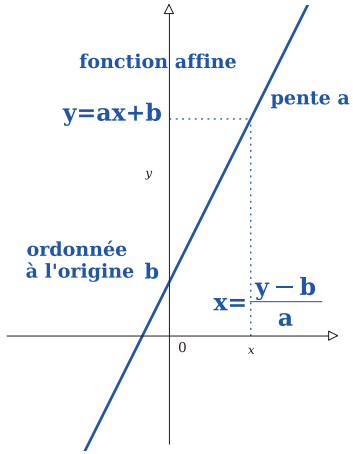
✅ **Réponse** : non car $(1+0,4)(1-0,4)=1-0,4^2=1-0,16=0,84$ et $0,84<1$.

**Exemple 3**

$a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$,

développement lié à l'expression de la somme $s$ et du produit $p$ des racines d'un trinôme du second degré $ax^2+bx+c$ lorsque $a\neq 0$.

Le lien avec l'application affine $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$




Pour n'importe quel réel $y$, l'équation affine $y=ax+b$ admet une et une seule solution réelle $x$, ce qui s'écrit :

$$\forall y\in\mathbb{R} \quad \exists\,!\, x\in\mathbb{R} \quad y=f(x)$$

($\forall$ signifie "pour tout", $\exists$ signifie "il existe" et le point d'exclamation précise "un et un seul").

**L'existence et l'unicité** de cette solution caractérisent le fait que $f$ soit une **bijection** de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Ici, on sait expliciter la solution $x$ qui est $\frac{y-b}{a}$ ; on la baptise $f^{-1}(y)$ et $f^{-1}$ s'appelle l'**application réciproque** de $f$ ; c'est aussi une fonction affine et la pente de sa droite représentative vaut $1/a$.

N.B. il arrive parfois que l'on arrive à prouver que $f$ est une bijection d'un ensemble $E$ sur un ensemble $F$ mais que l'on ne sache **pas** expliciter $f^{-1}$, c'est-à-dire **exprimer la solution** $x$ de l'**équation** $y=f(x)$ **en fonction de** $y$. Cela donne naissance à de nouvelles fonctions comme les **fonctions circulaires réciproques**.

# Les Maths

## ✓ c'est plus simple avec un schéma

**Avec son format hybride, à mi-chemin entre le manuel et le cahier d'exercices et ses figures en couleurs, il accompagne le lecteur tout en douceur en le maintenant actif. Mieux qu'un manuel, c'est un compagnon qui guide pas à pas.**

Pour mettre en confiance l'étudiant et consolider les bases, ce livre propose :

- des tableaux à compléter
- des modèles à reproduire
- 200 questions-réponses
- 100 exercices pour s'entraîner

**Dans ce livre, vous trouverez des séquences indépendantes, pour une lecture non linéaire, offrant une vision croisée des mathématiques, pour mieux se les approprier.**

Ancienne élève de l'ENS Fontenay, agrégée de mathématiques et docteure en mathématiques appliquées, **Claudine Chaffy** a été maîtresse de conférences à l'Université Grenoble Alpes. Avec enthousiasme et bienveillance, elle a accompagné des étudiants de tous niveaux vers la réussite en leur faisant découvrir le plaisir de comprendre. Elle poursuit ici sa mission : faire aimer les maths !

## PUBLIC

- ✓ Lycéens
- ✓ Élèves de CPGE, étudiants de L1 ou de Prépa intégrée
- ✓ Candidats aux concours de l'enseignement

## Les « PLUS »

- un format pratique, à emporter partout
- des explications claires, sans jargon inutile
- des modèles à reproduire, pour apprendre en s'exerçant
- une lecture à deux niveaux : réviser la matière ou l'approfondir

Prix : 19,90€
ISBN : 978-2-8073-7455-3







www.deboecksuperieur.com