

Michel Fayol

L'ACQUISITION DU NOMBRE

*Cinquième édition mise à jour
13^e mille*

*Que
sais-je?*

À lire également en *Que sais-je ?*

COLLECTION FONDÉE PAR PAUL ANGOULVENT

Olivier Houdé, *La Psychologie de l'enfant*, n° 369.

Gaston Mialaret, *Les Sciences de l'éducation*, n° 1645.

Patrick Rayou, Agnès van Zanten (dir.), *Les 100 mots de l'éducation*,
n° 3926.

Michèle Kail, *L'Acquisition du langage*, n° 3939.

Michel Fayol, *L'Acquisition de l'écrit*, n° 3970.

Michèle Kail, *L'Acquisition de plusieurs langues*, n° 4005.

Ce livre ne peut être reproduit ni utilisé à des fins
d'entraînement de systèmes d'intelligence artificielle.

La fouille de textes et de données est interdite
conformément à l'article 4(3) de la Directive (UE) 2019/790.

ISBN 978-2-13-089948-8

ISSN 0768-0066

Dépôt légal – 1^{re} édition : 2012

5^e édition mise à jour : 2026, octobre

© Que sais-je ?/Presses Universitaires de France, 2026
5, allée de la 2^e DB, 75015 Paris

Introduction

Les mathématiques ennuiant certains élèves, elles en séduisent d'autres. En cela, leur situation ressemble à celle d'autres disciplines. Pourtant, dans presque tous les pays de l'OCDE, environ 20 % des enfants et adolescents développent à leur endroit des sentiments négatifs, allant de l'anxiété à la phobie, sans qu'on comprenne encore très bien pourquoi¹. Dans nos sociétés, les mathématiques sont fortement valorisées : dans les activités professionnelles d'abord puisque le niveau moyen requis pour l'exercice de la plupart des professions est estimé à celui de la classe de troisième² ; dans la société dite de la connaissance ensuite, objectif dont l'atteinte nécessite une culture scientifique dans laquelle elles ont une part importante ; dans l'école enfin, où elles jouent un double rôle, de discipline phare et d'outil de sélection, l'une et l'autre contribuant à surévaluer les réussites et à dramatiser les échecs. La société française et les autorités s'inquiètent de la performance des élèves aux épreuves de différents programmes internationaux (respectivement TIMSS, CEDRE et PISA) dont les résultats montrent la baisse de niveau et l'augmentation de l'hétérogénéité des élèves français : les faibles en mathématiques sont

1. A.E. Foley, J.B. Herts, F. Borgonovi, S. Guerriero, S.C. Levine, S.L. Beilock, « The math anxiety-performance link : A global phenomenon », *Current Directions in Psychological Science*, 26, 52-58, 2017.

2. D.C. Geary, « Consequences, characteristics, and causes of mathematical learning disabilities and persistent low achievement in mathematics », *Journal of Developmental & Behavioral Pediatrics*, 32 (3), 250-263, 2011 ; G.J. Hitch, « The numerical abilities of industrial trainee apprentices », *Journal of Occupational Psychology*, 51, 163-176, 1978.

plus nombreux que dans d'autres pays, et les très bons, pas aussi nombreux qu'on le supposait¹. Ces constats ont conduit à la mise en place d'un plan d'action (plan Villani – Torossian, 2018) qui, associé à la généralisation des évaluations aux différents niveaux scolaires, devrait permettre un suivi et une régulation des performances des élèves. La recherche – longtemps ignorée par les ministères concernés – est mise à contribution. Que nous apprend-elle ? Pourrait-elle contribuer, et comment, à améliorer cette situation ?

De manière schématique, les travaux concernant le nombre, son acquisition et son utilisation chez l'enfant et l'adulte apparaissent au début du xx^e siècle et ne cessent d'augmenter. Ils se succèdent selon trois périodes. Jusque vers les années 1960, deux préoccupations dominent, toutes deux liées à un souci d'application : premièrement, situer les individus les uns par rapport aux autres ; deuxièmement, chercher à décrire et tenter d'expliquer la difficulté relative des savoirs et savoir-faire arithmétiques et à concevoir des techniques susceptibles d'en améliorer l'apprentissage et l'utilisation. La période située entre 1950 et 1980 est marquée par la diffusion des conceptions de Jean Piaget sur le développement de l'enfant et leur application au champ pédagogique, en relation avec les mathématiques dites modernes. Plus récemment, à partir de 1980, sous l'influence de la neuropsychologie puis des sciences cognitives, un double mouvement, théorique et empirique, a mis en évidence la diversité et la complexité des activités mentales associées aux mathématiques, recherché les fonctionnements cérébraux qui leur sont associés, cherché à les mettre en relation avec les données de la génétique et du

1. « TIMSS 2019 » : note d'information (NI) n° 20.46, 2020 ; NI n° 20.47, 2020 ; « CEDRE », NI n° 20.33, 2020, sur l'évolution des performances 2008-2014-2019. Sur les évaluations par niveau 2025 : NI 25-16 (CE1), 25-17 (CE2), 25-18 (CM1) et 25-19 (CM2). Sur le plan Villani – Torossian, voir le rapport 2022-228 de l'IGESR.

développement tout en se préoccupant des applications aux pathologies et à la pédagogie.

L'acquisition du nombre : différences interindividuelles et perspectives psychopédagogiques. – Dès le début du ^{xx}e siècle, les psychologues s'intéressent à l'acquisition du nombre et de la numération. Leur perspective traduit le souci d'établir des critères de différenciation interindividuels. Il s'agit de ne maintenir, au sein de l'école rendue obligatoire, que les enfants aptes à suivre les programmes établis. Binet élabore en 1905, puis remanie en 1908 et 1911, des épreuves numériques qui sont ordonnées en fonction de l'âge de réussite, par exemple, à 5 ans, compter 4 sous, à 6 ans, 13 sous et à 7 ans, 9 sous (trois simples et trois doubles). D'une part, les auteurs souhaitent élaborer une échelle de développement couvrant les principaux champs, dont celui du nombre. D'autre part, ils recherchent des épreuves pour lesquelles l'amélioration des performances en fonction de l'âge est régulière et s'étale sur une brève période. Ces items permettent d'affecter un individu à un niveau de développement et un seul.

Des chercheurs relèvent que des modifications minimales induisent des différences de performance. Alice Descœudres a comparé les réussites d'enfants de 2 à 6 ans à des épreuves mettant en jeu les mêmes nombres, mais à travers des activités différentes : par exemple, concernant la quantité 3, reproduire un ensemble de 3 objets est réussi (à 75 %) à 3 ans, mais montrer autant d'objets (3) que de doigts ne l'est qu'à 4 ans, dire combien on a entendu de coups frappés (3) à 5 ans et imiter 3 coups frappés à 5 ans et demi¹. Que signifie donc « maîtriser » un nombre ? Cela suppose-t-il qu'on soit capable de le mobiliser dans n'importe quelle condition,

1. A. Descœudres, *Le Développement de l'enfant de 2 à 7 ans*, Neuchâtel, Paris, Delachaux et Niestlé, 1921, p. 206-248.

indépendamment des difficultés liées à l'exécution de telle ou telle tâche ? Suffit-il de l'utiliser dans au moins une épreuve ? Plus généralement se trouve soulevée la question de la construction d'un modèle de développement *et* de fonctionnement susceptible de rendre compte de ces variations intra- et interindividuelles. Cette question a conduit à établir une échelle de développement des performances arithmétiques chez l'enfant de 5 à 9 ans en combinant deux approches : longitudinale et transversale¹.

Le constat de ces variations a amené plusieurs auteurs à adopter un point de vue psychopédagogique. Celui-ci soulève le problème des rapports entre le développement de l'enfant, tel que le décrivent les recherches, et la construction de programmes d'enseignement². Deux perspectives d'intervention sont envisageables. La première consiste à différer l'introduction de certaines notions ou savoir-faire afin d'adapter la difficulté au niveau supposé de développement des individus. La seconde, plus volontariste, revient à mettre en place un environnement et des interventions susceptibles de susciter ou de soutenir certaines activités et d'induire l'apprentissage de savoirs et savoir-faire.

Pour adapter les programmes comme pour préparer l'environnement, il convient de disposer d'informations relatives au « développement » des élèves. Ces données doivent concerner des apprentissages particuliers, ce qui a conduit à étudier les niveaux de difficulté de tâches bien délimitées. Par exemple, la plus ou moins grande facilité d'apprentissage des 100 premières combinaisons additives (de $0 + 0$ à $9 + 9$) a été analysée chez des enfants de deuxième année primaire (7-8 ans) soumis pendant vingt

1. F. Ilg, L.B. Ames, « Developmental trends in arithmetic », *The Journal of Genetic Psychology*, 79, 3-28, 1951.

2. D.H. Bailey, T.W. Watts, E.R. Hart, M.J. Yu, « Learning about development from interventions », *Annual Review of Developmental Psychology*, 6, 251-272, 2024.

jours à un apprentissage des additions par le biais d'un jeu arithmétique¹. Les combinaisons additives n'ont pas le même niveau de difficulté. La hiérarchie des réussites² permet, aujourd'hui encore, de prédire les performances et suggère que les individus recourent au comptage plutôt qu'à une remémoration des résultats. De plus, la corrélation entre la pratique d'un item et le taux de réussite pour cet item reste faible : la répétition systématique ne suffit pas.

Les travaux anciens relativement à l'acquisition du nombre et des opérations arithmétiques ont fait apparaître des thèmes que la psychologie cognitive reprendra : difficulté relative des combinaisons d'opérations ; problème des erreurs ; rapports entre ce que fait un individu (performance) et ce qu'il serait capable de faire (compétence). Ils révèlent aussi l'existence de domaines restés pas ou peu explorés. On ne trouve aucune allusion à l'organisation linguistique des dénominations de nombres. La résolution de problèmes arithmétiques n'a guère retenu l'attention. La question de la nature de la connaissance du nombre n'est pas soulevée.

De l'empirisme au constructivisme : le nombre comme invariant fondé sur la logique. – Les travaux conduits au cours de la première moitié du xx^e siècle se caractérisent par leur caractère empirique. Les chercheurs décrivent l'évolution des connaissances – par exemple les tables de multiplication – et des savoir-faire des enfants, par exemple le traitement des opérations. Ils ne s'interrogent pas sur la définition du nombre, mais s'attachent à en

1. L.R. Wheeler, « A comparative study of the difficulty of the 100 addition combinations », *The Journal of Genetic Psychology*, 54, 284-312, 1939. Et pour les multiplications élémentaires : L.R. Wheeler, « A comparative study of the difficulty of learning multiplication combinations », *The Journal of Genetic Psychology*, 59, 189-206, 1939.

2. M. Fayol, *L'Enfant et le Nombre*, Neuchâtel, Paris, Delachaux et Niestlé, 1990, p. 20.

explorer les manifestations. Il s'agit pour eux d'évaluer des niveaux de performance et d'essayer d'élaborer des techniques efficaces d'intervention. Le critère est la réussite.

La convergence des travaux des mathématiciens et des conceptions de Jean Piaget modifie la situation dans les années 1960. Pour Piaget, le nombre est un invariant abstrait, indépendant des configurations sous lesquelles il se manifeste. Le cardinal 7 ne dépend ni des entités matérielles auxquelles il renvoie ni des dispositifs temporels (suites de coups frappés) ou spatiaux (piles ou cercles) par lesquels il se concrétise. L'accès à ce niveau d'abstraction résulte de la coordination d'opérations mentales – la classification et la sériation – qui émanent d'actions intériorisées rendues réversibles (tout ajout peut être annulé par un retrait, et réciproquement). Il se révèle tardif – vers 5-7 ans – et indépendant des pratiques sociales et du langage. Comme les dénombrements et les évaluations de la vie courante sont entachés d'erreurs, le concept de nombre ne peut émerger de pratiques empiriques. La preuve du nombre n'est pas l'exactitude du comptage, mais le fait que, si une collection d'éléments nombreux se trouve devant nous, nous cherchions à les dénombrer à trois reprises et que nous n'aboutissions pas aux mêmes résultats, nous n'en affirmerons pas moins que la quantité est restée identique puisque rien n'a été ajouté ou retiré. La cardinalité se conserve tant qu'elle n'est pas modifiée par des transformations pertinentes : ajouter, enlever. La logique, et non l'empirie, fonde la notion de nombre.

Piaget et ses collaborateurs ont mené des recherches relatives à la conservation des quantités discontinues¹. Les matériels et situations varient d'une expérience à l'autre,

1. J. Piaget, A. Szeminska, *La Genèse du nombre chez l'enfant*, Neuchâtel, Paris, Delachaux et Niestlé, 1941 ; J. Piaget, B. Inhelder, *La Genèse des structures logiques élémentaires*, Neuchâtel, Paris, Delachaux et Niestlé, 1959. Pour un exposé actualisé des thèses de Piaget, voir H. Lehalle, D. Mellier, *Psychologie du développement*, Paris, Dunod, 2021, p. 204-238.

mais le principe sous-jacent demeure. Par exemple, l'expérimentateur et l'enfant (entre 4 et 8 ans) disposent chacun d'un bocal (A1 ou A2) et placent simultanément, par *correspondance terme à terme*, à plusieurs reprises, chacun une perle à l'intérieur. Lorsque chacun des récipients contient de 7 à 15 éléments, l'expérimentateur invite l'enfant à reconnaître l'égalité des deux quantités. Il demande ensuite si, en utilisant les perles contenues dans chaque bocal, on pourrait fabriquer deux colliers de même longueur. Cette première phase ne soulève pas de problème, et l'enfant opine. Dans un deuxième temps, l'expérimentateur transvase lui-même (ou incite l'enfant à transvaser) le contenu de l'un des deux bocaux (A1) – l'autre (A2) jouant le rôle de « témoin » – dans un récipient de forme différente : soit haut et étroit (A3), soit bas et large (A4). Il demande alors à l'enfant d'estimer si A3 (*vs* A4) contient la même quantité de perles qu'A1 (*vs* A2). Il s'enquiert ensuite de la possibilité de fabriquer avec les perles extraites de A1 (*vs* A2) et de A3 (*vs* A4) deux colliers de même longueur (« pareils »).

Piaget interprète les résultats en considérant que l'évolution s'effectue en trois stades. Au stade 1, l'enfant croit que le transvasement de A1 (*vs* A2) dans un récipient de forme différente (A3 ou A4) modifie la quantité totale de perles et la longueur anticipée du collier. Il considère en général que A3 contient plus que A1 ou A2 parce que « c'est mince et ça va plus haut », alors que A4 contient moins du fait qu'« on a versé dans un petit verre ». À cette période, les quantités seraient d'abord évaluées en fonction de caractéristiques perceptives non coordonnées. Il y aurait focalisation (centration) sur une dimension et une seule et jugement à partir de ce seul point de vue. Le stade 2 se caractérise par des solutions intermédiaires. L'enfant se trouve en effet aux prises avec un conflit entre, d'une part, la conservation contrôlée par l'alignement des niveaux et la correspondance terme à terme et, d'autre part, l'apparence qui semble contredire l'égalité